Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, В. Н. Дубинин, В. А. Калягин,
Б. С. Кашин, В. Н. Сорокин, С. П. Суетин, Д. Н. Ту-
ляков, Б. Н. Четверушкин, Е. М. Чирка, А. А. Шкали-
ков, Александр Иванович Аптекарев (к 60-летию со дня
рождения), *УМН*, 2015, том 70, выпуск 5, 183–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 18:33:06

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Александр Иванович Аптекарев

(к шестидесятилетию со дня рождения)

11 марта 2015 г. исполнилось 60 лет Александру Ивановичу Аптекареву – математику с многогранным талантом и замечательному человеку, специалисту в области комплексного анализа и прикладной математики, заведующему отделом Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, профессору механико-математического факультета МГУ.

Александр Иванович Аптекарев – автор фундаментальных результатов в теории приближения аналитических функций и асимптотической теории ортогональных многочленов, которые нашли применения в различных областях математики, таких как теория случайных матриц, диофантовы приближения, математическая физика, и получили международную известность и признание.

Александр Аптекарев родился в Ленинграде, а детство его прошло в Прибалтике. Отец был морским офицером, мать – врачом. По окончании службы в плавсоставе флота отец был направлен военпредом на радиозавод в г. Муром Владимирской области. Окончив в Муроме 8-й класс, в 1969 г. Александр был принят в специализированную физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. В 1971 г. он поступил на физический факультет МГУ.

С самого начала своего обучения в университете А. И. Аптекарев стремился к участию в научных исследованиях. Будучи студентом второго курса, он познакомился с Евгением Михайловичем Никишиным, в то время молодым доктором наук с мехмата МГУ. Научная работа под руководством такого выдающегося аналитика, лауреата премии Салема сформировала А. И. Аптекарева как ученого-математика и во многом определила его научную судьбу.

В 1977 г. А. И. Аптекарев поступил в аспирантуру механико-математического факультета МГУ, где продолжил заниматься под научным руководством Е. М. Никишина. Его кандидатская диссертация была посвящена сходимости рациональных аппроксимаций для целых функций. Специфика этой тематики заключается в следующем. В ситуациях общего положения полюсы рациональных приближений при увеличении порядка аппроксимации стремятся к особенностям приближаемой функции. Так, когда приближается целая функция, полюсы аппроксимантов уходят на

бесконечность. Однако в некоторых дефектных ситуациях они могут накапливаться в конечной части комплексной плоскости, нарушая сходимость. В первой опубликованной работе А. И. Аптекарева [1] изучалась сходимость строк таблицы аппроксимаций Паде для суммы экспоненциальных функций. А этой задаче легко смоделировать дефектную ситуацию. Действительно, пусть $f(z) := e^z + e^{\lambda z}$ и $\alpha = \arg(\lambda)$ есть число иррациональное. Тогда, используя явное выражение полюса a_n для аппроксиманта первой строки таблицы Паде функции f ,

$$a_n = (n+1) \frac{1 + \exp(2\pi i \alpha n)}{1 + \exp(2\pi i \alpha (n+1))},$$

можно выбрать подпоследовательность $\{n_i\}$ такую, что

$$a_{n_k} \simeq 2\pi(n_k+1) \frac{\|n_k \alpha - 1/2\|}{[2\sin(\pi\alpha) + o(1)]},$$

где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого. Теорема Гурвица–Лагранжа гласит, что для любого иррационального α существуют подпоследовательности $\{n_i\}$, по которым a_{n_i} не стремятся к бесконечности, причем размер множества расходимости будет зависеть от скорости приближения иррационального числа α рациональными.

Тем не менее в [1] для таблицы Паде функции $f(z) := \sum_{j=1}^k e^{\lambda_j z}$, $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}|$, $j = 1, \dots, k-1$, с несовпадающими показателями $|\lambda_1| = \dots = |\lambda_s| > |\lambda_{s+1}|$ А. И. Аптекарев доказал, что все строки таблицы с номерами, кратными числу s , равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ (независимо от арифметической структуры аргументов показателей λ_j). Для доказательства этой теоремы им были получены асимптотики определителей Адамара функции $f(z)$, что определило его дальнейший интерес к асимптотическому анализу.

