Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, Асимптотика L_p -норм
многочленов Лагерра, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 5, 177–
178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 07:11:34

Асимптотика L_p -норм многочленов Лагерра

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

Пусть $\widehat{L}_n^{(\alpha)}(x)$ – многочлены Лагерра, ортонормированные с весом $w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$. Мы рассматриваем асимптотику L_p -норм

$$N_n(\alpha, p, \beta) = \int_0^\infty ([\widehat{L}_n^{(\alpha)}(x)]^2 w_\alpha(x))^p x^\beta dx, \quad p > 0, \quad \alpha > -1, \quad \beta + p\alpha > -1, \quad (1)$$

этих многочленов при $n \rightarrow \infty$. Задача мотивирована вычислениями Реньи энтропии и моментов плотности вероятностей высокоэнергетических состояний многомерно-го квантового осциллятора (см. [1]). Эти и другие информационные функционалы квантово-механических систем вызывают повышенный интерес (см. [2]). В [3] (в связи с одномерным осциллятором) была получена для любых p асимптотика L_p -норм многочленов Эрмита. Подобные асимптотики для p , принадлежащих ограниченной окрестности точки $p = 1$, изучались ранее в [4]. Надо отметить, что прогресс в получении асимптотик для всех $p > 0$ был обеспечен появившимися не так давно результатами о глобальном асимптотическом представлении ортогональных многочленов (см. [5]–[7]). Речь идет об асимптотиках, описывающих многочлен в различных областях и масштабах $x(n)$ (так называемых асимптотиках Планшереля–Ротаха), причем при больших n эти области перекрываются и в пересечениях различные асимптотические представления совпадают (“сшиваются”).

Применительно к рассматриваемой задаче асимптотика многочленов Лагерра на $\mathbb{R}_+$ описывается: в окрестности начала координат – функциями Бесселя (в масштабе $\sqrt{n}x$); правее, в области, где расположена основная масса нулей $\widehat{L}_n^{(\alpha)}$, – тригонометрическими функциями; в окрестности крайних правых нулей $\widehat{L}_n^{(\alpha)}$ – функциями Эйри. При этом асимптотики функций Бесселя при больших аргументах (как и асимптотики функций Эйри) “сшиваются” с тригонометрическими функциями. Таким образом, имеется пять асимптотических режимов (мы называем их режимами Бесселя, синус, Эйри, Бессель-синус и синус-Эйри), которые могут внести главный вклад в асимптотику интеграла N_n . Вклады в N_n первых трех (основных) режимов имеют степенную зависимость от n со следующими константами:

– для режима Бесселя

$$C_B(\alpha, \beta, p) := 2 \int_0^\infty t^{2\beta+1} |J_\alpha|^{2p}(2t) dt, \quad J_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu! \Gamma(\nu + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2\nu}; \quad (2)$$

– для режима Эйри (где $A(t)$ – функция Эйри, см. [8])

$$C_A(p) := \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{6^{2/3}}{\pi} A^2 \left(\frac{3^{3/2}}{2^{2/3}} t \right) \right]^p dt, \quad (3)$$

$$A(t) = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{t}{3}} \left[J_{-1/3} \left(2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right) + J_{1/3} \left(2 \left(\frac{t}{3} \right)^{3/2} \right) \right];$$

– для синус-режима

$$C(\beta, p) := \frac{2^{\beta+1}}{\pi^{p+1/2}} \frac{\Gamma(\beta+1-p/2)\Gamma(1-p/2)\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(\beta+2-p)\Gamma(1+p)}. \quad (4)$$

Для переходных режимов в асимптотике N_n кроме степени n возникает множитель $\ln n$. Любопытно отметить, что переходные режимы доминируют в интеграле (1), когда $C(\beta, p)$ в (4) обращается в бесконечность. Для режима Бессель-синус это происходит при $\beta+1-p/2=0$, а для режима синус-Эйри – при $1-p/2=0$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат (доказательство см. в [1]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00025).

DOI: 10.4213/rm9678

ТЕОРЕМА 1. Асимптотика норм (1) при $n \rightarrow \infty$ имеет вид:

(а) для $\beta > 0$

$$N(\alpha, p, \beta) = \begin{cases} C(\beta, p)(2n)^{1+\beta-p}(1 + \bar{o}(1)), & p \in (0, 2), \\ (\ln n + \underline{O}(1))\pi^{-2}(4n)^{\beta-1}, & p = 2, \\ C_A(p)\pi^{-p}(4n)^{(1-2p)/3+\beta}(1 + \bar{o}(1)), & p \in (2, 2 + 3\beta), \\ (C_A(p)\pi^{-p} \cdot 4^{-\beta-1} + C_B(\alpha, \beta, p))n^{-\beta-1}, & p = 2 + 3\beta, \\ C_B(\alpha, \beta, p)n^{-\beta-1}, & p \in (2 + 3\beta, \infty); \end{cases}$$

(б) для $\beta = 0$

$$N_n(\alpha, p, \beta) = \begin{cases} C(0, p)(2n)^{1-p}(1 + \bar{o}(1)), & p \in (0, 2), \\ (\ln n + \underline{O}(1))\pi^{-2}n^{-1}, & p = 2, \\ C_B(\alpha, 0, p)n^{-1}(1 + \bar{o}(1)), & p > 2; \end{cases}$$

(с) для $\beta < 0$ ($p > 0$)

$$N_n(\alpha, p, \beta) = \begin{cases} C(\beta, p)(2n)^{1+\beta-p}(1 + \bar{o}(1)), & p \in (0, 2 + 2\beta), \\ \frac{2\Gamma(p + 1/2)(\ln n + \underline{O}(1))}{\pi^{p+1/2}\Gamma(p + 1)n^{1+\beta}}, & p = 2 + 2\beta, \\ C_B(\alpha, \beta, p)n^{-(1+\beta)}(1 + \bar{o}(1)), & p > 2 + 2\beta, \end{cases}$$

где константы C , C_B , C_A определены в (4), (2), (3) соответственно и α удовлетворяет условию интегрируемости в (1): $\alpha > \max(-1, -(\beta + 1)/p)$; в противном случае $N_n(\alpha, p, \beta) = \infty$.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, “Asymptotics of L_p -norms of Laguerre polynomials and entropic moments of D -dimensional oscillator”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2015, 041, 15 с. [2] A. I. Aptekarev, J. S. Dehesa, A. Martinez-Finkelshtein, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**:6 (2010), 1355–1365. [3] A. I. Aptekarev, J. S. Dehesa, P. Sánchez-Moreno, D. N. Tulyakov, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, Contemp. Math., **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 19–29. [4] А. И. Аптекарев, В. С. Буяров, И. С. Дереза, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 3–30. [5] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:12 (1999), 1491–1552. [6] Д. Н. Туляков, *Матем. сб.*, **201**:9 (2010), 111–158. [7] C. Ou, R. Wong, *Anal. Appl. (Singap.)*, **8**:3 (2010), 247–286. [8] Г. Серё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962, 500 с.

Александр Иванович Аптекарев
(Alexander I. Aptekarev)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией

30.06.2015

Дмитрий Николаевич Туляков
(Dmitrii N. Tulyakov)

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук
E-mail: dntulyakov@gmail.com