Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Т. Ильичев, Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед, *УМН*, 2015, том 70, выпуск 6, 85–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 10:54:36

УДК 532.59

Солитоноподобные структуры на поверхности раздела вода–лед

А. Т. Ильичев

В статье демонстрируется доказательство существования солитоноподобных решений полной системы уравнений, описывающей распространение волн в жидкости конечной глубины под ледяным покровом, отвечающих семействам уединенных волн разной природы на поверхности раздела вода–лед. Рассматривается плоскопараллельное движение в слое идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, характеристики которого удовлетворяют полной системе 2D-уравнений Эйлера. Ледяной покров моделируется упругой пластиной Кирхгофа–Лява и имеет значительную толщину, так что инерция пластины учитывается при формулировке модели. В уравнениях Эйлера присутствует дополнительное давление от упругой пластины, свободно плавающей на поверхности жидкости. Упомянутые семейства уединенных волн параметризованы скоростью распространения волны, и их существование доказано для скоростей, находящихся в окрестности критического значения скорости, отвечающего состоянию покоя. Уединенные волны, в свою очередь, отвечают от состояния покоя и находятся в некоторой его окрестности. Иными словами, доказано существование уединенных волн достаточно малой амплитуды на поверхности раздела вода–лед. Доказательство проводится при помощи проекции искомой системы уравнений на центральное многообразие и дальнейшего анализа конечномерной приведенной динамической системы на центральном многообразии.

Библиография: 84 названия.

Ключевые слова: ледяной покров, уединенная волна, бифуркация, замкнутый оператор, квазинормальные формы, центральное многообразие, резольвентные оценки.

DOI: 10.4213/rm9690

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	86
2. Теорема о центральном многообразии.....	91
3. Типы бифуркаций.....	94

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

© А. Т. Ильичев, 2015

4. Типы квазинормальных форм	96
4.1. Теорема о приведении к квазинормальной форме	96
4.2. Простой резонанс	97
4.3. Резонанс длинной и короткой волн	98
4.4. Резонанс 1:1	100
5. Типы солитоноподобных структур	104
5.1. Классические уединенные волны	104
5.2. Обобщенно-уединенные волны	106
5.3. Уединенные волновые пакеты	109
6. Уединенные волны на поверхности раздела вода–лед	111
6.1. Модель ледяного покрова	111
6.2. Основные уравнения, формулировка задачи	113
6.3. Бегущие волны	115
7. Заключение	128
8. Приложение	131
Список литературы	134

1. Введение

Моделируя ледяной покров упругой пластиной, Дж. Стокер в [1] рассмотрел линеаризованную задачу. Сходные задачи были рассмотрены в [2], [3]. В [4]–[7] ледяной покров моделировался при помощи однородного упругого слоя конечной толщины, что позволило учесть эффекты внутреннего деформирования, согласованные с волновыми движениями в жидкости. Используя разложение в ряды, Л. К. Форбс в [8], [9] показал, что для плоских периодических волн конечной амплитуды на поверхности раздела вода–лед значения давления в жидкости и упругого изгибающего момента пластины могут оказаться достаточными для того, чтобы разломить лед. Модельное уравнение, описывающее распространение длинных волн малой амплитуды под ледяным покровом, было впервые выведено в [10] (см. также [11]). В работе [12] рассматривалось волновое движение во вращающейся стратифицированной жидкости под ледяным покровом.

Волновое движение на поверхности слоя жидкости конечной глубины под ледяным покровом, индуцируемое мультиполями различных порядков, как в плоском, так и в пространственном случае изучено в [13]. Отдельно рассмотрены случаи импульсного источника, источника постоянной интенсивности и источника с интенсивностью, меняющейся по гармоническому закону. В [13] приводятся выражения для потенциала скорости в жидком слое и их асимптотика. В [14] найдены волны, возникающие под ледяным покровом в жидкости при различных импульсных воздействиях на него. Рассмотрены импульсный точечный источник в толще жидкости, удар по ледяному покрову, начальный импульс, сообщаемый поверхности жидкости, начальное смещение ледяного покрова. В [15] те же авторы обобщают постановки задач работы [14]. Плоская задача о возмущении ледяного покрова движущимся в жидкости диполем

рассмотрена в [16], [17], где найдена устанавливающаяся волна при длительном движении диполя и описан характер процесса ее установления.

Поверхностные волновые процессы под ледяным покровом представляют несомненный интерес (в последнее время все возрастающий в связи с усиливающейся актуальностью исследований Арктики) как с прикладной, так и с фундаментальной точки зрения. В прикладной области упомянутые процессы играют значительную роль в ледовой инженерии – науке, исследующей формирование и движение льдов и влияние ледяного покрова на инженерные сооружения (например, платформы и вышки на шельфе). В этих условиях изучение семейств свободных волн, распространяющихся под ледяным покровом, может служить своего рода детектором формирующихся природных волновых структур, характерных для рассматриваемых поверхностных эффектов. Так, например, при достаточно больших амплитудах подобные волны могут вызвать разлом ледяного покрова. И, хотя в данной статье рассматриваются волновые структуры, ответвляющиеся от нулевого состояния (волны малой безразмерной амплитуды), их размерная амплитуда может достигать значения порядка метров. Кроме того, указанные семейства могут быть продолжены по амплитуде при помощи применения численных методов. Следует отметить, что форма свободных поверхностных волн является, как правило, плоской (одномерной), не зависящей от трансверсального направления (длинные приливные волны, волны, набегающие на берег, и т. д.). Двумерную, не плоскую структуру волны формирует непрерывное воздействие (например, ветровое воздействие, источники на поверхности и в толще воды). Кроме того, заметим, что излагаемая в данной статье серия редукций предполагает ограниченность базовых направлений, т. е. волны должны быть с необходимостью периодичны по трансверсальному направлению, что существенно обедняет двумерную структуру поверхностных волн. Двумерные волновые движения изучались в [18]. При учете зависимости от дополнительного направления, наряду с обратимостью, возникает новая $SO(2)$ -симметрия (см., например, [19], [20]), что ведет к дополнительному упрощению нормальных форм, возникающих в результате более сложных резонансов, чем в плоском случае.

