Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Дынников, О новой дискретизации комплексного анализа, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 6, 63–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:06:58

УДК 517.962.22+517.547.9

О новой дискретизации комплексного анализа

И. А. Дынников

В работе развивается подход к дискретизации комплексного анализа, предложенный С. П. Новиковым и автором в 2003 г. В этом подходе дискретные аналитические функции являются вещественнозначными. В данной работе показано, что для большого класса таких функций на решетке канонически определяется оператор умножения на мнимую единицу. Рассматриваются случаи произвольных решеток для треугольной дискретизации и ромбических решеток — для четырехугольной.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: дискретные аналитические функции, дискретные голоморфные функции, дискретизация комплексного анализа.

DOI: 10.4213/rm9687

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	64
1.1. Классический подход к дискретизации условий Коши–Римана ..	64
1.2. Новый подход к дискретизации	65
1.3. Общие треугольная и четырехугольная дискретизации условий Коши–Римана	67
2. Дискретизация на правильной треугольной решетке	68
2.1. Дискретные аналитические функции и многочлены	68
2.2. Умножение на i	69
2.3. Умножение на z	70
2.4. Базис в пространстве многочленов и экспонента	71
2.5. Формула Коши и обобщенная теорема Лиувилля	73
3. Треугольная дискретизация на произвольной решетке	73
4. Четырехугольная дискретизация на ромбической решетке	77
Список литературы	82

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются дискретные аналоги аналитических функций на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, определенные на двумерной решетке $\mathbb{L} \cong \mathbb{Z}^2$, $\mathbb{L} \subset \mathbb{C}$. Развивается подход, предложенный С. П. Новиковым и автором в 2003 г. в связи с дискретизацией теории солитонов [1]–[5].

Через $m, n \in \mathbb{Z}$ обозначаются координаты на решетке, через T_1, T_2 – базисные сдвиги вдоль решетки:

$$(T_1 f)(m, n) = f(m + 1, n), \quad (T_2 f)(m, n) = f(m, n + 1).$$

1.1. Классический подход к дискретизации условий Коши–Римана. Наиболее известным дискретным аналогом условий Коши–Римана является следующее разностное уравнение, предложенное Ж. Ферранд [6] в 1944 г.:

$$f(m, n) + \mathbf{i}f(m + 1, n) - f(m + 1, n + 1) - \mathbf{i}f(m, n + 1) = 0 \quad (1)$$

(здесь $\mathbf{i}$ – мнимая единица), или, что равносильно,

$$\frac{f(m, n + 1) - f(m + 1, n)}{\mathbf{i} - 1} = \frac{f(m + 1, n + 1) - f(m, n)}{\mathbf{i} + 1}.$$

Из второй формы записи видно, что условие состоит в равенстве разностных производных по взаимно перпендикулярным направлениям $\mathbf{i} + 1$ и $\mathbf{i} - 1$. Здесь предполагается, что $\mathbb{L}$ – правильная квадратная решетка гауссовых целых, $(m, n) = m + \mathbf{i}n$.

Уравнение, эквивалентное (1), появлялось в более ранней работе Р. Айзекса [7], которая в годы войны не была широко известна. В ней Айзекс дает также другое определение дискретного аналога условий Коши–Римана:

$$f(m, n + 1) - f(m, n) = \mathbf{i}(f(m + 1, n) - f(m, n)). \quad (2)$$

Смысл этого уравнения, как и предыдущего, – в равенстве разностных производных по двум перпендикулярным направлениям, но теперь в каждом соотношении участвуют три точки решетки, в отличие от (1), где точек четыре.

Сам Айзекс больше интересовался дискретизацией (2), вводя для нее аналоги многочленов и экспоненты. Теория функций (1) была значительно развита Р. Даффином [8], который изучал для них аналоги комплексных многочленов, а также операции, которые могли бы служить заменой операции произведения аналитических функций.

Следует отметить, что ни для одной дискретизации теории комплексно-аналитических функций не удалось построить полноценного аналога операции произведения двух дискретных аналитических функций, что является главным недостающим звеном этих теорий.

Побочным эффектом в случае обеих дискретизаций (1) и (2) является “удвоение размерности” – пространство дискретных аналитических функций оказывается “вдвое больше”, чем можно было бы ожидать исходя из непрерывного аналога. Формально это выражается, например, в том, что пространство дискретных аналитических функций, растущих не быстрее многочлена степени k ,

которое естественно принять за аналог многочленов степени $\leq k$, имеет комплексную размерность $2k + 2$, а не $k + 1$. Кроме того, на пространстве всех дискретных аналитических функций появляется антилинейная инволюция, аналога которой нет в непрерывном случае. Для дискретизации (1) эта инволюция имеет вид $f(m, n) \mapsto (-1)^{m+n} \overline{f(m, n)}$, а для (2) – вид $f(m, n) \mapsto \mathbf{i}^{m-n} \overline{f(m, n)}$.

На сегодняшний день дискретизация (1) находит много приложений для аппроксимации аналитических функций, а также в теории вероятностей и математической физике [9], [10]. Она обобщена в [11] на ромбические решетки (т.е. такие, в которых диагонали базисной ячейки ортогональны), а в более поздних работах [9], [12]–[16] на изорадиальные графы и римановы поверхности, для чего последние разбиваются на четырехугольники. Отметим, что впервые комбинаторика таких разбиений изучалась в работах Н. П. Долбилина, М. И. Штогина и М. А. Штанько [17], [18] в связи с задачами математической физики.

Отметим также, что теория дискретных гармонических функций, которая тесно связана с дискретизацией (1), изучалась, начиная с работы Люстерника [19] в связи с приложениями к решению задачи Дирихле.

В настоящей работе мы совсем не касаемся принципиально иного, “нелинейного”, подхода к дискретизации комплексного анализа, связанного с упаковками кругов и предложенного У. Тёрстоном в [20]. Обзор теорий такого типа см. в [21].

1.2. Новый подход к дискретизации. В работах [2], [3] С. П. Новиков обратил внимание на то, что для построения дискретного аналога преобразования Лапласа естественнее перейти от квадратной к правильной треугольной решетке, т.е. решетке, базисные сдвиги которой происходят вдоль векторов сторон правильного треугольника.

Эти идеи развивались в работах [4], [5], где изучались обобщения на более высокие размерности и симплициальные комплексы и было введено понятие дискретной аффинной связности. Оно связано с решением уравнений вида $(Q\psi)(p) = \sum_{p \in \sigma} a_{\sigma,p} \psi(p) = 0$, где ψ – функция на вершинах симплициального комплекса, $a_{\sigma,p}$ – набор коэффициентов связности, ассоциированных с парами (σ, p) , в которых σ – симплекс старшей размерности, а p – его вершина.

В [1] обнаружено, что возникающие в этой теории операторы для триангулированных поверхностей обладают рядом свойств, аналогичных свойствам операторов комплексного дифференцирования $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial \bar{z}$.

А именно, пусть M – произвольная ориентированная поверхность с фиксированной триангуляцией T , которая обладает раскраской вершин в три цвета такой, что никакие две вершины одного цвета не соединены ребром. Треугольники такой триангуляции допускают шахматную раскраску. Пусть такая раскраска фиксирована.

Обозначим через V пространство вещественнозначных функций на множестве вершин триангуляции T , через W пространство функций на множестве белых треугольников и через B пространство функций на множестве черных треугольников.

