Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Ф. Воронов, Ш. Гилл, Е. С. Шемякова, Преобразования Дарбу для дифференциальных операторов на суперпрямой, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 6, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:24:03

Преобразования Дарбу для дифференциальных операторов на суперпрямой

Ф. Ф. Воронов, Ш. Гилл, Е. С. Шемякова

Мы показываем, что любое преобразование Дарбу дифференциального оператора на суперпрямой разлагается в композицию элементарных преобразований Дарбу первого порядка. Элементарные суперпреобразования Дарбу и их итерации рассматривались ранее для конкретных операторов [1], [2]. Наш основной результат – полное описание преобразований Дарбу для произвольных операторов.

Под суперпрямой мы понимаем $1|1$ -мерное супермногообразие. Пусть x – четная координата, а ξ – нечетная координата. Обозначим $D = \partial_\xi + \xi \partial_x$, так что $D^2 = \partial$, $\partial = \partial_x$. Произвольный дифференциальный оператор на суперпрямой можно однозначно записать в виде $A = a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \dots + a_0$, где коэффициенты являются функциями от x, ξ , а также могут зависеть от некоторых “внешних” четных или нечетных переменных. Определим *порядок* оператора, полагая, что $\text{ord } A \leq m$. Это отличается от обычного понятия; например, $\text{ord } D = 1$, но $\text{ord } \partial = 2$. Оператор A порядка m называется *невыврожденным*, если старший коэффициент a_m обратим (в частности, четен); примеры: $\partial = D^2$ невырожден, а $\partial_\xi = D - \xi D^2$ – нет. Невыврожденные операторы четного порядка – четные, нечетного порядка – нечетные. Они не могут быть делителями нуля; множество всех невырожденных операторов мультипликативно замкнуто. На невырожденный оператор можно делить с остатком (слева и справа).

Для невырожденного оператора A порядка m имеем: $\dim \text{Ker } A = n|n$, если $m = 2n$, и $\dim \text{Ker } A = (n+1)|n$, если $m = 2n+1$. Например, $\dim \text{Ker } D = 1|0$ (константы). Действительно, можно переписать уравнение $D^m \varphi + a_{m-1} D^{m-1} \varphi + \dots + a_0 \varphi = 0$ в матричной форме $D\psi = \Gamma\psi$ с нечетной матрицей Γ , где компоненты вектора ψ суть $\varphi, D\varphi, \dots, D^{m-1}\varphi$. Решение линейного дифференциального уравнения такого вида полностью определяется начальным условием для вектора $\psi^0(x)$, где $\psi(x, \xi) = \psi^0(x) + \xi \psi^1(x)$, что и дает размерность пространства решений. (Для вырожденного оператора A размерность ядра может быть бесконечной; пример: $A = \partial_\xi$.) Мы видим, что невырожденные операторы на суперпрямой похожи во многих аспектах на обыкновенные дифференциальные операторы.

Для обратимой функции φ определим оператор $M_\varphi := D - D \ln \varphi$. Тогда $\text{Ker } M_\varphi = \{c \cdot \varphi\}$. Любой оператор вида $D + \mu$ может быть записан как M_φ . Пусть L – произвольный невырожденный оператор порядка m и φ – четная функция из ядра L . Будем действовать формально и предполагать, что можно делить на φ . Имеет место “теорема Безу”: L делится на M_φ , так что $L = L' M_\varphi$, где L' – невырожденный оператор порядка $m-1$. Отсюда по индукции получаем: $L = a \cdot M_{\varphi_1} \cdots M_{\varphi_m}$.

Рассмотрим невырожденные операторы порядка m с фиксированным главным символом a_m . Пусть для простоты $a_m = 1$; общий случай аналогичен. Для таких операторов оператор M произвольного порядка r определяет *преобразование Дарбу* $L_0 \rightarrow L_1$, если выполнено *сплетающее соотношение* $M L_0 = L_1 M$. *Порядок* преобразования Дарбу есть по определению число r . Оператор M автоматически является невырожденным. Оператор L_1 , если он существует, определяется однозначно по данным L_0 и M . Мы пишем $L_0 \xrightarrow{M} L_1$. Задача состоит в том, чтобы для данного L_0 найти все операторы M , задающие его преобразования Дарбу. Определена композиция: если $L_0 \xrightarrow{M_{10}} L_1$ и $L_1 \xrightarrow{M_{21}} L_2$, то $L_0 \xrightarrow{M_{20}} L_2$, где $M_{20} := M_{21} M_{10}$.