С чисто теоретической точки зрения описание форм волн на поверхности слоя жидкости конечной глубины под ледяным покровом, находящимся к тому же в изначально напряженном состоянии, обобщает знаменитые задачи о форме волн на свободной поверхности [21]–[23], поверхностных гравитационно-капиллярных волн (см., например, [24], [25]). Вообще, когда в качестве базовых рассматриваются полные уравнения Эйлера для жидкости, а не редуцированные уравнения типа уравнений Кортевега–де Фриза [26], доказательство существования семейств солитоноподобных решений традиционно представляло собой значительное достижение, и поэтому рассмотрение максимально общей задачи (каковой в данном случае является описание семейств солитоноподобных структур на поверхности жидкости под ледяным покровом) интересно и, по нашему мнению, может являться предметом предлагаемой работы.

В типичной для плоскопараллельных движений ситуации классические уединенные волны возникают как бифуркации из нулевого волнового числа спектра

линейных волн. Это означает, что существует такая ветвь дисперсионного соотношения, проходящая через 0, что ее график и график всех остальных ветвей лежат по одну сторону от касательной к графику этой ветви в нуле. Если же такой ветви не существует, то в случае общего положения классическая уединенная волна отсутствует. При этом в ряде случаев возможно образование нового объекта – обобщенно-уединенной волны, т.е. бегущей волны, подобной классической уединенной волне, но имеющей периодическую асимптотику на бесконечности. Еще один тип уединенной волны – уединенный волновой пакет – возникает в диспергирующих средах в результате так называемого резонанса 1:1 [27], [28], когда на дисперсионной кривой достигается равенство фазовой и групповой скоростей.

Классические уединенные волны в низшем приближении по малому параметру – амплитуде волны – имеют форму солитонов уравнения КдФ (в случае, когда нелинейность содержит квадратичные члены), которые являются динамически устойчивыми. В связи с этим факт устойчивости классических уединенных волн в случае общего положения представляется вполне естественным. Таким образом, следует ожидать, что локализованные возмущения одной полярности с рассматриваемыми классическими уединенными волнами (“горб” или “яма”) будут распадаться на эти волны. С другой стороны, процессы распада локализованных возмущений, сопровождающиеся излучением периодических или почти периодических волн, а также модуляционной неустойчивостью периодических волн (самофокусировкой) с волновыми числами, лежащими в окрестности резонансного, оказываются тесно связанными с наличием в рассматриваемой обратимой системе соответственно обобщенно-уединенных волн и уединенных волновых пакетов. Экспоненциально малая оценка для амплитуды периодической составляющей обобщенно-уединенных капиллярно-гравитационных волн приведена в работе [29]. Условие отсутствия периодической составляющей у обобщенно-уединенной волны в общем случае сформулировано [30]. Однако проверка этого условия представляет конструктивные трудности в каждом конкретном случае.

Кроме уединенных волн трех рассматриваемых типов известны еще так называемые “темные солитоны” (см., например, [31]) – не локализованные бегущие волны, образовавшиеся в результате нелинейного резонанса боры с периодической волной. Свое название эти волны получили из нелинейной оптики вследствие того, что интенсивность волны (интенсивность освещения) в окрестности точки симметрии минимальна. Темные солитоны являются “антиподом” уединенных волновых пакетов в том смысле, что их присутствие в системе отвечает случаю, когда несущие периодические волны в окрестности резонансного волнового числа являются модуляционно устойчивыми и самофокусировки не происходит.

В статье рассматриваются вопросы существования семейств солитоноподобных структур малой амплитуды, непосредственно примыкающих к состоянию покоя. Для справки отметим здесь кратко результаты исследования существования уединенных волн большой амплитуды (так называемые глобальные теории), которые, по нашему мнению, проливают мало света на физические про-

цессы, обусловленные особенностями эволюции локализованных возмущений и, как правило, связаны с решениями задачи о существовании специального типа решений, представляющей чисто математический интерес. Для поверхностных волн конечной амплитуды в тяжелой несжимаемой жидкости конечной глубины существование уединенных волн было доказано в [32], [33] при помощи теории положительных операторов для интегрального уравнения Некрасова [34]. В работе [35] авторы получили уединенные волны как предельную конфигурацию из кноидальных внутренних волн в непрерывно стратифицированной жидкости при стремлении периода к бесконечности, а в работе [36] доказали существование глобальной ветви уединенных волн в двуслойной жидкости. В работах [37], [38] при помощи асимптотических методов исследуются свойства уединенных волн большой амплитуды на поверхности идеальной жидкости. Отметим также работу [39], где рассматриваются свойства семейства поверхностных уединенных волн конечной амплитуды в присутствии поверхностного натяжения.