Определим операторы $Q_w: V \rightarrow W$ и $Q_b: V \rightarrow B$ следующим образом. Для белого треугольника t с вершинами p_1, p_2, p_3 положим $(Q_w\psi)(t) = \psi(p_1) + \psi(p_2) + \psi(p_3)$, и аналогично для черных треугольников и оператора Q_b .

Как показано в [1], пара операторов Q_w и Q_b обладает рядом общих свойств с операторами $\partial/\partial z$ и $\partial/\bar{z}$. Мы коротко остановимся на этих свойствах.

ТЕОРЕМА 1. *Если поверхность M связна и замкнута, то ядро каждого из операторов Q_w и Q_b двумерно, причем $\ker Q_w = \ker Q_b$. Пересечение $\ker Q_w \cap \ker Q_b$ двумерно для любой связной поверхности M .*

Таким образом, пересечение H_0 ядер операторов Q_w и Q_b служит аналогом пространства постоянных функций и совпадает с каждым из ядер, если поверхность замкнута. Пространство $H = \ker Q_b$ мы считаем аналогом пространства голоморфных функций на M .

В случае компактных поверхностей с краем имеет место аналог принципа максимума. Чтобы его сформулировать, введем отображение $\psi \mapsto \hat{\psi}$, которое “голоморфной” функции $\psi \in H$ ставит в соответствие отображение $\hat{\psi}$ из множества черных треугольников в двумерное пространство “констант” H_0 следующим образом. Если t – черный треугольник, то $\hat{\psi}(t)$ есть функция из H_0 , которая на вершинах треугольника t совпадает с ψ (она единственна).

ТЕОРЕМА 2 (принцип максимума). *Для любой функции $\psi \in H$ образы всех черных треугольников при отображении $\hat{\psi}$ содержатся в выпуклой оболочке образов черных треугольников, имеющих непустое пересечение с границей ∂M .*

Если M – это плоскость $\mathbb{R}^2$, разбитая на правильные треугольники, то пространства V, W и B можно отождествить так, что операторы Q_b и Q_w становятся взаимно сопряженными друг другу и действуют из V в V . При этом множество вершин есть правильная треугольная решетка, и операторы Q_b и Q_w можно записать через ее базисные сдвиги T_1, T_2 :

$$Q_b = 1 + T_1 + T_2, \quad Q_w = Q_b^+ = 1 + T_1^{-1} + T_2^{-1}.$$

Считая эти операторы аналогами $\partial/\partial \bar{z}$ и $\partial/\partial z$, естественно определить пространство многочленов степени $\leq k$ как множество решений системы

$$Q_b\psi = 0, \quad Q_w^{k+1}\psi = 0.$$

Подчеркнем, что все коэффициенты операторов и значения функций считаются вещественными. Как следствие, пространство многочленов оказывается “правильной” размерности, однако пространство дискретных аналитических функций оказывается определенным только над $\mathbb{R}$.

Основной результат данной работы состоит во введении на большом подпространстве дискретных аналитических функций комплексной структуры, которая, как показано ниже, определяется однозначно с точностью до сопряжения требованием инвариантности относительно группы сдвигов решетки.

Кроме того, ниже обсуждаются другие известные фундаментальные свойства данной дискретизации, а также их обобщения на случай произвольных решеток.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [22] ставится задача нахождения дискретного аналога функций z^n на плоскости Лобачевского, разбитой на правильные треугольники с углом π/k при вершине, $k \geq 4$. В этом случае ситуация принципиально отличается от случая евклидовой плоскости: множество вершин триангуляции не образует решетку $\mathbb{Z}^2$, а аналогами z^n должны быть ограниченные функции. В настоящий момент данный вопрос не решен.

1.3. Общие треугольная и четырехугольная дискретизации условий Коши–Римана. Введем обобщения разностных уравнений (1) и (2) на случай произвольной, не обязательно квадратной, решетки.

Пусть $\mathbb{L}$ – решетка в $\mathbb{C}$ с фиксированным базисом τ_1, τ_2 . Точка $(m, n) \in \mathbb{L}$ имеет комплексную координату

$$z(m, n) = m\tau_1 + n\tau_2.$$

Для нас будет играть роль только отношение τ_2/τ_1 , которое мы будем называть *параметром* решетки и обозначать через τ .

Уравнения (1) и (2) естественно обобщаются следующим образом.

Треугольной дискретизацией условий Коши–Римана называется разностное уравнение

$$\frac{f(m+1, n) - f(m, n)}{z(m+1, n) - z(m, n)} = \frac{f(m, n+1) - f(m, n)}{z(m, n+1) - z(m, n)},$$

или, что эквивалентно,

$$f(m, n) - \frac{\tau}{\tau-1} f(m+1, n) + \frac{1}{\tau-1} f(m, n+1) = 0. \quad (3)$$

Под *четыреугольной дискретизацией условий Коши–Римана* мы понимаем следующее уравнение:

$$\frac{f(m+1, n+1) - f(m, n)}{z(m+1, n+1) - z(m, n)} = \frac{f(m, n+1) - f(m+1, n)}{z(m, n+1) - z(m+1, n)},$$

или, что эквивалентно,

$$f(m+1, n+1) - f(m, n) - \frac{\tau+1}{\tau-1} (f(m, n+1) - f(m+1, n)) = 0. \quad (4)$$

Ниже мы рассмотрим всевозможные треугольные дискретизации и четырехугольные дискретизации для ромбических решеток. В этих случаях калибровочным преобразованием можно сделать все коэффициенты вещественными. Дискретные аналоги аналитических функций тогда естественно определить как *вещественнозначные* решения соответствующих уравнений. Для случая правильной треугольной решетки мы, разумеется, получим упомянутую выше конструкцию из работы [1].

Отметим, что вещественная форма для дискретного оператора Коши–Римана появляется в работе Даффина [8], но не используется там для определения дискретных аналитических функций как вещественнозначных в соответствующей калибровке.

2. Дискретизация на правильной треугольной решетке

2.1. Дискретные аналитические функции и многочлены. Итак, пусть сначала $\mathbb{L}_\Delta \cong \mathbb{Z}^2$ – правильная треугольная решетка в $\mathbb{C}$, т. е. решетка с параметром $\tau = (1 + i\sqrt{3})/2$. Треугольная дискретизация условий Коши–Римана (3) превращается в уравнение

$$f(m, n) + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} f(m+1, n) + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} f(m, n+1) = 0. \quad (5)$$

Калибровочным преобразованием

$$f(m, n) \mapsto \tilde{f}(m, n) = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^{m-n} f(m, n)$$

оно приводится к уравнению с вещественными коэффициентами:

$$\tilde{f}(m, n) + \tilde{f}(m+1, n) + \tilde{f}(m, n+1) = 0, \quad (6)$$

которое и положено в основу определения дискретной аналитической функции в работе [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Дискретной аналитической (голоморфной) функцией треугольного типа на $\mathbb{L}_\Delta$ называются вещественнозначные решения f разностного уравнения (6).*

В дальнейшем мы опускаем слова “треугольного типа”, так как в этом разделе рассматривается только треугольная дискретизация.

Таким образом, роль оператора Коши–Римана $\partial/\partial\bar{z}$ играет оператор

$$Q = 1 + T_1 + T_2.$$

Пространство $\ker Q$ всех дискретных аналитических функций будем обозначать через $\mathcal{A}$.

