Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Е. Панов, О кохомологиях факторпространств
момент-угол-комплексов, *УМН*, 2015, том 70, вы-
пуск 4, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9673>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:11:22

О когомологиях факторпространств момент-угол-комплексов

Т. Е. Панов

Мы описываем когомологии факторпространства $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H$ момент-угол-комплекса $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ по свободно действующему подтору $H \subset T^m$ путем установления изоморфизма между $H^*(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H, R)$ и соответствующей Тог-алгеброй кольца граней $R[\mathcal{K}]$ с коэффициентами в произвольном коммутативном кольце R с единицей. Этот результат был сформулирован в [2; п. 7.37] для поля R , но доказательство было недостаточно полным в случае нетривиальной группы H и конечной характеристики. Мы доказываем вырождение соответствующей спектральной последовательности Эйленберга–Мура, используя естественность функтора Тог по отношению к более широкому классу “сильно гомотопически мультипликативных” отображений в категории DASH [6]. Наш результат о вырождении не вытекает из общих результатов работ [4] и [6].

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве $[m] = \{1, \dots, m\}$. Для симплекса $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \mathcal{K}$ положим $(D^2, S^1)^I = \{(x_1, \dots, x_m) \in (D^2)^m : x_i \in S^1 = \partial D^2 \text{ при } i \notin I\}$. Момент-угол-комплексом называется полиэдральное произведение

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = (D^2, S^1)^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} (D^2, S^1)^I \subset (D^2)^m.$$

$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ является многообразием, когда $\mathcal{K}$ – триангулированная сфера, и имеет гладкую структуру, когда $\mathcal{K}$ является границей многогранника или звездчатой сферой (т. е. происходит из полного симплициального веера). Определим также

$$BT^{\mathcal{K}} = (\mathbb{C}P^{\infty}, \text{pt})^{\mathcal{K}} = \bigcup_{I \in \mathcal{K}} BT^I \subset BT^m = (\mathbb{C}P^{\infty})^m.$$

Кольцо когомологий пространства $BT^{\mathcal{K}}$ (с коэффициентами в R) есть *кольцо граней* комплекса $\mathcal{K}$:

$$H^*(BT^{\mathcal{K}}) \cong R[\mathcal{K}] = R[v_1, \dots, v_m] / (v_{i_1} \cdots v_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \notin \mathcal{K}), \quad \deg v_i = 2,$$

и имеется гомотопическое расслоение $\mathcal{L}_{\mathcal{K}} \rightarrow BT^{\mathcal{K}} \rightarrow BT^m$. Более подробное изложение этих конструкций можно найти в [3; гл. 4].

Тор T^m действует на $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ покоординатно, и мы рассматриваем свободно действующие подторы $H \subset T^m$. Многообразия $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H$ недавно привлекли внимание тем, что они допускают комплексно-аналитические структуры (как правило, некелеровы) с интересной геометрией [1], [5], [7].

Мы превратим $R[\mathcal{K}]$ в модуль над кольцом многочленов $H^*(B(T^m/H))$ при помощи гомоморфизма $H^*(B(T^m/H)) \rightarrow H^*(BT^m) = R[v_1, \dots, v_m] \rightarrow R[\mathcal{K}]$.

ТЕОРЕМА 1. Для любого коммутативного кольца R с единицей имеет место изоморфизм градуированных алгебр $H^*(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H; R) \cong \text{Тог}_{H^*(B(T^m/H); R)}(R[\mathcal{K}], R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спектральная последовательность Эйленберга–Мура расслоения $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H \rightarrow BT^{\mathcal{K}} \rightarrow B(T^m/H)$ имеет член $E_2 = \text{Тог}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathcal{K}], R)$ и сходится к $H^*(\mathcal{L}_{\mathcal{K}}/H) = \text{Тог}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathcal{K}}), R)$. Мы установим изоморфизм алгебр $\text{Тог}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathcal{K}], R) \rightarrow \text{Тог}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathcal{K}}), R)$; это также влечет вырождение спектральной последовательности.

Для тора T^k рассмотрим отображение R -модулей $\varphi: H^*(BT^k) = (H^*(BT^1))^{\otimes k} \xrightarrow{i} (C^*(BT^1))^{\otimes k} \xrightarrow{x} C^*(BT^k)$, где C^* обозначает функтор нормализованных сингулярных коцепей, а отображение $i: R[v] = H^*(BT^1) \rightarrow C^*(BT^1)$ переводит v в любую представляющую коцепь. Отображение φ индуцирует изоморфизм в когомологиях.