После защиты А. И. Аптекаревым кандидатской диссертации в 1981 г. Е. М. Никишин предложил ему совместно исследовать связь асимптотической теории ортогональных многочленов и рациональных аппроксимаций с современными задачами спектрального анализа разностных операторов, такими как задача рассеяния, дискретные интегрируемые системы. В работе [2] они обобщили классическую теорему Бернштейна–Сегё об асимптотике ортогональных многочленов на случай многочленов с матричными коэффициентами и с помощью этого обобщения исследовали задачу рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля с матричными коэффициентами. К этому же циклу примыкает работа [3]. В 1986 г. после тяжелой болезни на 42-м году жизни Евгений Михайлович Никишин скончался, не только оставив после себя замечательные математические результаты, но и дав мощный творческий импульс своим ученикам, трое из которых стали докторами наук.

В 1988 г. А. И. Аптекарев опубликовал работу [4], составившую основу его докторской диссертации, защищенной в 1989 г. В этой работе построена теория сильных асимптотик многочленов, совместно ортогональных относительно пары мер, сосредоточенных на непересекающихся отрезках действительной оси. Таким образом, теорема Бернштейна–Сегё об асимптотике многочленов, ортогональных на отрезке, впервые была им перенесена на случай совместно ортогональных многочленов. Понятие совместной ортогональности относительно системы мер мотивировано обобщением знаменитой теоремы А. А. Маркова о сходимости рациональных аппроксимаций Паде марковской функции (т. е. преобразования Коши меры) на случай аппроксимаций Эрмита–Паде вектора марковских функций. Системы мер с непересекающимися носителями называют системами Анжелеско. Асимптотики распределения нулей (так называемые слабые асимптотики) для многочленов, совместно ортогональных относительно систем Анжелеско, были найдены А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым. Переход от распределения нулей к асимптотикам самих многочленов (так называемые

сильные асимптотики) потребовал от А. И. Аптекарева привлечения и разработки новых инструментов, таких как анализ и решение граничных задач на алгебраических римановых поверхностях, аппроксимация систем экстремальных задач в гильбертовых пространствах аналитических функций и ряд других новых подходов. Другой канонической в теории аппроксимаций Эрмита–Паде системой мер является система, введенная Е. М. Никишиным. Меры, образующие систему Никишина, имеют общий носитель, но на их плотности накладывается некоторое общее дополнительное условие. Теорема о сильной асимптотике многочленов, совместно ортогональных относительно систем Никишина, была доказана А. И. Аптекарёвым в 1999 г. в работе [10] (также см. [17] об асимптотике отношения этих многочленов). Этот цикл работ был продолжен в 2010 г. совместной работой с В. Г. Лысовым [24], в которой были получены сильные асимптотики совместно ортогональных многочленов и аппроксимаций Эрмита–Паде для системы марковских функций, генерируемых графами с циклами. Это наиболее общие на сегодня системы мер для корректного определения совместно ортогональных многочленов. Они включают в себя системы Анжелеско, Никишина, а также такие системы мер, когда носитель одной меры строго содержит в себе носитель другой. Для получения и доказательства этих асимптотик были привлечены современные средства асимптотического анализа, такие как факторизации матричных задач Римана–Гильберта для аналитических матриц-функций размерности выше 2.

Центральное место в научных достижениях А. И. Аптекарева занимает его работа [12], посвященная точной скорости наилучших рациональных аппроксимаций аналитических функций. Речь идет об асимптотическом поведении при $n \rightarrow \infty$ расстояния d_n в чебышёвской метрике на компакте E от функции f до множества $\mathcal{R}_n$ рациональных функций r порядка n :

$$d_n := d_n(f, E) := \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \left\{ \max_E |f - r| \right\}.$$