В качестве аналога оператора $\partial/\partial\bar{z}$ (точнее, $-\partial/\partial\bar{z}$, но это здесь не играет роли) естественно было бы взять формально сопряженный оператор $Q^+ = 1 + T_1^{-1} + T_2^{-1}$. Однако по ряду причин здесь нам будет удобнее вместо него работать с оператором

$$D = T_1 T_2 Q^+ = T_1 + T_2 + T_1 T_2,$$

степени которого имеют то же ядро, что и степени оператора Q^+ . Классы функций, которые мы будем рассматривать, при этой замене сохраняются. Взяв D в качестве аналога $\partial/\partial\bar{z}$, естественно дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Дискретным голоморфным многочленом (треугольного типа) степени k на решетке $\mathbb{L}_\Delta$ называется дискретная голоморфная функция f , для которой*

$$D^{k+1}f = 0, \quad D^k f \neq 0.$$

Это определение введено в работе [1], где доказано следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пространство $\mathcal{P}_k$ всех дискретных голоморфных многочленов степени не выше k имеет над $\mathbb{R}$ размерность $2k + 2$.*

Заметим, что $\mathcal{P}_k$ определено пока только как вещественное пространство.

2.2. Умножение на $\mathbf{i}$.

ТЕОРЕМА 3. На пространстве $\mathcal{P} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{P}_k$ всех дискретных голоморфных многочленов существует оператор $\mathfrak{J}$, коммутирующий со сдвигами T_1, T_2 , квадрат которого равен -1 . Такой оператор единственен с точностью до знака.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем существование. Имеет место тождество

$$(T_2 - T_1)^2 = (T_1 + T_2 + 3)Q - 3 - 4D.$$

Для ограничения на пространство $\mathcal{P}$ получаем:

$$(T_2 - T_1)^2|_{\mathcal{P}} = -3\left(1 + \frac{4}{3}D\right)|_{\mathcal{P}}.$$

Оператор D нильпотентен на каждом подпространстве $\mathcal{P}_k$, поэтому можно определить оператор $(1 + (4/3)D)^{-1/2}|_{\mathcal{P}_k}$, разложив это выражение в формальный ряд по D и отбросив члены порядка выше k . Тогда оператор

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_2 - T_1)\left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2}|_{\mathcal{P}} \quad (7)$$

обладает нужными свойствами. Действительно, на каждом подпространстве $\mathcal{P}_k$ его можно записать как разностный оператор с постоянными коэффициентами, поэтому он коммутирует с базисными сдвигами. По построению $\mathfrak{J}^2 = -1$.

Теперь докажем единственность. Для этого будем рассматривать $\mathcal{P}$ как комплексное векторное пространство с оператором (7) в качестве комплексной структуры. Пусть $\mathfrak{J}'$ – другой оператор, удовлетворяющий условиям теоремы.

Так как $\mathfrak{J}'$ коммутирует с базисными сдвигами, он коммутирует также с $\mathfrak{J}$, т. е. является линейным оператором над $\mathbb{C}$. Из равенства $\mathfrak{J}'^2 = -1$ следует, что все пространство $\mathcal{P}$ распадается в прямую сумму двух собственных подпространств, отвечающих собственным значениям $\mathbf{i}$ и $-\mathbf{i}$. Нам остается показать, что одно из этих подпространств нулевое, а другое – все $\mathcal{P}$.

Оператор $\mathfrak{J}'$ коммутирует с D , поэтому каждое собственное подпространство для $\mathfrak{J}'$ инвариантно относительно D . Поскольку оператор D понижает степень многочлена на единицу, то в любом нетривиальном собственном подпространстве оператора $\mathfrak{J}'$ должен найтись ненулевой вектор из $\mathcal{P}_0 = \ker D$. Но ядро $\ker D$ двумерно над $\mathbb{R}$ и, следовательно, одномерно над $\mathbb{C}$. Теорема доказана.

В дальнейшем мы фиксируем оператор (7) в качестве умножения на $\mathbf{i}$ в $\mathcal{P}$. Этот оператор “нелокальный”, но для каждого k ограничение $\mathfrak{J}$ на подпространство $\mathcal{P}_k$ можно записать как разностный оператор с постоянными коэффициентами. Например,

$$\mathfrak{J}|_{\mathcal{P}_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}(T_2 - T_1)|_{\mathcal{P}}, \quad \mathfrak{J}|_{\mathcal{P}_1} = \frac{1}{3\sqrt{3}}(T_2 - T_1 + T_1T_2^{-1} - T_2^{-1} + T_1^{-1} - T_1^{-1}T_2).$$

В разделе 3 мы значительно расширим область определения оператора $\mathfrak{J}$.

2.3. Умножение на z . В работе [8] для дискретизации четырехугольного типа на квадратной решетке Даффин вводит оператор “умножения на z ”, действующий в пространстве всех дискретных аналитических функций. Такой оператор есть и в нашем случае, он имеет вид

$$Z = mT_2 - nT_1, \quad (Zf)(m, n) = mf(m, n+1) - nf(m+1, n).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. (a) Оператор Z сохраняет пространство $\mathcal{A}$ дискретных аналитических функций на $\mathbb{L}_\Delta$.

(b) Если f – дискретный голоморфный многочлен, то Zf – также дискретный голоморфный многочлен, причем $\deg(Zf) = \deg f + 1$.

(c) Оператор Z в пространстве дискретных голоморфных многочленов $\mathcal{P}$ линеен над $\mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Утверждение следует из того, что Z коммутирует с Q , что легко проверяется.

(b) Простая проверка дает

$$[D, Z] = T_1T_2(T_2 - T_1) = (1 + D - Q)(T_2 - T_1). \quad (8)$$

Это оператор с постоянными коэффициентами, следовательно, он сохраняет подпространство $\mathcal{P}$ и может быть там записан в виде

$$[D, Z]|_{\mathcal{P}} = \sqrt{3}\mathfrak{I}(1 + D)\left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{1/2}\Big|_{\mathcal{P}}.$$

Положим

$$\tilde{Z} = -\frac{1}{\sqrt{3}}Z\mathfrak{I}(1 + D)^{-1}\left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2}\Big|_{\mathcal{P}}.$$

Этот оператор определен на $\mathcal{P}$, но мы пока не доказали, что его образ содержится в $\mathcal{P}$. Имеет место соотношение

$$[D, \tilde{Z}]|_{\mathcal{P}} = 1. \quad (9)$$

Возьмем произвольный базис $f_0, g_0 \in \mathcal{P}_0$ над $\mathbb{R}$ и положим

$$f_{k+1} = \tilde{Z}f_k, \quad g_{k+1} = \tilde{Z}g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из (9) по индукции получаем

$$Df_k = kf_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следуют соотношения $f_k, g_k \in \mathcal{P}_k$, $\deg f_k = \deg g_k = k$, а также линейная независимость всех функций f_k, g_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Из соображений размерности функции $f_0, g_0, \dots, f_k, g_k$ образуют базис в $\mathcal{P}_k$, и, значит, $\tilde{Z}\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_{k+1}$, причем $\tilde{Z}(\mathcal{P}_k \setminus \mathcal{P}_{k-1}) \subset \mathcal{P}_{k+1} \setminus \mathcal{P}_k$. Оператор $(\mathfrak{I}(1 + D)^{-1}(1 + (4/3)D)^{-1/2})|_{\mathcal{P}_k}$ является изоморфизмом для каждого k , откуда следует искомое утверждение о Z .