В данной работе представлены результаты о существовании семейств уединенных волн разных типов, ответвляющихся от состояния покоя на поверхности идеальной несжимаемой жидкости под ледяным покровом. Ледяной покров моделируется геометрически нелинейной упругой пластиной Кирхгофа–Лява, свободно плавающей на поверхности жидкости. Волновые процессы в жидкости описываются системой уравнений Эйлера с дополнительным поверхностным давлением, обусловленным наличием упругой пластины. Упомянутые семейства уединенных волн параметризованы скоростью распространения волны, и их существование доказано для скоростей, достаточно близких к критическому значению скорости, отвечающему состоянию покоя. Уединенные волны, в свою очередь, ответвляются от состояния покоя и находятся в некоторой его окрестности. Доказательство проводится при помощи проекции искомой системы уравнений на центральное многообразие и дальнейшего анализа конечномерной приведенной динамической системы на центральном многообразии.

Несмотря на то что исследуется конкретная задача, этот анализ обладает определенной общностью. Полученные результаты с качественной точки зрения основываются на некоторых общих свойствах целого класса обратимых задач и количественно определяются лишь небольшим числом параметров. Полностью аналогичные бифуркации возникают (и, следовательно, для анализа используются полностью аналогичные методы), например, в задачах описания волновых структур в β -плазме [40]–[42], длинных волн в двуслойной жидкости [43], поверхностных волновых структур в вертикально колеблющихся сосудах [44] (см. также [45]), неподвижных уединенных волн на стенках мембранной упругой трубы, заполненной жидкостью [46].

Инвариантность относительно преобразования Галилея в данном случае сводит поиск бегущих волн к решению стационарной задачи, которая описывается квазилинейной системой эллиптических уравнений. В рассматриваемом случае эти уравнения зависят от четырех безразмерных параметров λ , b , γ и c , где λ равно обратному квадрату числа Фруда, b является аналогом числа Бонда для капиллярных сил и определяется предварительным напряжением пластины,

параметр γ характеризует жесткость пластины на изгиб, а c – инерцию пластины.

Вековое уравнение в данном случае имеет вид

$$\sigma \cos \sigma - [\lambda - b\sigma^2 + \gamma\sigma^4] \sin \sigma = 0. \quad (1.1)$$

Это уравнение должно решаться для $\sigma \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – комплексная плоскость). Тот факт, что для каждого фиксированного набора значений параметров имеется лишь конечное число корней (1.1) на мнимой оси, а также то обстоятельство, что если σ – корень, то $-\sigma$ тоже есть корень, следуют из общих свойств основной системы уравнений. Так как возникновение волновых структур из состояния покоя будет обусловлено бифуркацией при критических значениях параметров, когда число чисто мнимых корней (1.1) изменяется, то тип этих структур будет общим для круга задач, обладающих в определенном смысле общими свойствами. Эти свойства определяются типами квазинормальных форм, рассмотренных в разделе 4. Вся разница между формами бегущих волн в таких задачах определяется количеством и значениями физических параметров задачи.

В целях замкнутости изложения и из-за ограниченности объема статьи мы не останавливаемся на естественных следствиях, обобщениях и других механических приложениях используемого метода редукции на центральное многообразие (см., например, [47]–[55]). За рамками работы также остались чрезвычайно важные вопросы о динамической устойчивости обсуждаемых солитоноподобных структур, так как спектральная теория операторов, определяемых при помощи полных уравнений Эйлера, насколько нам известно, в настоящее время технически недостаточно разработана. Следует отметить, что в длинноволновом малоамплитудном пределе устойчивость солитоноподобных решений соответствующих модельных уравнений обсуждалась, например, в работах [56]–[58].

В разделах 2–5 настоящей работы приводится математический аппарат, применяемый для нахождения и исследования солитоноподобных структур (см. [59]–[63]). В этих разделах с формальной точки зрения будут рассматриваться ограниченные решения бесконечномерных динамических систем уравнений, являющихся бифуркацией из состояния покоя системы в малой окрестности этого состояния. В разделе 6 излагается модель ледяного покрова в рамках теории классической геометрически нелинейной пластины, приведена самосогласованная система уравнений, описывающих изгибные колебания упругой пластины на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, изучаются свойства линейной части бесконечномерной динамической системы уравнений для бегущих волн. При помощи процедур, изложенных в предыдущих разделах, эта система сводится к конечномерным динамическим системам размерностей два и четыре в зависимости от линейных волновых резонансов в разных областях значений параметров. Будет показано, что в настоящем случае имеют место простой резонанс, резонанс длинной и короткой волн

и резонанс $1:1$, подробно описанные в разделе 4 настоящей работы. Далее рассмотрены решения системы уравнений в квазинормальной форме, описывающие уединенные волны в исходной задаче. В разделе 7 приводится обсуждение результатов. В разделе 8 дано доказательство теоремы о резольвентных оценках, выполнение которых необходимо для справедливости теоремы о центральном многообразии, которая разрешает понижение порядка в бесконечномерных динамических системах.

2. Теорема о центральном многообразии

Предполагается, что исследуемые системы уравнений в частных производных являются обратимыми, т. е. инвариантными относительно отражения времени и динамической координаты. Обратимость – естественное свойство задач, где направление распространения волн неограничено и не имеет предпочтительной ориентации и фиксированного начала координат.