Современная теория этой классической проблематики развита А. А. Гончаром. В наиболее общих предположениях на E и f результат, описывающий показатель скорости рациональной аппроксимации

$$d := \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{1/(2n)},$$

получен в 1987 г. А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым. В работе Аптекарева [12] доказана общая теорема, уточняющая скорость приближения на промежутках (т. е. конечных или бесконечных отрезках) действительной оси для вещественно-симметричных аналитических функций. Речь идет о наличии и величине предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(\hat{\rho}_n, E)}{\alpha_n d^{2n}}, \quad \text{где } \alpha_n^{1/n} = 1 + o(1),$$

который называют точной константой приближения аналитической функции рациональными. Одним из замечательных приложений только что упомянутой теоремы Гончара и Рахманова явилось доказательство ими существования предела

$$d := d(e^{-x}, [0, \infty]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{1/(2n)}(e^{-x}, [0, \infty])$$

и его представление в виде $d = \sqrt{v}$, где v есть единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l v^l = \frac{1}{8}, \quad a_l := \left| \sum_{b|l} (-1)^b b \right|, \quad v = \frac{1}{9.2890254919208189 \dots}.$$

Оказалось, что эта константа встречалась еще в 1886 г. в трактате Альфена (Halphen) по эллиптическим функциям. В 1994 г. А. Магнус выдвинул гипотезу о том, что

$$\frac{d_n(e^{-x}, [0, \infty])}{d^{2n}} \rightarrow 2d \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. константа, уточняющая показатель скорости рациональных аппроксимаций экспоненты, опять связана с постоянной Альфена! Справедливость гипотезы Магнуса доказана А. И. Аптекаревым в 2002 г. в [12] как следствие общей теоремы о точных константах приближений аналитических функций рациональными. Говоря о технике работы [12], отметим, что в ней была доказана одна из первых общих теорем о сильной асимптотике многочленов $\{P_n(z) = z^n + \dots\}$, неэрмитово ортогональных относительно комплекснозначного аналитического веса $h(z)$:

$$\int_F P_n(z) z^\nu h(z) dz = 0, \quad h(z) := h_n(z) := e^{-2nQ(z)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

на контурах и дугах F в комплексной плоскости, находящихся в неустойчивом равновесии логарифмического потенциала в поле $\operatorname{Re} Q$.

Наряду с методами нахождения асимптотик последовательностей многочленов, определяемых соотношениями ортогональности (т. е. когда асимптотика описывается в терминах мер ортогональности), А. И. Аптекарев развивал асимптотическую теорию последовательностей многочленов, задаваемых рекуррентными соотношениями (трехчленными для ортогональных многочленов и высокого порядка для совместно ортогональных многочленов). В работе [5] было начато построение общей теории локальных асимптотик многочленов исходя из предельных свойств коэффициентов в определяющих многочлены рекуррентных соотношениях. Теория локальных асимптотик, а затем и глобальных (типа Планшереля–Ротаца) была успешно продвинута учеником Аптекарева – Д. Н. Туляковым. Последнее время они продолжают работать над этой тематикой совместно [27], [29]. Подход к сильным асимптотикам, связанный с рекуррентными соотношениями, имеет преимущества особенно в случае многочленов, ортогональных относительно дискретных мер [27], [30].

Полученные А. И. Аптекаревым результаты в аналитической теории рациональных аппроксимаций ортогональных и совместно ортогональных многочленов находят применение в различных областях математики: спектральной теории операторов и интегрируемых систем, теории специальных функций, теории чисел и случайных матриц. Отметим вкратце ряд работ Александра Ивановича по этим направлениям.

В цикле работ с В. А. Калягиным и другими [9], [11], [18], [22] и в работе [28] развит подход к спектральной теории несимметричных разностных операторов высокого порядка, основанный на теории аппроксимаций Эрмита–Паде. Идея подхода заключается в следующем. Пусть оператор в l_2 задается хессенберговой ленточной (с $p+2$ диагоналями) матрицей (частный случай – трехдиагональная матрица Якоби). Тогда если рассмотреть набор из p резольвентных функций вида $\langle R_z e_0, e_j \rangle$, где R_z есть оператор резольвенты, а e_j , $j = 0, \dots, p$, – векторы стандартного базиса в l_2 , то знаменатели совместных рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде для этого набора функций будут удовлетворять $(p+2)$ -членным рекуррентным соотношениям с коэффициентами из исходной хессенберговой матрицы. Это наблюдение позволяет подключить к спектральному анализу такого типа операторов глубоко развитую в последнее время аналитическую теорию аппроксимаций Эрмита–Паде и асимптотическую теорию ортогональных многочленов. Примером применения этого подхода является доказательство существования глобального решения для системы цепочек Богоявленского и процедура их интегрирования методом спектральной задачи.