(с) Для доказательства нужно проверить, что Z коммутирует с $\mathfrak{I}$. Мы уже знаем, что Z сохраняет $\mathscr{P}$, поэтому можем пользоваться формализмом степенных рядов по D .

Поскольку оператор $[D, Z]$ имеет постоянные коэффициенты, из (8) получаем:

$$\begin{aligned} [\mathfrak{I}, Z] &= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(T_2 - T_1) \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2}, Z \right] \Big|_{\mathscr{P}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left([T_2 - T_1, Z] \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2} - \frac{2}{3}(T_2 - T_1) \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-3/2} [D, Z] \right) \Big|_{\mathscr{P}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-2T_1T_2 \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3}(T_2 - T_1) \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-3/2} T_1T_2(T_2 - T_1) \right) \Big|_{\mathscr{P}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-2T_1T_2 \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2} - 2 \left(1 + \frac{4}{3}D\right)^{-1/2} T_1T_2\mathfrak{I}^2 \right) \Big|_{\mathscr{P}} = 0. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Отметим, что оператор комплексной структуры $\mathfrak{I}$ определен канонически (с точностью до знака) простым требованием коммутирования с базисными сдвигами, но задан пока только на пространстве дискретных голоморфных многочленов. Операторы же D и Z определены для всех дискретных голоморфных функций, но выбор их не является каноническим и не выдерживает, например, поворота плоскости на $2\pi/3$, сохраняющего решетку $\mathbb{L}_{\Delta}$. Тем не менее пространства дискретных аналитических функций и многочленов при таком повороте сохраняются.

2.4. Базис в пространстве многочленов и экспонента. Существует несколько способов строить дискретный аналог базиса $1, z, z^2, \dots$ в пространстве многочленов. К сожалению, различные “естественные” подходы к построению такого аналога выдают разные ответы.

Даффин в [8] строит “псевдостепени” $z^{(i)}$ для дискретизации на квадратной решетке, исходя из аналога интегрирования вдоль пути. Функция $z^{(k+1)}$ получается из $z^{(k)}$ взятием “первообразной” (и соответствующей нормировкой). При этом операция взятия первообразной не допускает однозначно определенной обратной операции – аналога дифференцирования $\partial/\partial z$. “Дифференцирование” в этой теории имеет ту же степень неоднозначности, что и взятие первообразной.

В работе [1] в пространстве дискретных голоморфных многочленов вводится базис, исходя из соображения, что аналог z^n должен иметь “нуль большой кратности”, которым является большой треугольник, целиком заполненный нулями. При этом не удастся сделать этот треугольник симметричным относительно поворотов решетки на $2\pi/3$, а также написать явные общие формулы.

Для целей настоящей работы мы воспользуемся самым простым и в то же время универсальным рецептом получения явных формул для базиса в пространстве $\mathscr{P}$, заимствованным из [23] (некоторые элементы метода есть уже в работах Айзекса и Даффина для квадратных дискретизаций).

Определим аналитические функции $\lambda(\kappa)$ и $\mu(\kappa)$ в круге $|\kappa| < 3/4$ из уравнений

$$1 + \lambda(\kappa) + \mu(\kappa) = 0, \quad \lambda(\kappa) + \mu(\kappa) + \lambda(\kappa)\mu(\kappa) = \kappa, \quad \lambda(0) = e^{2\pi i/3}.$$

Явный вид их таков:

$$\lambda(\kappa) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{3}\kappa}, \quad \mu(\kappa) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\sqrt{1 + \frac{4}{3}\kappa}.$$

Положим $E(m, n; \kappa) = \lambda(\kappa)^m \mu(\kappa)^n$ и определим вещественнозначные функции $p_i, q_i, i = 0, 1, 2, \dots$, на решетке $\mathbb{L}_\Delta$, исходя из разложения $E(m, n; \kappa)$ в ряд по κ :

$$E(m, n; \kappa) = \sum_{i=0}^{\infty} (p_i(m, n) + \mathbf{i} q_i(m, n)) \frac{\kappa^i}{i!},$$

$$p_i(m, n) + \mathbf{i} q_i(m, n) = \left. \frac{\partial^i}{\partial \kappa^i} E(m, n; \kappa) \right|_{\kappa=0}.$$

Легко видеть, что p_i и q_i являются вещественной и мнимой частями функции вида

$$P_i(m, n) e^{2\pi \mathbf{i}(m-n)/3},$$

где P_i – некоторый многочлен степени i с комплексными коэффициентами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Функции $p_i, q_i, i = 0, 1, 2, \dots$, образуют базис над $\mathbb{R}$ пространства $\mathcal{P}$ дискретных голоморфных многочленов. Операторы D и $\mathfrak{I}$ записываются в этом базисе следующим образом:*

$$Dp_i = i p_{i-1}, \quad Dq_i = i q_{i-1}, \quad \mathfrak{I}p_i = q_i, \quad \mathfrak{I}q_i = -p_i. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению имеем

$$T_1 E(m, n; \kappa) = \lambda(\kappa) E(m, n; \kappa), \quad T_2 E(m, n; \kappa) = \mu(\kappa) E(m, n; \kappa),$$

откуда следует, что

$$(QE)(m, n; \kappa) = 0, \quad (DE)(m, n; \kappa) = \kappa E(m, n; \kappa).$$

Это означает, что функции p_i, q_i дискретные голоморфные, а оператор D действует на них так, как указано в (10).

Рассматривая функцию $E(m, n; \kappa)$ как ряд по κ с коэффициентами в $\mathcal{P}$, можно применить к ней оператор $\mathfrak{I}$:

$$(\mathfrak{I}E)(m, n; \kappa) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mu(\kappa) - \lambda(\kappa)) \left(1 + \frac{4}{3}\kappa\right)^{-1/2} E(m, n; \kappa) = -\mathbf{i} E(m, n; \kappa).$$

Отсюда вытекают два последних равенства в (10). Предложение доказано.

2.5. Формула Коши и обобщенная теорема Лиувилля. В дискретном случае имеет место полный аналог следующей обобщенной теоремы Лиувилля.

ТЕОРЕМА 4. *Если дискретная голоморфная функция f растет не быстрее многочлена степени k , т. е. $|f(m, n)| < C_1 + C_2(m^2 + n^2)^{k/2}$, где C_1 и C_2 – некоторые константы, то она является дискретным голоморфным многочленом степени $\leq k$.*

Доказательство также полностью аналогично непрерывному случаю, достаточно доказать аналог интегральной формулы Коши и построить правильный аналог ядра Коши $1/z$ (функции Грина для Q). Для четырехугольной дискретизации на квадратной решетке это сделал уже Даффин в [8]. Для треугольной дискретизации на правильной треугольной решетке аналог формулы Коши указан в [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть функция $G: \mathbb{L}_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$(QG)(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (m, n) = (0, 0), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

Пусть $f: \mathbb{L}_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – дискретная голоморфная функция, а $\Omega \subset \mathbb{C}$ – некоторая ограниченная область. Тогда для любой внутренней точки $(m, n) \in \Omega$ имеет место равенство

$$f(m, n) = \sum_{(m', n') \sim \partial\Omega} (Q\hat{f})(m', n') G(m - m', n - n'), \quad (12)$$

где $\hat{f}$ обозначает функцию, совпадающую с f внутри Ω и равную нулю вне Ω , а запись $(m', n') \sim \partial\Omega$ означает, что точка (m', n') расположена возле границы области, а именно так, что треугольник с вершинами (m', n') , $(m' + 1, n')$ и $(m', n' + 1)$ пересекается с $\partial\Omega$.

