Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, А. Н. Магазинов, Локально антиподальные множества Делоне, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 5, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:07:19

Локально антиподальные множества Делоне

Н. П. Долбилин, А. Н. Магазинов

В заметке излагаются новые результаты локальной теории правильных и кристаллических систем, начатой в [2]. Результаты относятся к важному случаю дискретных множеств, для которых группа симметрий каждого $2R$ -кластера содержит центральную симметрию. Основной результат заметки – теорема 3 о единственности множества Делоне с центрально симметричными $2R$ -кластерами при условии, что задан некоторый его $2R$ -кластер. Из теоремы следует ряд доказанных ранее утверждений о “локально антиподальных” множествах, а также теорема 4 о структуре множества Делоне с антиподальными $2R$ -кластерами, из которой, в свою очередь, следует, что локально антиподальное множество Делоне является кристаллической структурой, хотя никаких дополнительных условий на количество классов $2R$ -кластеров в множестве не налагается.

Множество $X \subset \mathbb{R}^d$ называют *множеством Делоне* с параметрами r и R , где $r, R > 0$ (или (r, R) -системой – см., например, [1]), если выполняются два условия:

1) открытый d -шар $B_y^\circ(r)$ радиуса r с центром в произвольной точке $y \in \mathbb{R}^d$ содержит не более одной точки из X :

$$\#(B_y^\circ(r) \cap X) \leq 1; \quad (r)$$

2) замкнутый d -шар $B_y(R)$ радиуса R содержит хотя бы одну точку из X :

$$\#(B_y(R) \cap X) \geq 1. \quad (R)$$

Пусть X – множество Делоне, $x \in X$, ρ – положительное число, тогда множество $C_x(\rho) := X \cap B_x(\rho)$ и будем называть ρ -кластером точки x . Два ρ -кластера $C_x(\rho)$ и $C_{x'}(\rho)$ назовем *эквивалентными*, если существует движение g такое, что

$$g: x \mapsto x' \quad \text{и} \quad g: C_x(\rho) \rightarrow C_{x'}(\rho).$$

Если для данного множества Делоне X при каждом $\rho > 0$ число классов эквивалентных ρ -кластеров конечно, то говорят, что X – множество *конечного типа*. Для множества Делоне X конечного типа обозначим число классов ρ -кластеров через $N(\rho)$. Известно, что для данного X конечность числа классов $2R$ -кластеров, $N(2R) < \infty$, гарантирует конечность числа $N(\rho)$ классов ρ -кластеров для любого фиксированного $\rho > 0$. Заметим, что $N(\rho)$ есть положительная, целочисленная, неубывающая, непрерывная справа функция. Важными примерами множеств Делоне конечного типа являются понятия правильной системы и кристалла.

Правильная система – это множество Делоне, группа симметрий которого действует транзитивно, т.е. для любой пары точек x и x' из X найдется движение g пространства $\mathbb{R}^d$ такое, что

$$g: x \mapsto x' \quad \text{и} \quad g: X \rightarrow X.$$

Нетрудно показать, что правильная система является орбитой точки относительно некоторой кристаллографической группы.

Кристаллом называют множество Делоне, являющееся орбитой **конечного** множества X_0 относительно некоторой кристаллографической группы G : $G \cdot X_0$.

Множество Делоне конечного типа является правильной системой, если $N(\rho) \equiv 1$ для всех $\rho > 0$, и кристаллом, если перечисляющая функция ограничена: $N(\rho) \leq m < \infty$. Если $m = 1$, то кристалл является правильной системой.

Назовем множество Делоне X *локально антиподальным*, если $2R$ -кластер $C_x(2R)$ для каждой точки $x \in X$ центрально симметричен относительно x . В [3] были доказаны две теоремы о локально антиподальных множествах.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00414).

DOI: 10.4213/rm9685

ТЕОРЕМА 1 (об антиподальности множества). *Локально антиподальное множество Делоне в целом антиподально относительно каждой своей точки.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть для локально антиподального множества Делоне X выполнено равенство $N(2R) = 1$. Тогда X является правильной системой.*

Основной результат заметки – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3 (единственности). *Пусть X и Y – локально антиподальные множества Делоне с параметром R . Предположим, что $x \in X \cap Y$ и $C_x(2R) = C'_x(2R) \subset X \cap Y$. Тогда $X = Y$.*

Здесь $C'_y(2R)$, $y \in Y$, обозначает $2R$ -кластер в множестве $Y \cap B_y(2R)$. Как утверждает теорема, если X и Y имеют общий $2R$ -кластер и все $2R$ -кластеры в обоих множествах центрально симметричны, то множества совпадают в целом.

Из этой теоремы немедленно следуют доказанные в [3] теоремы 1 и 2. Действительно, по условию теоремы 1 симметрия σ относительно точки x переводит $C_x(\rho)$ в себя, а X в $Y := \sigma(X)$. Тогда по теореме 3 справедливо равенство $X = \sigma(X)$, что доказывает теорему 1.

Далее, по условию теоремы 2 для любых двух точек $x, x' \in X$ существует движение g такое, что $g(x) = x'$ и $g(C_x(2R)) = C_{x'}(2R)$. Рассмотрим множество $Y := g(X)$, для него имеем $Y \cap X \supset C_{x'}(2R)$. По теореме 3 получаем, что $X = Y$, т. е. $X = g(X)$, откуда следует теорема 2.

Наиболее интересное следствие теоремы 3 – это приводимая ниже теорема 4 о структуре локально антиподального множества Делоне. Произвольная точечная решетка Λ является локально антиподальным множеством. Если добавить к ней параллельные решетки, сдвинутые во все или в некоторые “полуцелые” точки для этой решетки, получатся, очевидно, также локально антиподальные множества. Теорема 4 утверждает, что этим исчерпываются все локально антиподальные множества.

ТЕОРЕМА 4 (о структуре локально антиподальных множеств). *Всякое локально антиподальное множество Делоне $X \subset \mathbb{R}^d$ представимо в виде*

$$X = \bigcup_{i=1}^N (x + v_i + \Lambda), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^d$ – некоторая точка, Λ – d -мерная решетка, а векторы $v_1, v_2, \dots, v_N$ ($1 \leq N \leq 2^d - 1$) – представители некоторых смежных классов из факторрешетки $\frac{\Lambda}{2}/\Lambda$.

Таким образом, локально антиподальное множество Делоне является кристаллом, состоящим не более чем из $2^d - 1$ решеток, которые попарно конгруэнтны, параллельно ориентированы и специальным образом сдвинуты (на векторы с полуцелыми координатами).

Список литературы

- [1] Б. Н. Делоне, УМН, 1937, №3, 16–62. [2] Б. Н. Делоне, Н. П. Долбилин, М. И. Штогрин, Р. В. Галиулин, Докл. АН СССР, 227:1 (1976), 19–21. [3] Н. П. Долбилин, Вестник ЧелГУ, 2015, №3(358), 6–17.

Н. П. Долбилин (N. P. Dolbilin)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: dolbilin@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией
03.09.2015

А. Н. Магазинов (A. N. Magazinov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: magazinov-al@yandex.ru