В теории специальных функций большой интерес представляет цикл совместных работ с В. С. Буяровым и испанскими физиками (J. S. Dehesa и ряд других), посвященный явным выражениям и асимптотикам для энтропийных интегралов вероятностных плотностей, задаваемых ортогональными многочленами (см. [6], [21] – две статьи из этого цикла). Этот цикл работ мотивирован квантовой информатикой, а точнее, подсчетом и оценкой информационной энтропии (шенноновской и ряда других) для квантово-механических систем, собственные функции которых выражаются

через ортогональные многочлены Гегенбауэра, Лагерра, Эрмита и дискретные ортогональные многочленфы). Также отметим важные работы [7], [8], [13], посвященные классификации и описанию основных свойств обобщений классических ортогональных многочленов на случай многочленов, совместно ортогональных относительно наборов специальных весов.

В теории диофантовых приближений получил широкую известность результат о рациональных приближениях постоянной Эйлера $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$, генерируемых рекуррентными соотношениями. Сначала эти аппроксимации определялись А. И. Аптекаревым с помощью некоторой (опубликованной в [13]) системы специальных совместно ортогональных многочленов, обобщающей классические ортогональные многочлены Якоби и Лагерра. Численные эксперименты показывали тенденцию этих аппроксимаций к сходимости к постоянной Эйлера, но задача состояла в доказательстве теоремы сходимости этих аппроксимаций к постоянной Эйлера и в получении простых формул для их вычисления. Для решения этой задачи был развит метод рекуррентных соотношений аппроксимаций Эрмита–Паде, реализация которого потребовала серьезного анализа с использованием вычислительной техники. В [20] описано решение этой задачи, полученное А. И. Аптекаревым и его учениками Д. Н. Туляковым, А. И. Боголюбским, Д. В. Христофоровым и В. Г. Лысовым. В результате было найдено довольно простое четырехчленное рекуррентное соотношение с рациональными коэффициентами

$$(16n - 15)(n + 1)q_{n+1} = (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n - n(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + (16n + 1)n(n - 1)q_{n-2},$$

генерирующее из начальных условий $p_0 := 0$, $p_1 := 2$, $p_2 := 31/2$ и $q_0 := 1$, $q_1 := 3$, $q_2 := 25$ целые числа p_n , q_n такие, что

$$\frac{p_n}{q_n} - \gamma = (2\pi)e^{-2\sqrt{2n}}(1 + O(n^{-1/2})).$$

Тем самым, впервые для постоянной Эйлера получено явное представление в виде сходящейся векторной непрерывной дроби.

Работы [16], [23], [26] посвящены приложению асимптотической теории совместно ортогональных многочленов к современной теории случайных матричных процессов. В известной работе А. И. Аптекарева, П. В. Блехера и А. Э. Койэлаарса [16] рассмотрены матричные ансамбли с внешним источником, связанные с совместно ортогональными многочленами Эрмита. К примеру, матричные ансамбли, связанные с классическими многочленами Эрмита, суть знаменитые гауссовы унитарные ансамбли, предельная совместная плотность распределения вероятностей их собственные значений описывается полукруговым законом Вигнера. Случайные матричные ансамбли, связанные с совместно ортогональными многочленами, вызвали большой интерес (см. обзорную статью [25]).

Всего А. И. Аптекаревым опубликовано более ста работ по математике и прикладной математике.