П. Г. Гриневич и Р. Г. Новиков в [23] заметили следующее обстоятельство, упущенное в [1], где в качестве G использовалась быстро растущая функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Существует ровно одно ограниченное решение уравнения (11). Оно задается формулой

$$G(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(mx+ny)}}{1 + e^{ix} + e^{iy}} dx dy. \quad (13)$$

Эта функция G убывает на бесконечности как $O(1/\sqrt{m^2 + n^2})$. Кроме того, для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ функция $Q^k G$ убывает на бесконечности как $O((m^2 + n^2)^{-(k+1)/2})$.

Отсюда, как указано в [23], следует теорема 4.

3. Треугольная дискретизация на произвольной решетке

Приведенные выше результаты для правильной треугольной решетки переносятся без принципиальных изменений на произвольную решетку. Мы будем обозначать через $\mathbb{L}^{abc}$ некоторую решетку, базисный треугольник которой име-

ет длины сторон a , b , c . Разумеется, для нас играют роль только отношения a/c и b/c . Углы базисного треугольника, противолежащие сторонам a , b , c , обозначим через α , β , γ соответственно (см. рис. 1).

Рис. 1. Решетка $\mathbb{L}^{abc}$

Треугольная дискретизация (3) условий Коши–Римана выглядит для $\mathbb{L}^{abc}$ следующим образом:

$$af(m, n) - be^{-i\gamma}f(m+1, n) - ce^{i\beta}f(m, n+1) = 0.$$

После унитарного калибровочного преобразования

$$f(m, n) \mapsto \tilde{f}(m, n) = (-1)^{m+n} e^{i(\beta n - \gamma m)} f(m, n)$$

получаем уравнение с вещественными коэффициентами:

$$a\tilde{f}(m, n) + b\tilde{f}(m+1, n) + c\tilde{f}(m, n+1) = 0. \quad (14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дискретной аналитической (голоморфной) функцией (треугольного типа) на $\mathbb{L}^{abc}$ будем называть вещественнозначные решения $\tilde{f}$ разностного уравнения (14).

Мы используем ту же систему обозначений, что и в предыдущем разделе, добавляя индекс “ abc ”, чтобы показать зависимость от геометрии решетки. В частности, $\mathcal{A}^{abc}$ обозначает пространство дискретных голоморфных функций, а $\mathcal{P}^{abc} \subset \mathcal{A}^{abc}$ – подпространство дискретных голоморфных многочленов. Аналогии операторов $\partial/\partial\bar{z}$ и $\partial/\partial z$ в данном случае таковы:

$$Q^{abc} = 1 + \frac{b}{a}T_1 + \frac{c}{a}T_2, \quad D^{abc} = \frac{c}{a}T_1 + \frac{b}{a}T_2 + T_1T_2.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для произвольной решетки $\mathbb{L}^{abc}$ верны все результаты раздела 2 с заменой D на D^{abc} , Q на Q^{abc} и т.д. Операторы $\mathfrak{I}$ и Z обобщаются следующим образом:

$$\mathfrak{I}^{abc} = \frac{1}{\sin \alpha} ((\cos \gamma)T_2 - (\cos \beta)T_1) \left(1 + \frac{D^{abc}}{\sin \beta \sin \gamma} \right)^{-1/2} \Big|_{\mathcal{P}^{abc}}, \quad (15)$$

$$Z^{abc} = \frac{c}{a}mT_2 - \frac{b}{a}nT_1, \quad (16)$$

а экспоненциальная функция $E(m, n; \kappa)$ и функция Грина $G^{abc}(m, n)$ для Q^{abc} обобщаются так:

$$\begin{aligned} E^{abc}(m, n; \kappa) &= \left(-\cos \gamma + \mathbf{i} \sin \gamma \sqrt{1 + \frac{\kappa}{\sin \beta \sin \gamma}} \right)^m \\ &\quad \times \left(-\cos \beta - \mathbf{i} \sin \beta \sqrt{1 + \frac{\kappa}{\sin \beta \sin \gamma}} \right)^n, \end{aligned} \quad (17)$$

$$G^{abc}(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathbf{i}(mx+ny)}}{1 + (b/a)e^{\mathbf{i}x} + (c/a)e^{\mathbf{i}y}} dx dy. \quad (18)$$

Мы опускаем доказательство, которое не содержит ничего содержательно нового по сравнению со случаем правильной треугольной решетки.

Функции сбалансированного роста. Здесь мы снова вернемся к правильной треугольной решетке $\mathbb{L}_{\Delta} = \mathbb{L}^{111}$.

Обозначим через Λ^{uv} оператор умножения на функцию $u^m v^n$:

$$\Lambda^{uv} f(m, n) = u^m v^n f(m, n).$$

Легко видеть, что

$$Q\Lambda^{uv} = \Lambda^{uv}Q^{1uv},$$

откуда сразу вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любых $a, b, c > 0$, удовлетворяющих неравенствам треугольника, ограничение оператора Λ^{uv} , где $u = b/a$, $v = c/a$, на $\mathcal{A}^{abc}$ есть изоморфизм из $\mathcal{A}^{abc}$ в $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{111}$.

Таким образом, пространства дискретных голоморфных функций на решетках с различной геометрией можно отождествить друг с другом. Но при этом пространства дискретных голоморфных многочленов не отождествляются, так как

$$D\Lambda^{uv} \neq \Lambda^{uv}D^{1uv}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пространства $\mathcal{Q}^{uv} = \Lambda^{uv}(\mathcal{P}^{1uv})$ при всевозможных $u, v > 0$, для которых тройка $(1, u, v)$ удовлетворяет неравенствам треугольника, образуют прямую сумму в $\mathcal{A}$.

Пусть тройка $(1, u, v)$ удовлетворяет неравенствам треугольника. Функция $f \in \mathcal{A}$ принадлежит подпространству $\mathcal{Q}^{uv}$ тогда и только тогда, когда

найдутся $k \in \mathbb{N}$ и $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ такие, что для всех $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ выполнено неравенство

$$|f(m, n)| < C_1 + C_2(m^2 + n^2)^{k/2} u^m v^n.$$

(Такие функции мы будем называть функциями сбалансированного роста.)

Каждое из подпространств $\mathcal{Q}^{uv}$ инвариантно относительно D и Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые два утверждения следуют из того, что пространство $\mathcal{P}^{1uv}$ состоит из всех дискретных голоморфных функций на $\mathbb{L}^{1uv}$ полиномиального роста. Функции из $\mathcal{Q}^{uv}$ для различных пар (u, v) имеют экспоненциальный рост с различными основаниями, что влечет их независимость.

Инвариантность относительно D следует из того, что D имеет постоянные коэффициенты. Любой оператор с постоянными коэффициентами, очевидно, сохраняет $\mathcal{P}^{1uv}$ и коммутирует с Λ^{uv} , а значит, сохраняет и $\mathcal{Q}^{uv} = \Lambda^{uv}(\mathcal{P}^{1uv})$.

Наконец, инвариантность $\mathcal{Q}^{uv}$ относительно Z следует из того, что при изоморфизме Λ^{uv} оператор Z^{1uv} переходит в Z :

$$Z\Lambda^{uv} = \Lambda^{uv}Z^{1uv},$$

а подпространство $\mathcal{P}^{1uv}$ инвариантно относительно Z^{1uv} . Предложение доказано.