В задаче должен присутствовать физический параметр бифуркации задачи v , в малой окрестности $\mu = v - v_0$ фиксированного значения v_0 которого, наряду с нулевым решением, базовая система уравнений имеет нетривиальное решение.

Далее рассматриваются системы уравнений, которые могут быть записаны в виде бесконечномерной динамической системы

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathcal{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(\mu, \mathbf{u}), \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(v_0), \quad \mathbf{F}(0, \mathbf{0}) = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{u}$ – неизвестная вектор-функция, $\mathcal{A}$ – линейный оператор, действующий в некотором гильбертовом пространстве X , а $\mathbf{F}(\mu, \mathbf{u})$ – нелинейная вектор-функция своих аргументов. Точка над функцией обозначает производную по неограниченной пространственной координате x , которая играет роль динамической переменной.

В настоящем разделе будет сформулирована и прокомментирована теорема о том, что при весьма общих предположениях ограниченные решения, находящиеся в окрестности нулевого решения, лежат на подмногообразии фазового пространства, имеющем конечную размерность. Эта размерность оказывается равной размерности векторного пространства X_0 , каноническим базисом которого служат собственные и присоединенные векторы, отвечающие мнимым собственным значениям оператора $\mathcal{A}$.

Предположим, что оператор $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ является замкнутым неограниченным оператором, действующим из области своего определения $D(\mathcal{A})$ в вещественное гильбертово пространство X , $D(\mathcal{A}) \subset X$. Пусть $\mathbf{F}: I \times D(\mathcal{A}) \rightarrow X$ – нелинейное отображение для всех $v \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{F}(\mu = v - v_0, \mathbf{u}) = O(\mu\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{u}\|^2)$, где $\|\cdot\|$ обозначает норму в X . Система уравнений (2.1) при $\mu = 0$ обладает нулевым решением $\mathbf{u} = 0$. Под редукцией будем подразумевать построение функции $\mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)$, $\mathbf{u}_0 \in X_0$, такой, что многообразие

$$M_\mu = \{(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)) \in X, \|\mathbf{u}_0\| < \varepsilon\}$$

является инвариантным многообразием динамической системы (2.1) и содержит все малые (μ предполагается малым) ограниченные решения этой системы. Инвариантное многообразие M_μ называется центральным многообразием.

Размерность пространства X_0 конечна, что эквивалентно конечности числа мнимых собственных значений (считая их кратность) оператора $\mathcal{A}$. Система уравнений (2.1) после проекции на пространство X_0 и дополнительное к нему в X принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_0 &= \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}_0(\mu, \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1), \\ \dot{\mathbf{u}}_1 &= \mathcal{A}_1 \mathbf{u}_1 + \mathbf{F}_1(\mu, \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1),\end{aligned}\tag{2.2}$$

где

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) \in X = X_0 \times X_1, \quad \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{X_0}, \quad \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{X_1 \cap D(\mathcal{A})}.$$

Сформулированные в этом разделе результаты означают, что до тех пор, пока сохраняется неравенство $\|\mathbf{u}_0\| < \varepsilon$, решение $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$ системы уравнений (2.2) принадлежит M_μ , т. е. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)$. Следовательно, множество всех малых ограниченных решений удовлетворяет конечномерной динамической системе уравнений

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \mathcal{A}_0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{f}_0(\mu, \mathbf{u}_0), \quad \mathbf{f}_0(\mu, \mathbf{u}_0) = \mathbf{F}_0(\mu, \mathbf{u}_0 + \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)).\tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) называются приведенными уравнениями.

Дадим строгие формулировки предположений, относящихся к (2.2).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ П1. Подпространство X_0 имеет конечную размерность. Собственные значения $\mathcal{A}_0$ являются чисто мнимыми.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ П2. Обозначим $Y = D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A}) \cap X_1$. Пространство Y также является гильбертовым. Существуют окрестности нуля $U \subset X_0$, $V \subset Y$, замкнутое подпространство $Z \subset X_1$ и целое число n такие, что

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1) \in C_b^n(I \times U \times V, X_0 \times Z),$$

где C_b^n обозначает пространство непрерывных и ограниченных вместе с n производными функций. Кроме того, найдется число $v_0 \in I$ такое, что

$$\mathbf{F}(\mu, \mathbf{0})|_{\mu=0} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{F}(\mu, \mathbf{0}) \Big|_{\mu=0}, \quad \mu = v - v_0.$$

КОММЕНТАРИЙ 1. Бесконечномерная составляющая Z пространства значений нелинейного отображения $\mathbf{F}$ для систем высокого порядка не обязана совпадать с пространством X_1 значений оператора $\mathcal{A}_1$ [64]. В приложениях, как правило, Z является пространством вектор-функций более низкой размерности, чем вектор-функции, составляющие пространство X_1 (т. е. столбец $\mathbf{F}_1(\mu, \mathbf{u})$, или, что то же самое, столбец $\mathbf{F}(\mu, \mathbf{u})$, имеет часть нулевых компонент).