Исследование выполнено в ИППИ Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

DOI: 10.4213/rm9673

Заметим, что $R[\mathcal{X}] = H^*(BT^{\mathcal{X}}) = \lim_{I \in \mathcal{X}} H^*(BT^I)$, где $H^*(BT^I)$ – кольцо многочленов от $|I|$ переменных, а (обратный) предел берется в категории градуированных алгебр для диаграммы, состоящей из проекций $H^*(BT^I) \rightarrow H^*(BT^J)$, соответствующих вложениям $J \subset I \in \mathcal{X}$ [3; п. 3.5.1]. Теперь рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} R & \longleftarrow & H^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & \lim_{I \in \mathcal{X}} H^*(BT^I) = R[\mathcal{X}] = H^*(BT^{\mathcal{X}}) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ R & \longleftarrow & C^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & \lim_{I \in \mathcal{X}} C^*(BT^I) \\ \parallel & & \parallel & & \uparrow \\ R & \longleftarrow & C^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & C^*(\operatorname{colim}_{I \in \mathcal{X}} BT^I) = C^*(BT^{\mathcal{X}}) \end{array} \quad (1)$$

где двойные стрелки обозначают различные производные отображения φ и вертикальные стрелки индуцируют изоморфизмы в когомологиях. Если бы эта диаграмма была коммутативной в категории DA дифференциальных градуированных алгебр (т. е. состояла из мультипликативных отображений), то из стандартных результатов о естественности Тог вытекал бы требуемый изоморфизм $\operatorname{Тог}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathcal{X}], R) \cong \operatorname{Тог}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathcal{X}}), R) \cong H^*(\mathcal{X}/H)$. Нижняя часть в (1) – коммутативная диаграмма в DA. Верхняя часть не является коммутативной, а двойные стрелки не являются морфизмами в DA, так как отображение φ не мультипликативно. Тем не менее функтор Тог естествен по отношению к морфизмам в категории DASH при условии, что диаграмма (1) гомотопически коммутативна в DASH (см. [6; п. 5.4]). Объекты категории DASH те же, что и в DA, а морфизмами $A \Rightarrow A'$ являются отображения коалгебр $BA \rightarrow BA'$ для бар-конструкций. Отображение φ и двойные стрелки в (1) являются морфизмами в DASH (см. [6; п. 7.3]). Чтобы убедиться, что верхний правый квадрат в (1) является гомотопически коммутативным, достаточно установить гомотопическую коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} H^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & H^*(BT^J) & \longrightarrow & H^*(BT^I) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C^*(B(T^m/H)) & \longrightarrow & C^*(BT^J) & \longrightarrow & C^*(BT^I) \end{array}$$

для любого $J \subset I \in \mathcal{X}$. Здесь правый квадрат коммутативен по определению отображения φ , а левый квадрат гомотопически коммутативен в силу [6; п. 7.3].

Изоморфизм $\operatorname{Тог}_{H^*(B(T^m/H))}(R[\mathcal{X}], R) \rightarrow \operatorname{Тог}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathcal{X}}), R)$ мультипликативен, так как умножение в $\operatorname{Тог}_{C^*(B(T^m/H))}(C^*(BT^{\mathcal{X}}), R)$ определяется через умножение коцепей $C^*(X) \otimes C^*(X) \rightarrow C^*(X)$, являющееся морфизмом в DASH и естественное по X . Теорема доказана.

Автор благодарен М. Францу за привлечение внимания к неполноте доказательства в [2; п. 7.37] и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] F. Bosio, L. Meersseman, *Acta Math.*, **197**:1 (2006), 53–127. [2] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+144 pp. [3] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015. [4] V. Gugenheim, J. P. May, *On the theory and applications of differential torsion products*, Mem. Amer. Math. Soc., № 142, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974. [5] H. Ishida, *Complex manifolds with maximal torus actions*, 2013, arXiv:1302.0633. [6] H. J. Munkholm, *J. Pure Appl. Algebra*, **5** (1974), 1–50. [7] T. Panov, Yu. Ustinovsky, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 149–172.

Т. Е. Панов (Т. Е. Panov)
МГУ; ИППИ РАН; ИТЭФ
E-mail: tpanov@mech.math.msu.su

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
10.06.2015