Мы показали, что на каждом подпространстве $\mathcal{Q}^{uv} \subset \mathcal{A}$ функций сбалансированного роста оператор умножения на $\mathbf{i}$ определяется канонически с точностью до знака требованием коммутирования с базисными сдвигами. Имеются непрерывные семейства функций, параметры (u, v) которых меняются произвольным образом в пределах области допустимых значений, причем эта область стягиваема. Поэтому, выбрав знак для оператора умножения на $\mathbf{i}$ в одном из $\mathcal{Q}^{uv}$, мы можем однозначно продолжить этот выбор на остальные подпространства из соображений непрерывности.

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. В подпространстве

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{u,v} \mathcal{Q}^{uv} \subset \mathcal{A},$$

порожденном всеми дискретными аналитическими функциями сбалансированного роста, существует, и притом единственный с точностью до знака, оператор $\mathfrak{I}$, обладающий свойствами:

- 1) $\mathfrak{I}$ коммутирует с базисными сдвигами решетки;
- 2) $\mathfrak{I}$ сохраняет каждое из подпространств $\mathcal{Q}^{uv}$;
- 3) если $f_t(m, n)$ – непрерывно зависящая от параметра t функция сбалансированного роста, то $\mathfrak{I}f_t$ также непрерывно зависит от t .

Операторы $D = T_1 + T_1 + T_1 T_2$ и $Z = m T_2 - n T_1$ сохраняют подпространство $\mathcal{Q}$ и являются $\mathbb{C}$ -линейными на нем, если умножение на $\mathbf{i}$ задается оператором $\mathfrak{I}$.

Совокупность функций вида

$$\varphi_k(m, n; u, v) = u^m v^n \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^k}{\partial \kappa^k} E^{1uv}(m, n; \kappa) \right) \Big|_{\kappa=0},$$

где $k \geq 0$, тройка $(1, u, v)$ удовлетворяет неравенствам треугольника, а E^{1uv} задается формулой (17), является базисом пространства $\mathcal{Q}$ над $\mathbb{C}$, причем

$$D\varphi_k(m, n; u, v) = k\varphi_{k-1}(m, n; u, v),$$

$$Z\varphi_k(m, n; u, v) = \sum_{i=0}^{k+1} a_{ki}\varphi_i(m, n; u, v), \quad a_{k,k+1} \neq 0,$$

где a_{ij} – некоторые комплексные коэффициенты, умножение на которые понимается в смысле комплексной структуры, заданной оператором $\mathfrak{I}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функции сбалансированного роста по определению имеют вид $g(m, n)e^{\ell(m, n)}$, где $g(m, n)$ – функция, ограниченная многочленом, а $\ell(m, n)$ – линейная функция. При этом допустимые значения для коэффициентов функции ℓ пробегает внутренность области, которая в терминологии, предложенной в [24], называется амемой, отвечающей многочлену $1 + z + w$ (см. рис. 2).

Рис. 2. Область допустимых значений для параметров u, v функции сбалансированного роста

Класс функций сбалансированного роста инвариантен относительно поворота решетки $\mathbb{L}_\Delta$ на $2\pi/3$, но не инвариантен относительно поворота на $\pi/3$.

4. Четырехугольная дискретизация на ромбической решетке

Для четырехугольной дискретизации (4) условий Коши–Римана вещественная калибровка, аналогичная (14), возможна, только если параметр решетки τ равен единице по абсолютной величине. Такие решетки называются *ромбическими*, так как фундаментальная ячейка имеет вид ромба.

В случае $|\tau| = 1$ величина $(\tau + 1)/(\tau - 1)$ чисто мнимая. Введем обозначение

$$\delta = \mathbf{i} \frac{\tau + 1}{\tau - 1} \in \mathbb{R}.$$

Через $\mathbb{L}^\delta$ будем обозначать соответствующую ромбическую решетку. Уравнение (4) запишется в виде

$$f(m, n) + i\delta f(m+1, n) - i\delta f(m, n+1) - f(m+1, n+1) = 0.$$

Сделав калибровочное преобразование $f(m, n) \mapsto i^{m-n}f$, мы приходим к уравнению с вещественными коэффициентами:

$$f(m, n) + \delta f(m+1, n) + \delta f(m, n+1) - f(m+1, n+1) = 0. \quad (19)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вещественнозначная функция на $\mathbb{L}^\delta$ называется *дискретной голоморфной функцией четырехугольного типа*, если она является решением разностного уравнения (19).

Далее речь пойдет только о четырехугольном типе дискретных голоморфных функций, поэтому указание типа мы опускаем. Аналогами операторов Коши–Римана и дифференцирования для функций на $\mathbb{L}^\delta$ будут

$$Q^\delta = 1 + \delta(T_1 + T_2) - T_1T_2 \quad \text{и} \quad D^\delta = -1 + \delta(T_1 + T_2) + T_1T_2 = T_1T_2(Q^\delta)^+$$

соответственно. В качестве аналога оператора Z мы возьмем

$$Z^\delta = m(\delta T_1 + 1) - n(\delta T_2 + 1).$$

Этот оператор не коммутирует с Q^δ , как было в случае треугольной дискретизации, но выполнено соотношение

$$Q^\delta Z^\delta = (Z^\delta + \delta(T_1 - T_2))Q^\delta,$$

из которого следует, что Z^δ сохраняет пространство $\mathcal{A}^\delta$ дискретных голоморфных функций на $\mathbb{L}^\delta$.

В отличие от треугольного случая операторы Λ^{uv} не задают теперь изоморфизмы между пространствами дискретных голоморфных функций на ромбических решетках с разными геометриями (разными δ). Однако для каждой решетки $\mathbb{L}^\delta$ имеет место аналог теоремы 5, который мы сейчас сформулируем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Функция f на $\mathbb{L}^\delta$ будет называться *функцией δ -сбалансированного роста*, если найдутся $k \in \mathbb{N}$ и $C_1, C_2, u, v > 0$ такие, что

- 1) существует четырехугольник с длинами сторон $1, u\delta, v\delta, uv$;
- 2) для всех $(m, n) \in \mathbb{L}^\delta$ выполнено неравенство

$$f(m, n) < C_1 + C_2(m^2 + n^2)^{k/2} u^m v^n. \quad (20)$$

Пространство δ -сбалансированных дискретных аналитических функций на $\mathbb{L}^\delta$, удовлетворяющих (20) для фиксированных u и v , будем обозначать через $\mathcal{Q}^{\delta uv}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество допустимых значений для параметров $\log u, \log v$ функции δ -сбалансированного роста образует внутренность амебы, соответствующей многочлену $1 + \delta(z + w) - zw$ (см. рис. 3).

ТЕОРЕМА 6. При каждом фиксированном $\delta > 0$ подпространства $\mathcal{Q}^{\delta uv}$ функций сбалансированного роста при всевозможных допустимых парах (u, v) образуют прямую сумму в пространстве $\mathcal{A}^\delta$.

Рис. 3. Область допустимых значений для параметров u, v функции δ -сбалансированного роста при $\delta = 1.5$

В подпространстве

$$\mathcal{Q}^\delta = \bigoplus_{u,v} \mathcal{Q}^{\delta uv} \subset \mathcal{A}^\delta,$$

порожденном всеми дискретными аналитическими функциями δ -сбалансированного роста, существует, и притом единственный с точностью до знака, оператор $\mathfrak{I}^\delta$, обладающий свойствами:

- 1) $\mathfrak{I}^\delta$ коммутирует с базисными сдвигами решетки;
- 2) $\mathfrak{I}^\delta$ сохраняет каждое из подпространств $\mathcal{Q}^{\delta uv}$;
- 3) если $f_t(m, n)$ – непрерывно зависящая от параметра t функция δ -сбалансированного роста, то $\mathfrak{I}^\delta f_t$ также непрерывно зависит от t .