КОММЕНТАРИЙ 2. Когда это необходимо, будет рассматриваться естественная комплексификация оператора $\mathcal{A}$ в пространстве $X \rightarrow X + iX$ и т. д., с сохранением обозначений.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ ПЗ. Существуют положительные константы a, b, c такие, что для всех $\varpi \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} \varpi| \leq c$, резольвента $\mathcal{A}_1$ удовлетворяет неравенствам

$$\|(\mathcal{A}_1 - \varpi)^{-1}\|_{X_1 \rightarrow X_1} \leq a, \quad (\text{R1})$$

$$\|(\mathcal{A}_1 - \varpi)^{-1}\|_{Z \rightarrow X_1} \leq \frac{b}{1 + |\varpi|}, \quad (\text{R2})$$

$$\|(\mathcal{A}_1 - \varpi)^{-2}\|_{Z \rightarrow X_1} \leq \frac{b}{1 + |\varpi|^2}. \quad (\text{R3})$$

В случае, когда выполняется (R2) для $Z = X_1$, достаточно иметь только эту оценку для всех чисто мнимых ϖ .

КОММЕНТАРИЙ 3. В приложениях удобно работать со следующими аналогами неравенств (R1)–(R3) для оператора $\mathcal{A}$.

ЛЕММА 1 [65]. *Существуют константы $\varkappa_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что для всех $\varkappa \in \mathbb{R}$, $\varkappa > \varkappa_0$, резольвентные оценки неравенств (R1)–(R3) эквивалентны оценкам ($\hat{Z} = X_0 \times Z$):*

$$\|(\mathcal{A} - i\varkappa)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq C, \quad (\text{R}'1)$$

$$\|(\mathcal{A} - i\varkappa)^{-1}\|_{\hat{Z} \rightarrow X} \leq \frac{C}{\varkappa}, \quad (\text{R}'2)$$

$$\|(\mathcal{A} - i\varkappa)^{-2}\|_{\hat{Z} \rightarrow X} \leq \frac{C}{\varkappa^2} \quad (\text{R}'3)$$

соответственно.

КОММЕНТАРИЙ 4. Свойства (R1)–(R3) ((R'1)–(R'3)), которые, очевидно, являются свойствами убывания резольвенты, достаточны для возможности обращения второго из уравнений (2.2), т.е. для существования ограниченного обратного оператора $\mathcal{B} = (\partial_x - \mathcal{A}_1)^{-1}$, $\mathcal{B}: C_{b,u}^0(\mathbb{R}, X_1) \rightarrow C_{b,u}^0(\mathbb{R}, Y)$, где $C_{b,u}^0$ обозначает пространство равномерно непрерывных и ограниченных функций. Эта возможность обеспечивает существование функции $\mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)$ (центрального многообразия M_μ). Существование $\mathcal{B}$ вытекает из свойства оптимальной регулярности оператора $\mathcal{A}$ [66], которое состоит в следующем.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_0 - \mathcal{A}_0 \mathbf{v}_0 &= \mathbf{g}_0(x), & \mathbf{v}_0 &\in X_0, & \mathbf{v}_0(0) &= \chi, \\ \dot{\mathbf{v}}_1 - \mathcal{A}_1 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{g}_1(x), & \mathbf{v}_1 &\in X_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Необходимо найти такое пространство $F(X)$ над $X = X_0 \times X_1$, чтобы для любых $(\chi, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) \in X_0 \times F(X_0 \times X_1)$ и $(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1) \in F(X_0 \times Z)$ уравнения (2.4) были единственным образом разрешимы и решение удовлетворяло включениям $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1) \in F(X_0 \times X_1)$ и $(\dot{\mathbf{v}}_0, \dot{\mathbf{v}}_1) \in F(X_0 \times X_1)$. Краеугольным камнем для доказательства разрешимости системы (2.4) является построение полугрупп операторов, определяемых следующим образом (см., например, [64]):

$$\begin{aligned} K_+(t) &= \exp(\mathcal{A}_1 t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} e^{zt} (z - \mathcal{A}_1)^{-1} dz, & t < 0, \\ K_-(t) &= \exp(\mathcal{A}_1 - t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} e^{zt} (z - \mathcal{A}_1)^{-1} dz, & t > 0, \end{aligned}$$

где Γ_+ – кривая, охватывающая спектр в полуплоскости $\operatorname{Re} \varpi > 0$ комплексного переменного ϖ , а Γ_- – кривая, охватывающая спектр в полуплоскости $\operatorname{Re} \varpi < 0$. В общем случае спектр оператора $\mathcal{A}_1$ по обе стороны мнимой оси неограничен, вследствие чего кривые $\Gamma_{\pm}$ уходят в бесконечность.

Формальное решение второго уравнения в (2.4) имеет вид

$$\mathbf{v}_1 = \int_{\mathbb{R}} K(t-s) \mathbf{g}_1(s) ds, \quad K(s) = \begin{cases} K_-(s), & s > 0, \\ -K_+(s), & s < 0. \end{cases}$$

Основная трудность при доказательстве оптимальной регулярности заключается в том, что $K(t)$ имеет особенность в точке $t = 0$. Эта трудность преодолена в работе [66], в которой доказана оптимальная регулярность $\mathcal{A}$, удовлетворяющего предположениям П1 и П3 при $F(X_0 \times X_1) = L_{\nu}^r(X_0 \times X_1)$, где

$$L_{\nu}^r(X) = \left\{ \mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow X, e^{-\nu|t|} \mathbf{f} \in L^r(X), \|\mathbf{f}\|_{L^r(X)} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|\mathbf{f}\|^r dt \right)^{1/r} \right\}$$

и $r \in (1, \infty)$.

Из оптимальной регулярности $\mathcal{A}$ следует существование центрального многообразия.

