Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Кудинов, И. Б. Шапировский, О финитной аппроксимируемости модальных логик конечной глубины, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 1, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 08:29:39

О финитной аппроксимируемости модальных логик конечной глубины

А. В. Кудинов, И. Б. Шапировский

В настоящей заметке рассматриваются *пропозициональные нормальные модальные логики* [2]. Финитная аппроксимируемость модальной логики означает ее полноту относительно некоторого класса конечных шкал. В случае конечно аксиоматизируемой логики это свойство немедленно влечет ее разрешимость (теорема Харропа). Вопрос о финитной аппроксимируемости модальных логик изучен достаточно хорошо, это свойство доказано для многих логик (см., например, [2], [1]). Логика без финитной аппроксимируемости тоже известна, хотя в одномодальном случае она скорее экзотика и обычно строится искусственно. Имеется еще один случай – логики, для которых вопрос о финитной аппроксимируемости открыт. По-видимому, самым известным таким примером является логика K_3^2 , задаваемая единственной простой формулой $\Box\Box p \rightarrow \Box\Box\Box p$. Вообще, финитная аппроксимируемость и даже разрешимость логик K_n^m , задаваемых аксиомами $\Box^m p \rightarrow \Box^n p$, является старой открытой проблемой (см. [2; проблема 11.2], [8; проблема 6]): ответ не известен ни для каких $m, n > 1$, $m \neq n$.

При $n > m$ в логике K_n^m выразим модальный оператор, соответствующий транзитивному рефлексивному замыканию бинарного отношения. Мы будем называть такие логики *предтранзитивными*. Формально L *предтранзитивна*, если существует формула $\chi(p)$ такая, что для любой модели M такой, что $M \models L$, и для любой точки этой модели имеет место эквивалентность $M, w \models \chi(p) \iff \forall u (wR^*u \Rightarrow M, u \models p)$, где R^* – транзитивное рефлексивное замыкание отношения R модели M .

Предтранзитивность логики эквивалентна тому, что для некоторого $k \geq 0$ она содержит формулу *k-транзитивности* $\Box^{\leq k} p \rightarrow \Box^{k+1} p$, где $\Box^{\leq k} \varphi = \bigwedge_{i=0}^k \Box^i \varphi$ (см. [3]). В частности, при $n > m$ логика K_n^m является $(n-1)$ -транзитивной. Логику, заданную единственной аксиомой $\Box^{\leq m} p \rightarrow \Box^{m+1} p$, будем обозначать $K_{\leq m}$. Таким образом, $K_{\leq m}$ – минимальная m -транзитивная логика. При $m > 1$ финитная аппроксимируемость $K_{\leq m}$ также неизвестна.

Для полной по Крипке логики L ее финитная аппроксимируемость означает следующее: если формула φ выполнима в L -шкале, то она выполнима в конечной L -шкале. Из теоремы Салквиста следует, что логики K_n^m , $K_{\leq m}$ полны по Крипке; класс шкал каждой из этих логик характеризуется достаточно простым условием первого порядка. Так, K_3^2 -шкалы характеризуются условием $R \circ R \circ R \subseteq R \circ R$, где $\circ$ – композиция отношений; и вообще, K_n^m -шкалы характеризуются условием $R^n \subseteq R^m$, а $K_{\leq m}$ -шкалы – условием $R^{m+1} \subseteq \bigcup_{i \leq m} R^i$. Таким образом, неизвестно, существует ли преобразование бесконечных шкал в конечные, при котором бы сохранялась выполнимость данной формулы и одновременно указанные условия. Нам удалось описать такое преобразование в случае, когда глубина шкалы (т.е. наибольшая из мощностей цепей в частичном порядке, индуцированном отношением R) конечна.

ЛЕММА 1. Пусть L – одна из логик K_n^m , $K_{\leq m}$, $n > m \geq 1$. Если формула выполнима в L -шкале конечной глубины, то она выполнима в конечной L -шкале той же глубины.