Операторы $D^\delta = -1 + \delta(T_1 + T_2) + T_1 T_2$ и $Z^\delta = m(\delta T_1 + 1) - n(\delta T_2 + 1)$ сохраняют подпространство $\mathcal{Q}^\delta$ и являются $\mathbb{C}$ -линейными на нем, если умножение на $\mathbf{i}$ задается оператором $\mathfrak{I}^\delta$.

Совокупность функций вида

$$\psi_k(m, n; \delta, u, v) = u^m v^n \operatorname{Re} \left(\frac{\partial^k}{\partial \kappa^k} \lambda(\kappa; \delta, u, v)^m \mu(\kappa; \delta, u, v)^n \right) \Big|_{\kappa=0},$$

где $k \geq 0$, $(1, \delta u, \delta v, uv)$ – набор длин сторон некоторого четырехугольника, а $\lambda(\kappa; \delta, u, v)$, $\mu(\kappa; \delta, u, v)$ – аналитические функции в окрестности точки $\kappa = 0$, определяемые из системы

$$\begin{cases} 1 + \delta(u\lambda + v\mu) - uv\lambda\mu = 0, \\ -uv + \delta(v\lambda + u\mu) + \lambda\mu = \kappa, \\ \operatorname{Im} \lambda(0; \delta, u, v) > 0, \end{cases} \quad (21)$$

является базисом пространства $\mathcal{Q}^\delta$ над $\mathbb{C}$, причем

$$\begin{aligned} D\psi_k(m, n; \delta, u, v) &= k\psi_{k-1}(m, n; \delta, u, v), \\ Z\psi_k(m, n; \delta, u, v) &= \sum_{i=0}^{k+1} b_{ki}\psi_i(m, n; \delta, u, v), \quad b_{k,k+1} \neq 0, \end{aligned}$$

где $b_{ij} = b_{ij}(\delta, u, v)$ – некоторые комплексные коэффициенты, умножение на которые понимается в смысле комплексной структуры, заданной оператором $\mathcal{I}^\delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение полностью следует схеме доказательства аналогичных утверждений для треугольной дискретизации. Мы напомним кратко основные этапы и дадим явные формулы для использующихся в доказательстве операторов и функций, которые отличаются от треугольного случая.

Пусть a, b, c, d – длины сторон некоторого четырехугольника на евклидовой плоскости. Тогда найдется с точностью до движения ровно один четырехугольник с длинами сторон a, b, d, c (в этом порядке), вписанный в окружность.

Рис. 4. Связь между параметрами $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \varphi, \theta$

Обозначим через α угол между диагоналями такого четырехугольника (любой из двух), через β и γ углы $\angle ac$ и $\angle ab$ соответственно, а через φ (θ) – угловой размер стороны a (соответственно d) для любого из концов противоположной стороны (см. рис. 4). Введем также обозначение

$$\sigma = \frac{\sin \varphi \sin \theta}{2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_k^{abcd}$ для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ пространство решений системы разностных уравнений

$$Q^{abcd}f = 0, \quad (D^{abcd})^{k+1}f = 0,$$

где

$$Q^{abcd} = 1 + \frac{b}{a}T_1 + \frac{c}{a}T_2 - \frac{d}{a}T_1T_2, \quad D^{abcd} = -\frac{d}{a} + \frac{c}{a}T_1 + \frac{b}{a}T_2 + T_1T_2,$$

через $\mathcal{P}^{abcd}$ объединение этих пространств по всем k , а через $\mathcal{A}^{abcd}$ – пространство всех решений уравнения $Q^{abcd}f = 0$.

В данном случае мы не интерпретируем $\mathcal{A}^{abcd}$ и $\mathcal{P}^{abcd}$ как пространства дискретных голоморфных функций или многочленов на некоторой решетке, но можем проделать с ними то же, что с аналогичными пространствами в случае треугольной дискретизации.

А именно, так же, как в треугольном случае, можно показать, что для всех $k \geq 0$ пространство $\mathcal{P}_k^{abcd}$ имеет над $\mathbb{R}$ размерность $2k + 2$. Для этого устанавливаются два факта:

- 1) пространство $\mathcal{P}_0^{abcd} = \ker Q^{abcd} \cap \ker D^{abcd}$ двумерно;
- 2) система уравнений $Q^{abcd}f = 0$, $D^{abcd}f = g$ разрешима относительно f тогда и только тогда, когда $Q^{abcd}g = 0$.

В построении оператора комплексной структуры $\mathcal{J}^{abcd}$ используется тождество

$$\begin{aligned} (T_2 + \cos \beta - \sigma(\sin \beta)D^{abcd})^2 = & -\sin^2 \beta (1 + 2\sigma(\operatorname{ctg} \theta)D^{abcd} - (\sigma D^{abcd})^2) \\ & + \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha \sin \gamma} ((\sin \varphi)T_2 + \sin(\beta + \varphi))Q^{abcd}, \end{aligned}$$

которое позволяет определить $\mathcal{J}^{abcd}$ на $\mathcal{P}^{abcd}$ формулой

$$\mathcal{J}^{abcd} = \frac{1}{\sin \beta} (T_2 + \cos \beta - \sigma(\sin \beta)D^{abcd}) (1 + 2\sigma(\operatorname{ctg} \theta)D^{abcd} - (\sigma D^{abcd})^2)^{-1/2}.$$

Эту формулу следует понимать так же, как в треугольном случае: нужно сначала разложить правую часть в ряд по D^{abcd} , а затем при ограничении на каждое $\mathcal{P}_k^{abcd}$ отбросить члены порядка больше k .

Если $\beta + \gamma \neq \pi$, то оператор $\mathcal{J}^{abcd}$ можно записать в более симметричном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{abcd} = & \frac{1}{\sin(\beta + \gamma)} ((\cos \gamma)T_2 - (\cos \beta)T_1 + \sigma(\sin(\gamma - \beta))D^{abcd}) \\ & \times (1 + 2\sigma(\operatorname{ctg} \theta)D^{abcd} - (\sigma D^{abcd})^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Доказательство единственности для $\mathcal{J}^{abcd}$ дословно повторяет аналогичное рассуждение для треугольного случая.

Для построения базиса в $\mathcal{P}^{abcd}$ используется экспоненциальная функция E^{abcd} , которая является решением системы $Q^{abcd}E^{abcd} = 0$, $D^{abcd}E^{abcd} = \kappa E^{abcd}$. Ее явный вид (определяемый однозначно с точностью до комплексного сопряжения и умножения на константу) таков:

$$\begin{aligned} E^{abcd}(m, n; \kappa) = & (-\cos \gamma + \sigma \kappa \sin \gamma + \mathbf{i} \sin \gamma \sqrt{1 + 2\sigma \kappa \operatorname{ctg} \theta - (\sigma \kappa)^2})^m \\ & \times (-\cos \beta + \sigma \kappa \sin \beta - \mathbf{i} \sin \beta \sqrt{1 + 2\sigma \kappa \operatorname{ctg} \theta - (\sigma \kappa)^2})^n. \end{aligned}$$

Для доказательства того, что $\mathcal{P}^{abcd}$ содержит все функции из $\mathcal{A}^{abcd}$ полиномиального роста, нужны формула Коши и убывающая на бесконечности функция Грина для Q^{abcd} . Формула Коши пишется так же, как в треугольном случае (см. (12)), с той лишь разницей, что сумма теперь берется по всем (m', n') , для которых ромб с вершинами (m', n') , $(m' + 1, n')$, $(m' + 1, n' + 1)$, $(m', n' + 1)$ пересекает $\partial\Omega$.