ТЕОРЕМА 1 (о центральном многообразии [65]). *Пусть выполнены предположения П1–П3. Тогда существуют окрестности $U' \subset U$, $V' \subset V$ и $I' \subset I$, а также функция*

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mu = v - v_0, \mathbf{u}_0) \in C_{\mathbf{b}}^{n-1}(I' \times U', V')$$

(n – из предположения П2), имеющая следующие свойства:

(i) множество

$$M_{\mu} = \{(\mathbf{u}_0, \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)) \in X_0 \times Y, \mathbf{u}_0 \in U'\}$$

является локальным интегральным многообразием системы (2.2) для $v \in I'$;

(ii) любое решение системы (2.2) для $v \in I'$, $(\mathbf{u}_0(x), \mathbf{u}_1(x)) \in U' \times V'$ при всех $x \in \mathbb{R}$ принадлежит M_{μ} ;

(iii) $\mathbf{h}(0, \mathbf{0}) = \partial_{\mathbf{u}_0} \mathbf{h}(0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$;

(iv) если $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_0 : X_0 \rightarrow X_0$, $\mathcal{R}_1 : X_1 \rightarrow X_1$ – линейные изометрии такие, что

$$\mathbf{F}_j(\mu, \mathcal{R}_0 \mathbf{u}_0, \mathcal{R}_1 \mathbf{u}_1) = -\mathcal{R}_j \mathbf{F}_j(\mu, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1), \quad \mathcal{A}_j \mathcal{R}_j = -\mathcal{R}_j \mathcal{A}_j, \quad j = 0, 1,$$

то $\mathbf{h}(\mu, \mathcal{R}_0 \mathbf{u}_0) = \mathcal{R}_1 \mathbf{h}(\mu, \mathbf{u}_0)$.

3. Типы бифуркаций

1. *Бифуркации из нулевого волнового числа.* Единственным собственным значением оператора $\mathcal{A}$, лежащим на мнимой оси, является двукратное нулевое собственное значение. При изменении v в окрестности v_0 собственные значения приходят с действительной оси и расходятся по мнимой. Классические

Рис. 1. Динамика собственных значений оператора $\mathcal{A}(v)$ на мнимой оси и приходящих на мнимую ось при изменении параметра μ для (а) бифуркации из нулевого волнового числа, (б) резонанса длинной и короткой волн, (с) бифуркации резонанса 1 : 1

удеиненные волны могут возникнуть при тех $v = v_0 + \mu$, $|\mu| \ll 1$, при которых пара собственных значений $\pm w$, $w > 0$, переходящих на мнимую ось при $\mu = 0$, еще лежит на действительной оси (рис. 1, (а)). Асимптотика уединенной волны на бесконечности определяется выражением

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{c}_0 \exp(\mp wx), \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где $\mathbf{c}_0$ – постоянный вектор.

2. *Бифуркация резонанса длинной и короткой волн.* Эта бифуркация соответствует линейному резонансу длинной волны и волны с конечным волновым числом, т.е. возможности распространения этих волн с одинаковыми фазовыми скоростями. В этом случае центральный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из двукратного нулевого собственного значения и пары простых сопряженных мнимых собственных значений $\pm iq$, $q > 0$. Движение собственных значений через нуль происходит аналогичным предыдущему случаю образом, пара мнимых собственных значений всегда остается на мнимой оси. Другая пара приходит с действительной оси и, пройдя через нуль при $v = v_0$ ($\mu = 0$), расходится по мнимой оси. Обобщенные уединенные волны, будучи продуктом нелинейного резонанса классической уединенной и периодической волн, могут возникнуть при тех $v = v_0 + \mu$, при которых на мнимой оси лежит лишь пара собственных значений (рис. 1, (б)). При этом асимптотика возникшей волны будет иметь вид

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{c}_0 \exp(\mp wx) + \mathbf{c}_1 \cos qx \pm \mathbf{c}_2 \sin qx, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

где $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ – постоянные векторы. Если $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$, то обобщенная уединенная волна представляет собой классическую уединенную волну. Ясно, однако, что равенство нулю этих постоянных величин представляет собой исключительный случай и в случае общего положения периодическая компонента присутствует в рассматриваемом решении системы (2.1). Тем не менее в ряде задач теории упругости, например в задачах, где имеют место резонансы волн на разных ветвях дисперсионной кривой, постоянные $\mathbf{c}_{1,2}$ становятся нулевыми и в системе

присутствуют обычные уединенные волны в качестве продукта рассматриваемой бифуркации (см., например, [67], [68]).

3. *Бифуркация резонанса 1 : 1.* Эта бифуркация соответствует резонансу, характеризующемуся совпадением фазовой и групповой скоростей волны с ненулевым волновым числом. В этом случае оператор $\mathcal{A}$ имеет две пары ненулевых кратных мнимых собственных значений. При изменении v в окрестности v_0 эти значения попарно приходят из комплексной плоскости на мнимую ось, а затем по ней расходятся. Уединенный волновой пакет, представляющий собой локализованную модулированную монохроматическую бегущую волну, может существовать при тех $v = v_0 + \mu$, при которых собственные значения $\pm w \pm iq$ еще не пришли на мнимую ось (рис. 1, (b)). Асимптотика уединенного волнового пакета имеет вид

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{c}_0 \exp(\mp wx) \cos qx, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

4. Типы квазинормальных форм

4.1. Теорема о приведении к квазинормальной форме. Теоретически, функция $\mathbf{h}$ может быть явно определена вплоть до произвольного алгебраического порядка по своим аргументам [60], [61]. Однако для нахождения решений приведенного уравнения (2.3) более удобным является использование теории нормальных форм для аппроксимации конечномерных динамических систем уравнений [63], [69].