По окончании аспирантуры механико-математического факультета МГУ в 1980 г. А. И. Аптекарев был распределен в Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР, в отдел Константина Ивановича Бабенко, где работает и по сей день (с 2003 г. в должности заведующего отделом). К. И. Бабенко был выдающимся математиком-аналитиком и вместе с тем руководителем многих прикладных проектов. Это оказало существенное влияние на формирование А. И. Аптекарева как исследователя. Работая в ИПМ им. М. В. Келдыша, он участвовал в работах по конструированию новых алгоритмов и решению задач газовой и гидродинамики, проводимых

в этом институте по заданию директивных органов, в связи с созданием новой техники. Он является одним из соавторов комплекса программ для расчета дозвукового и трансзвукового обтекания и программ численного конформного отображения. На высокопроизводительном вычислительном комплексе реализована модель процессов кристаллизации. Среди публикаций в открытой печати по этой тематике А. И. Аптекарева см. работы [14], [15], [19].

В 1986 г. Андрей Александрович Гончар пригласил А. И. Аптекарева участвовать в работе семинара по комплексному анализу в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, а в середине 1990-х годов вместе с Е. М. Чиркой быть соруководителем этого семинара. С 2014 г. этот семинар носит имя А. А. Гончара. Семинар является важной компонентой математической жизни нашей страны, продолжая славные традиции отечественной школы комплексного анализа, заложенные М. А. Лаврентьевым и М. В. Келдышем и развитые А. Г. Витушкиным и А. А. Гончаром, и в этом важную роль играют нынешние руководители семинара.

С 1986 г. Александр Иванович преподает на мехмате МГУ, в 2001 г. ему присвоено звание профессора по кафедре теории функций и функционального анализа. Пятеро его учеников защитили кандидатские диссертации. Александр Иванович был научным консультантом двух докторских диссертаций: В. А. Калягина и Д. Н. Тулякова.

А. И. Аптекарев руководил и продолжает руководить многими крупными исследовательскими проектами ИНТАС, РНФ и РФФИ. В 2011 г. он был награжден испанским исследовательским мегагрантом банка Сантандер “Catedrático de Excelencia Universidad Carlos III de Madrid”.

Он член редколлегии ряда международных математических журналов. В 2010 г. Александр Иванович был назначен директором Кабинета-музея М. В. Келдыша при Президиуме РАН.

От всей души поздравляем Александра Ивановича с юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, долгих лет жизни, новых научных успехов и счастья в личной жизни.

*В. М. Бухштабер, В. Н. Дубинин, В. А. Калягин,
Б. С. Кашин, В. Н. Сорокин, С. П. Суетин, В. Н. Туляков,
Б. Н. Четверушкин, Е. М. Чирка, А. А. Шкаликов*

Список цитируемых работ А. И. Аптекарева

- [1] А. И. Аптекарев, “Асимптотика определителей Адамара и сходимость строк аппроксимаций Паде для суммы экспонент”, *Матем. сб.*, **113(155)**:4(12) (1980), 520–537; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hadamard determinants and the convergence of rows of Padé approximants for sums of exponentials”, *Math. USSR-Sb.*, **41**:4 (1982), 427–441.
- [2] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, “Задача рассеяния для дискретного оператора Штурма–Лиувилля”, *Матем. сб.*, **121(163)**:3(7) (1983), 327–358; англ. пер.: A. I. Aptekarev, E. M. Nikishin, “The scattering problem for a discrete Sturm–Liouville operator”, *Math. USSR-Sb.*, **49**:2 (1984), 325–355.
- [3] А. И. Аптекарев, “Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Toda”, *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotic properties of polynomials orthogonal on a system of contours, and periodic motions of Toda lattices”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 233–260.
- [4] А. И. Аптекарев, “Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско”, *Матем. сб.*, **136(178)**:1(5) (1988), 56–84; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 57–84.