Функция Грина для Q^{abcd} строится классическим образом:

$$G^{abcd}(m, n) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(mx+ny)}}{1 + (b/a)e^{ix} + (c/a)e^{iy} - (d/a)e^{i(x+y)}} dx dy. \quad (22)$$

Для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ функция $(Q^{abcd})^k G^{abcd}$ убывает на бесконечности как $o((m^2 + n^2)^{-k/2})$. Это следует из того, что подынтегральная функция в

$$\begin{aligned} & (Q^{abcd})^k G^{abcd}(m, n; \kappa) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(mx+ny)} (- (d/a) + (c/a)e^{ix} + (b/a)e^{iy} + e^{i(x+y)})^k}{1 + (b/a)e^{ix} + (c/a)e^{iy} - (d/a)e^{i(x+y)}} dx dy \end{aligned}$$

имеет класс гладкости $C^{(k-1)}$ при $k > 0$ и интегрируема при $k = 0$.

Наконец, заметим, что имеет место равенство

$$Q^\delta \Lambda^{uv} = \Lambda^{uv} Q^{abcd}, \quad \text{где } a = 1, \quad b = u\delta, \quad c = v\delta, \quad d = uv,$$

из которого следует, что $\mathcal{Q}^{\delta uv} = \Lambda^{uv}(Q^{1, u\delta, v\delta, uv})$.

Дальнейшие рассуждения не содержат ничего нового по сравнению с треугольным случаем.

Список литературы

- [1] I. A. Dynnikov, S. P. Novikov, “Geometry of the triangle equation on two-manifolds”, *Mosc. Math. J.*, **3:2** (2003), 419–438.
- [2] S. P. Novikov, “Difference analogs of Laplace transformations and two-dimensional Toda lattices”, Appendix I in: S. P. Novikov, A. P. Veselov “Exactly solvable 2-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations”, *Solitons, geometry and topology: on the crossroads*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 124–126.
- [3] С. П. Новиков, “Алгебраические свойства двумерных разностных операторов”, *УМН*, **52:1**(313) (1997), 225–226; англ. пер.: S. P. Novikov, “Algebraic properties of two-dimensional difference operators”, *Russian Math. Surveys*, **52:1** (1997), 226–227.
- [4] И. А. Дынников, С. П. Новиков, “Преобразования Лапласа и симплициальные связности”, *УМН*, **52:6**(318) (1997), 157–158; англ. пер.: I. A. Dynnikov, S. P. Novikov, “Laplace transforms and simplicial connections”, *Russian Math. Surveys*, **52:6** (1997), 1294–1295.
- [5] С. П. Новиков, И. А. Дынников, “Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях”, *УМН*, **52:5**(317) (1997), 175–234; англ. пер.: S. P. Novikov, I. A. Dynnikov, “Discrete spectral symmetries of low-dimensional differential operators and difference operators on regular lattices and two-dimensional manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **52:5** (1997), 1057–1116.

- [6] J. Ferrand, “Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes”, *Bull. Sci. Math.* (2), **68** (1944), 152–180.
- [7] R. P. Isaacs, “A finite difference function theory”, *Univ. Nac. Tucumán. Revista A*, **2** (1941), 177–201.
- [8] R. J. Duffin, “Basic properties of discrete analytic functions”, *Duke Math. J.*, **23**:2 (1956), 335–363.
- [9] Ch. Mercat, “Discrete Riemann surfaces and the Ising model”, *Comm. Math. Phys.*, **218**:1 (2001), 177–216.
- [10] S. Smirnov, “Discrete complex analysis and probability”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2010 (ICM 2010)*, v. I (Hyderabad, India, August 19–27, 2010), Hindustan Book Agency, New Delhi, 2011, 595–621.
- [11] R. J. Duffin, “Potential theory on a rhombic lattice”, *J. Combin. Theory*, **5**:3 (1968), 258–272.
- [12] R. Kenyon, “The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs”, *Invent. Math.*, **150**:2 (2002), 409–439.
- [13] R. Kenyon, J.-M. Schlenker, “Rhombic embeddings of planar quad-graphs”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:9 (2005), 3443–3458.
- [14] Ch. Mercat, “Discrete Riemann surfaces”, *Handbook of Teichmüller theory*, v. I, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **11**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 541–575.
- [15] D. Chelkak, S. Smirnov, “Discrete complex analysis on isoradial graphs”, *Adv. Math.*, **228**:3 (2011), 1590–1630.
- [16] A. Bobenko, M. Skopenkov, “Discrete Riemann surfaces: linear discretization and its convergence”, 2012 (v2 – 2013), 27 pp., arXiv: 1210.0561.
- [17] Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, “Кубические подкомплексы в правильных решетках”, *Докл. АН СССР*, **291**:2 (1986), 277–279; англ. пер.: N. P. Dolbilin, M. A. Shtan’ko, M. I. Shtogrin, “Cubic subcomplexes in regular lattices”, *Soviet Math. Dokl.*, **34**:3 (1987), 467–469.
- [18] Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, “Квадрильяжи и параметризации решетчатых циклов”, *Топология и ее приложения*, Труды Международной топологической конференции (Баку, 3–8 октября 1987 г.), Тр. МИАН СССР, **193**, Наука, М., 1992, 108–114; англ. пер.: N. P. Dolbilin, M. A. Shtan’ko, M. I. Shtogrin, “Quadrillages and parametrizations of lattice cycles”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **193** (1993), 117–123.
- [19] L. Lusternik, “Über einige Anwendungen der direkten Methoden in Variationsrechnung”, *Матем. сб.*, **33**:2 (1926), 173–201.
- [20] W. P. Thurston, “Zippers and univalent functions”, *The Bieberbach conjecture* (West Lafayette, IN, 1985), Math. Surveys Monogr., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 185–197.
- [21] A. Bobenko, Ch. Mercat, Yu. B. Suris, “Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green’s function”, *J. Reine Angew. Math.*, **2005**:583 (2005), 117–161.
- [22] S. P. Novikov, “New discretization of complex analysis: the Euclidean and hyperbolic planes”, *Современные проблемы математики*, Сборник статей. К 75-летию Института, Тр. МИАН, **273**, МАИК, М., 2011, 257–270; англ. пер.: S. P. Novikov, “New discretization of complex analysis: the Euclidean and hyperbolic planes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **273** (2011), 238–251.

- [23] П. Г. Гриневич, Р. Г. Новиков, “Ядро Коши для DN-дискретного комплексного анализа Новикова–Дынникова на треугольной решетке”, *УМН*, **62**:4(376) (2007), 155–156; англ. пер.: P. G. Grinevich, R. G. Novikov, “The Cauchy kernel for the Novikov–Dynnikov DN-discrete complex analysis in triangular lattices”, *Russian Math. Surveys*, **62**:4 (2007), 799–801.
- [24] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994, x+523 pp.

Иван Алексеевич Дынников
(Ivan A. Dynnikov)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

E-mail: dynnikov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
18.09.2015