ЛЕММА. *Всякое преобразование Дарбу $L_0 \rightarrow L_1$ первого порядка задается оператором $M = M_\varphi$, где φ – четная собственная функция L_0 ; верно и обратное.*

Преобразования Дарбу первого порядка на суперпрямой, задаваемые операторами $M = M_\varphi$, будем называть *элементарными*. (Они аналогичны преобразованиям на

обычной прямой с операторами $M = \partial - \partial \ln \varphi$.) Они отвечают изменению порядка в неполной факторизации: $L_0 = QM_\varphi + \lambda \rightarrow L_1 = M_\varphi Q + \lambda$.

ТЕОРЕМА 1. *Всякое преобразование Дарбу $L_0 \xrightarrow{M} L_r$ порядка r есть композиция r элементарных преобразований первого порядка: $L_0 \xrightarrow{M_{\varphi_1}} L_1 \xrightarrow{M_{\varphi_2}} \dots \xrightarrow{M_{\varphi_r}} L_r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $ML_0 = L_rM$ для оператора M порядка r . Оператор M можно разложить на множители первого порядка: $M = M_1 \cdots M_r$, где $M_i = M_{\varphi_i}$ для некоторых функций φ_i . Само по себе это не достаточно – мы должны также найти промежуточные операторы $L_1, \dots, L_{r-1}$, связанные соответствующими преобразованиями Дарбу. Будем рассуждать по индукции. Пусть $r > 1$. Из сплетающего соотношения получаем $L_0(\text{Ker } M) \subset \text{Ker } M$. Напомним, что $\dim \text{Ker } M = s|s$, если $r = 2s$, и $\dim \text{Ker } M = s + 1|s$, если $r = 2s + 1$. Возьмем четную собственную функцию φ оператора L_0 в $\text{Ker } M$. Тогда $M = M'M_\varphi$, где M' – невырожденный оператор порядка $r - 1$, а M_φ определяет преобразование Дарбу $L_0 \rightarrow L_1$. Покажем, что M' определяет преобразование Дарбу $L_1 \rightarrow L_r$. Действительно, из равенств $M'M_\varphi L_0 = L_rM'M_\varphi$ и $M_\varphi L_0 = L_1M_\varphi$ получаем $M'L_1M_\varphi = L_rM'M_\varphi$. Отсюда следует, что $M'L_1 = L_rM'$, так как M_φ не является делителем нуля. Таким образом, $L_0 \xrightarrow{M_\varphi} L_1 \xrightarrow{M'} L_r$ факторизуется как $L_0 \xrightarrow{M_\varphi} L_1 \xrightarrow{M'} L_r$, и это завершает шаг индукции. Теорема доказана.

Аналог теоремы 1 имеет место для произвольных операторов на прямой, где элементарные преобразования задаются операторами вида $\partial - \partial \ln \varphi$. Это должно быть известно специалистам. Для оператора Штурма–Лиувилля факторизация преобразований Дарбу на элементарные установлена в [3]–[5]. Отметим, что в [6] преобразования Дарбу по определению вводятся как итерации элементарных. Подход, основанный на сплетающих соотношениях, восходит к самому Дарбу [7]. Для двумерных операторов требуется более общее сплетающее соотношение $NL_0 = L_1M$; теория в этом случае богаче из-за появления новых типов преобразований Дарбу. Факторизация преобразований Дарбу для двумерного оператора Шрёдингера была установлена в [8], [9]; новые обратимые преобразования Дарбу найдены в [10]. Возможности, которые могут открыться для “суперверсии”, весьма заманчивы.

Список литературы

- [1] Q. P. Liu, *Lett. Math. Phys.*, **35**:2 (1995), 115–122. [2] C. X. Li, J. J. C. Nimmo, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **466**:2120 (2010), 2471–2493. [3] А. П. Веселов, А. Б. Шабат, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:2 (1993), 1–21. [4] В. Г. Багров, Б. Ф. Самсонов, *ТМФ*, **104**:2 (1995), 356–367. [5] Б. Ф. Самсонов, *Изв. вузов. Матем.*, 1999, № 6, 65–68. [6] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux transformations and solitons*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1991. [7] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal*, v. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1889. [8] E. Shemyakova, *Canad. J. Math.*, **65**:3 (2013), 655–674. [9] E. Shemyakova, 2013 (v6 – 2015), arXiv: 1304.7063. [10] E. Shemyakova, *SIGMA*, **9** (2013), 002, 10 pp.

Ф. Ф. Воронов (Th. Th. Voronov)
University of Manchester, Manchester, UK;
Томский государственный университет
E-mail: theodore.voronov@manchester.ac.uk

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
21.07.2015

Ш. Гилл (S. Hill)
SUNY New Paltz, New Paltz, NY, USA

Е. С. Шемякова (E. S. Shemyakova)
SUNY New Paltz, New Paltz, NY, USA
E-mail: shemyake@newpaltz.edu