Известно [2], что ограничение на глубину предпорядка можно выразить модальными формулами. Определим аналог этих формул для произвольной предтранзитивной L . Положим $\Box^* \varphi = \Box^{\leq k} \varphi$ для наименьшего k такого, что $K_{\leq k} \subseteq L$. В частности, $\Box^* \varphi = \Box^{\leq n-1} \varphi$ для K_n^m , $n > m$. Также положим $\Diamond^* \varphi = \neg \Box^* \neg \varphi$. Формулы B_h определяются по индукции: $B_1 = p_1 \rightarrow \Box^* \Diamond^* p_1$, $B_{h+1} = p_{h+1} \rightarrow \Box^* (\Diamond^* p_{h+1} \vee B_h)$.

Исследование выполнено в ИППИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

DOI: 10.4213/rm9686

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для предтранзитивной логики L и L -шкалы F имеет место эквивалентность: $F \models B_h \iff$ глубина F не превосходит h .

Расширение L формулой B_h обозначим $L.B_h$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть L – предтранзитивная логика. Тогда: 1) $L.B_1 \supseteq L.B_2 \supseteq L.B_3 \supseteq \dots \supseteq L$; 2) если L непротиворечива, то все $L.B_h$, $h \geq 1$, непротиворечивы; 3) если L каноническая, то все $L.B_h$, $h \geq 1$, канонические.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для всех $n > t \geq 1$, $h \geq 1$ логики $K_n^m.B_h$, $K_{\leq m}.B_h$ канонические и, следовательно, полные по Крипке.

В общем случае предтранзитивные логики конечной глубины устроены существенно сложнее, чем соответствующие расширения логики предпорядков $S4$. Так, все логики $S4.B_h$ локально табличны, логика $S4.B_1 = S5$ предтаблична, однако ни локальная табличность, ни предтабличность не имеют места даже в “простейшем” случае $K_{\leq 2}.B_1$ [7], [5]. Это же верно для всех логик $K_n^m.B_h$, $K_{\leq m}.B_h$ ($n > t \geq 2$), поскольку они включены в $K_{\leq 2}.B_1$. Тем не менее эти логики оказываются финитно аппроксимируемыми. Уже в случае высоты 1 доказательство этого факта достаточно нетривиально (особенно для логик $K_n^m.B_1$ при $n > t + 1$); финитная аппроксимиримость логик $K_{\leq m}.B_1$ была доказана в [4], предтранзитивных логик $K_n^m.B_1$ – в [6]. Следующая теорема распространяет эти результаты на случай произвольной конечной глубины.

ТЕОРЕМА 5. Для всех $n > t \geq 1$, $h \geq 1$ логики $K_n^m.B_h$, $K_{\leq m}.B_h$ финитно аппроксимируемы.

Одним из следствий этой теоремы является критерий финитной аппроксимиремости логик K_n^m , $K_{\leq m}$.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть L – одна из логик K_n^m , $K_{\leq m}$, $n > t \geq 1$. Тогда

$$L \text{ финитно аппроксимируема} \iff L = \bigcap_{h \geq 1} L.B_h.$$

Список литературы

- [1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal logic*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001. [2] A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal logic*, Oxford Univ. Press, New York, 1997. [3] D. M. Gabbay, V. Shehtman, D. Skvortsov, *Quantification in nonclassical logic*, v. 1, Elsevier, Amsterdam, 2009. [4] R. Jansana, *Notre Dame J. Formal Logic*, **35**:1 (1994), 88–98. [5] Z. Kozrzycka, *MLQ Math. Log. Q.*, **54**:6 (2008), 617–624. [6] A. Kudinov, I. Shapirovsky, “Finite model property of pretransitive analogs of $S5$ ”, *Topology, algebra and categories in logic* (Marseille, France, 2011), 2011, 261–264. [7] Y. Miyazaki, *Advances in modal logic*, v. 5, King’s Coll. Publ., London, 2005, 171–190. [8] F. Wolter, M. Zakharyashev, *Handbook of modal logic*, Stud. Log. Pract. Reason., **3**, Elsevier, Amsterdam, 2007, 427–489.

Андрей Валерьевич Кудинов
(Andrey V. Kudinov)

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
E-mail: kudinov@iitp.ru

Представлено С. К. Ландо
Принято редколлегией

23.06.2015

Илья Борисович Шапировский
(Ilya B. Shapirovsky)

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
E-mail: shapir@iitp.ru