Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Белошапка, О неприводимых представлениях конечного веса одной дискретной нильпотентной группы, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 4, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 05:04:01

О неприводимых представлениях конечного веса одной дискретной нильпотентной группы

И. В. Белошапка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\pi: G \rightarrow \text{End}(V)$ – представление группы G . Говорят, что представление π является представлением с конечным весом или π удовлетворяет условию конечности веса, если существуют такая подгруппа $H \subset G$ и такой характер χ этой подгруппы, что пространство $V(\chi, H) = \{v \in V \mid \pi(h)v = \chi(h)v \ \forall h \in H\}$ нетривиально и конечномерно; H называется тогда весовой подгруппой представления π .

Пусть G – группа унитарных матриц размера 4×4 с целыми коэффициентами, $\pi: G \rightarrow \text{End}(V)$ – ее неприводимое представление в комплексном не более чем счетномерном пространстве.

ТЕОРЕМА 1. *Неприводимое представление π мономиально, т.е. индуцировано с одномерного представления некоторой своей подгруппы, тогда и только тогда, когда оно является представлением с конечным весом.*

ЛЕММА 1. *Пусть $V(H, \chi)$ – нетривиальное конечномерное весовое подпространство пространства представления V , а $g \in G$ – элемент группы G , коммутирующий со всеми элементами подгруппы H . Тогда существует характер $\chi': H' \rightarrow \mathbb{C}^*$ группы $H' = \langle H, g \rangle$ такой, что $V(H', \chi')$ нетривиально и конечномерно.*

Утверждение следует из того, что $\pi(g)V(H, \chi) = V(H, \chi)$, $\pi(h)\pi(g) = \pi(g)\pi(h)$ для всех $h \in H$ (т.е. $\pi(H')$ действует на конечномерном пространстве $V(H, \chi)$) и коммутирующие операторы имеют одинаковый жорданов базис для конечномерных пространств и, следовательно, имеют хотя бы один общий собственный вектор – это и дает продолжение характера χ на H' .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если весовая подгруппа не содержит элемента, порождающего центр группы G , то такой элемент всегда можно добавить в весовую подгруппу, получая таким образом условие конечности веса относительно большей подгруппы.*

Всюду далее считаем, что весовая подгруппа H содержит центр группы G . Имеем следующую точную последовательность:

$$1 \rightarrow [G, G] \rightarrow G \xrightarrow{\text{pr}} G/[G, G] \rightarrow 1.$$

Группа G является нильпотентной группой класса нильпотентности 3. Для всякой подгруппы $H \subset G$ имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow [G, G] \cap H \rightarrow H \rightarrow \text{pr}(H) \rightarrow 1.$$

Положим $m = \text{rk}_{\mathbb{Q}} \text{pr}(H) \otimes \mathbb{Q}$, $n = \text{rk}_{\mathbb{Q}} [G, G] \cap H \otimes \mathbb{Q}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [1]. *Пусть π – неприводимое представление нильпотентной дискретной группы G и существует нормальная подгруппа $H \triangleleft G$, относительно которой выполняется условие конечности веса. Тогда π мономиально.*

ТЕОРЕМА 2 [2]. *Пусть π – неприводимое конечномерное представление нильпотентной дискретной группы G . Тогда π мономиально.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9674

Необходимость в теореме 1 следует из критерия Макки и двойственности Фробениуса [3], [4; гл. I.5], с помощью которых вычисляются $\text{Hom}^G(\text{ind}_H^G(\chi), \text{ind}_H^G(\chi))$; а именно, из неприводимости $\text{ind}_H^G(\chi) = \pi$ следует, что характер χ однократно входит в представление π . Докажем теперь достаточность в утверждении теоремы 1, разбирая различные ранги весовых подгрупп (m, n) , $0 \leq m \leq 3$, $0 \leq n \leq 3$.

– Ранги $(0, 1)$ и $(3, 3)$. Условие конечности веса относительно подгрупп таких рангов означает, что представление $\pi = \text{ind}_H^G(\chi)$ конечномерно, а для конечномерных представлений утверждение выполняется по теореме 2.

– Ранги $(1, 1)$, $(0, 2)$ и $(0, 3)$. Ранг весовой подгруппы в этих случаях может быть увеличен добавлением коммутирующего элемента, который можно добавить с сохранением весового условия по теореме 1.

– Ранги $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ и $(2, 3)$. Для подгрупп таких рангов проверяем условие $\text{Hom}^G(\text{ind}_H^G(\chi), \text{ind}_H^G(\chi)) = \mathbb{C}$, и если оно выполняется, доказываем от противного неприводимость представления $\pi = \text{ind}_H^G(\chi)$. Если же $\text{Hom}^G(\text{ind}_H^G(\chi), \text{ind}_H^G(\chi))$ нетривиально, то можно показать, что существуют элементы группы G , коммутирующие со всеми элементами весовой подгруппы, мы их добавляем по теореме 1 и либо после этого получаем нормальную весовую подгруппу, и тогда утверждение верно по предложению 1, либо получаем представление с $\text{Hom}^G(\text{ind}_{H'}^G(\chi'), \text{ind}_{H'}^G(\chi')) = \mathbb{C}$, неприводимость которого доказываем от противного. Это делается так: можно явно выписать базис пространства представления $\text{ind}_{H'}^G(\chi')$, посмотреть на действие группы G и доказать отсутствие нетривиальных инвариантных подпространств.

– Ранги $(3, 1)$ и $(3, 2)$. Легко проверить, что подгрупп с такими рангами в G нет (три образующих с ненулевой проекцией в $G/[G, G]$ обязательно дают ранг 2 в $[G, G]/Z(G)$).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. (а) Пусть H – подгруппа группы G унитарных матриц размера 4×4 с целыми коэффициентами и $\text{Hom}^G(\text{ind}_H^G(\chi), \text{ind}_H^G(\chi)) = \mathbb{C}$, тогда представление $\text{ind}_H^G(\chi)$ неприводимо.

(б) Если π – неприводимое представление конечного веса, то среди его весовых подгрупп всегда найдется подгруппа одного из следующих рангов: $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$.

(с) Если π бесконечномерно, то этот список короче: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$.

Список литературы

- [1] С. А. Арналь, А. Н. Паршин, *Матем. заметки*, **92:3** (2012), 323–330; англ. пер.: S. A. Arnal', A. N. Parshin, *Math. Notes*, **92:3** (2012), 295–301. [2] I. D. Brown, *Pacific J. Math.*, **45:1** (1973), 13–26. [3] P. C. Kutzko, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **64** (1977), 173–175. [4] M.-F. Vignéras, *Représentations l -modulaires d'un groupe réductif p -adique avec $l \neq p$* , Progr. Math., **137**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996, xviii+233 pp.

Иулия Валериевна Белошапка
(Iuliya V. Beloshapka)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: i-beloshapka@yandex.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
30.06.2015