- [5] А. И. Аптекарев, “Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концов интервала ортогональности”, *Матем. сб.*, **183**:5 (1992), 43–62; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of orthogonal polynomials in a neighborhood of the endpoints of the interval of orthogonality”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:1 (1993), 35–50.
- [6] А. И. Аптекарев, В. С. Буяров, И. С. Дереза, “Асимптотическое поведение L^p -норм и энтропии для общих ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 3–30; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. S. Buyarov, I. S. Degeza, “Asymptotic behavior of the L^p -norms and the entropy for general orthogonal polynomials”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 373–395.
- [7] A. I. Aptekarev, F. Marcellán, I. A. Rocha, “Semiclassical multiple orthogonal polynomials and the properties of Jacobi–Bessel polynomials”, *J. Approx. Theory*, **90**:1 (1997), 117–146.
- [8] A. I. Aptekarev, “Multiple orthogonal polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **99**:1–2 (1998), 423–447.
- [9] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, “Complex rational approximation and difference operators”, Proceedings of the 3rd International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory, Vol. I, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **52** (1998), 3–21.
- [10] А. И. Аптекарев, “Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **190**:5 (1999), 3–44; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **190**:5 (1999), 631–669.
- [11] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, J. Van Iseghem, “The genetic sums’ representation for the moments of a system of Stieltjes functions and its application”, *Constr. Approx.*, **16**:4 (2000), 487–524.
- [12] А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
- [13] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914.
- [14] A. I. Aptekarev, È. P. Kazandjan, L. R. Volevich, “Numerical method of solving the direct and inverse problems of conformal mappings”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:3 (2004), 277–288.
- [15] A. I. Aptekarev, L. R. Volevich, “Some mathematical aspects of potential flow computation”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:3 (2004), 259–276.
- [16] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, A. B. J. Kuijlaars, “Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II”, *Comm. Math. Phys.*, **259**:2 (2005), 367–389.
- [17] А. И. Аптекарев, Г. Лопес Лагомасино, И. А. Роча, “Асимптотика отношения полиномов Эрмита–Паде для систем Никишина”, *Матем. сб.*, **196**:8 (2005), 3–20; англ. пер.: A. I. Aptekarev, G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “Ratio asymptotics of Hermite–Padé polynomials for Nikishin systems”, *Sb. Math.*, **196**:8 (2005), 1089–1107.
- [18] A. I. Aptekarev, V. Kalyagin, G. López Lagomasino, I. A. Rocha, “On the limit behaviour of recurrence coefficients for multiple orthogonal polynomials”, *J. Approx. Theory*, **139**:1–2 (2006), 346–370.
- [19] A. I. Aptekarev, Yu. G. Rykov, “On the variational representation of solutions to some quasilinear equations and systems of hyperbolic type on the basis of potential theory”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:1 (2006), 4–12.
- [20] А. И. Аптекарев (ред.), *Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения*, Сборник статей, Совр. пробл. матем., **9**, МИАН, М., 2007, 84 с.

- [21] A. I. Aptekarev, J. S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein, R. Yáñez, “Discrete entropies of orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:1 (2009), 93–119.
- [22] A. I. Aptekarev, V. A. Kalyagin, E. B. Saff, “Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials”, *Constr. Approx.*, **30**:2 (2009), 175–223.
- [23] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником”, *ТМФ*, **159**:1 (2009), 34–57; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Global eigenvalue distribution regime of random matrices with an anharmonic potential and an external source”, *Theoret. and Math. Phys.*, **159**:1 (2009), 448–468.
- [24] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [25] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [26] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.
- [27] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Асимптотики многочленов Мейкснера и ядер Кристоффеля–Дарбу”, Тр. ММО, **73**, МЦНМО, М., 2012, 87–132; англ. пер.: A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, “Asymptotics of Meixner polynomials and Christoffel–Darboux kernels”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2012**:1 (2012), 67–106.
- [28] A. I. Aptekarev, “Spectral problems of high-order recurrences”, *Spectral theory and differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **233**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 43–61.
- [29] A. Aptekarev, J. Arvesú, “Asymptotics for multiple Meixner polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, **411**:2 (2014), 485–505.
- [30] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Главный член асимптотики Планшереля–Ротаха для решений рекуррентных соотношений”, *Матем. сб.*, **205**:12 (2014), 17–40; англ. пер.: A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, “The leading term of the Plancherel–Rotach asymptotic formula for solutions of recurrence relations”, *Sb. Math.*, **205**:12 (2014), 1696–1719.