В каноническом базисе конечномерного пространства X_0 (отождествляемого с $\mathbb{C}^m$) вектор-функция $\mathbf{u}_0$ представляется вектором в комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$, где m равно числу мнимых собственных значений оператора $\mathcal{A}$. В силу свойства обратимости число m всегда четное. Конечномерный оператор $\mathcal{A}_0$ в каноническом базисе представляется $(m \times m)$ -матрицей.

Приведенное уравнение, как и любая конечномерная динамическая система со свободными параметрами (или без них), может быть приближена единственным образом “наиболее простой” системой уравнений при условии, что решения этой системы остаются малыми. Строгая формулировка такова.

ТЕОРЕМА 2 (о приведении к квазинормальной форме [69]). *Для заданного $n \in \mathbb{N}$ из предположения П2 раздела 2, $n > 2$, существуют полиномиальные вектор-функции $\mathbf{T}(\mu, \alpha)$, $\mathbf{N}(\mu, \alpha)$ степени $n - 1$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: I' \times X_0 &\rightarrow X_0, & \mathbf{N}: I' \times X_0 &\rightarrow X_0, \\ \mathbf{T}(\mu, \mathbf{0})|_{\mu=0} &= D_{\alpha} \mathbf{T}(\mu, \mathbf{0})|_{\mu=0} = \mathbf{0}, & \mathbf{N}(\mu, \mathbf{0})|_{\mu=0} &= D_{\alpha} \mathbf{N}(\mu, \mathbf{0})|_{\mu=0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

такие, что преобразование

$$\mathbf{u}_0 = \alpha + \mathbf{T}(\mu, \alpha) \tag{4.1}$$

переводит (2.3) в уравнение

$$\frac{d}{dx} \alpha = \mathcal{A}_0 \alpha + \mathbf{N}(\mu, \alpha) + o((\mu + |\alpha|)^{n-1}) \tag{4.2}$$

для μ и $|\alpha|$, близких к нулю ($|\cdot|$ – любая норма в $\mathbb{C}^m$). Вектор-функция $\mathbf{N}(\mu, \alpha)$ удовлетворяет следующему уравнению (здесь и далее $*$ обозначает эрмитово сопряжение для операторов и матриц и комплексное сопряжение для векторов и скаляров):

$$\mathbf{N}(\mu, e^{t\mathcal{A}_0^*} \alpha) = e^{t\mathcal{A}_0^*} \mathbf{N}(\mu, \alpha) \quad (4.3)$$

для $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $\mathcal{R}_0 \mathbf{N}(\mu, \alpha) = -\mathbf{N}(\mu, \mathcal{R}_0 \alpha)$.

Через $D_{\mathbf{y}} \mathbf{z}$, где $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ – вектор-функции, обозначаем матрицу, каждая строка которой состоит из производных от соответствующей компоненты $\mathbf{z}$ по всем компонентам $\mathbf{y}$, расположенных в строке в порядке возрастания номеров компонент $\mathbf{y}$.

Квазинормальная форма приведенных уравнений (2.3) дается системой уравнений (4.2), где $o((\mu + |\alpha|)^{n-1})$ опускается:

$$\frac{d}{dx} \alpha = \mathcal{A}_0 \alpha + \mathbf{N}(\mu, \alpha). \quad (4.4)$$

КОММЕНТАРИЙ 1. В приложениях используется формула, которая получается дифференцированием уравнения (4.3) по t при $t = 0$:

$$\mathcal{A}_0^* \mathbf{N}(\mu, \alpha) - D_{\alpha} \mathbf{N}(\mu, \alpha) \mathcal{A}_0^* \alpha = 0. \quad (4.5)$$

КОММЕНТАРИЙ 2. Подставляя (4.1) в (2.3) и учитывая (4.4), получим уравнение для определения $\mathbf{T}$:

$$D_{\alpha} \mathbf{T}(\mu, \alpha) \mathcal{A}_0 \alpha - \mathcal{A}_0 \mathbf{T}(\mu, \alpha) = \mathbf{f}_0(\mu, \alpha) - \mathbf{N}(\mu, \alpha). \quad (4.6)$$

4.2. Простой резонанс. В рассматриваемом случае единственным мнимым собственным значением оператора $\mathcal{A}$ является двукратное нулевое собственное значение и размерность X_0 (а тем самым, и размерность центрального многообразия) равна двум. Канонический базис в X_0 состоит из собственного ϕ_0 и присоединенного ϕ_1 векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих нулевому собственному числу:

$$\mathcal{A} \phi_0 = 0, \quad \mathcal{A} \phi_1 = \phi_0.$$

Далее будем рассматривать только случай

$$\mathcal{R} \phi_0 = \phi_0.$$

Тогда из равенства $\mathcal{R} \mathcal{A} \phi_1 = \mathcal{R} \phi_0 = -\mathcal{A} \mathcal{R} \phi_1$ немедленно следует¹ равенство $\mathcal{R} \phi_1 = -\phi_1$ и, следовательно,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

¹Имеется другая возможность $\mathcal{R}_0 \phi_0 = -\phi_0$ (и, как следствие, $\mathcal{R}_0 \phi_1 = \phi_1$), приводящая к другой квазинормальной форме (неинтегрируемой). Однако содержательные физические примеры полей, обладающих такой симметрией, до сих пор неизвестны.

Оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный $\mathcal{A}$, имеет один собственный вектор ψ^1 и один присоединенный вектор ψ^0 :

$$\mathcal{A}^* \psi^1 = 0, \quad \mathcal{A}^* \psi^0 = \psi^1, \quad \langle \phi_i, \psi^j \rangle = \delta_i^j, \quad (4.7)$$

здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве X , а δ_i^j – символ Кронеккера.

При помощи векторов ψ^i , $i = 0, 1$, осуществляется проекция π_0 на центральное многообразие:

$$\mathbf{u}_0 = \pi_0 \mathbf{u} = \sum_{j=0}^1 \langle \mathbf{u}, \psi^j \rangle \phi_j.$$

Уравнение (2.3) в данном случае представляет собой динамическую систему второго порядка, $\mathbf{f}_0(\mu, \mathbf{u}_0)$ имеет компоненты $\langle \mathbf{F}, \psi^j \rangle$, $j = 0, 1$, и

$$\mathbf{N}(\alpha) = (N_1, N_2)^\top(\alpha), \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1)^\top(x).$$

Уравнение (4.5) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \partial_{\alpha_0} N_1 & \partial_{\alpha_1} N_1 \\ \partial_{\alpha_0} N_2 & \partial_{\alpha_1} N_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix},$$

и, значит, $\alpha_0 \partial_{\alpha_1} N_1 = 0$, а также $\alpha_0 \partial_{\alpha_1} N_2 = N_1$. Отсюда следует, что $N_1 = N_1(\alpha_0)$. Далее, воспользовавшись обратимостью $\mathbf{N}$: $\mathbf{N}(\mathcal{R}_0 \alpha) = -\mathcal{R}_0 \mathbf{N}(\alpha)$, получаем $N_1 = 0$, $N_2 = N_2(\alpha_0)$. Таким образом, уравнение (4.4) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= \alpha_1, \\ \dot{\alpha}_1 &= \Phi(\mu, \alpha_0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\Phi(\mu, \alpha_0) = \sum_{j=1}^2 c_j(\mu) \alpha_0^j + O(|\alpha_0|^3), \quad c_1(\mu) = c_1 \mu + o(\mu), \quad c_2(\mu) = c_2 + o(\mu),$$

а коэффициенты c_j вычисляются из уравнения (4.6), где $\mathbf{N} = (0, \Phi)^\top$. Система уравнений (4.8) имеет первый интеграл

$$\alpha_1^2 - \widehat{\Phi}(\mu, \alpha_0) = l_0, \quad 2\Phi = \partial_{\alpha_0} \widehat{\Phi}$$

и, следовательно, является интегрируемой.

4.3. Резонанс длинной и короткой волн. Центральная часть спектра оператора $\mathcal{A}$ состоит из нулевого собственного значения алгебраической кратности два и пары мнимых комплексно-сопряженных собственных значений $\pm iq$, $q > 0$. Канонический базис состоит из четырех векторов $\phi_0, \phi_1, \phi_+, \phi_-$ ($\phi_{0,1}$ – вещественные векторы, $\mathcal{A} \phi_0 = 0$, $\mathcal{A} \phi_1 = \phi_0$, $\mathcal{A} \phi_+ = iq \phi_+$, $\phi_- = \phi_+^*$). Будем по-прежнему полагать $\mathcal{R} \phi_0 = \phi_0$. Легко понять, что собственные векторы ϕ_+ и ϕ_- всегда можно выбрать так, чтобы $\mathcal{R} \phi_+ = \phi_-$. В самом деле, применяя к равенству $\mathcal{A} \phi_+ = iq \phi_+$ оператор изометрии $\mathcal{R}$, получим $\mathcal{A} \mathcal{R} \phi_+ = -iq \mathcal{R} \phi_+$,

откуда следует, что $\mathcal{R}\phi_+ = a\phi_-$, где $a = \exp(i\theta)$ (в силу нормировки (4.7) при $i, j = \pm$). Если $\theta \neq 0$, то в качестве ϕ_+ выберем $\tilde{\phi}_+ = \exp(-i\theta)\phi_+$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iq & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные и присоединенные векторы сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{A}^*\psi^1 = 0, \quad \mathcal{A}^*\psi^0 = \psi^1, \quad \mathcal{A}^*\psi^+ = -iq\psi^+, \quad \psi^- = \psi^{+*}$$

и подчиняются условиям нормировки (4.7) для $i, j = 0, 1, +, -$.

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{N}(\alpha) = (N_1, N_2, N_+, N_-)^\top(\alpha), \quad N_+(\alpha) = N_-^*(\alpha), \quad \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, z, z^*)^\top(x),$$

где $\alpha_{0,1}$ – вещественные функции. Система уравнений (4.5) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{D}N_1 &= 0, \\ \mathcal{D}N_2 &= N_1, \\ \mathcal{D}N_+ &= -iqN_+, \\ \mathcal{D}N_- &= iqN_-, \end{aligned}$$

а дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = \alpha_0 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - iqz \frac{\partial}{\partial z} + iqz^* \frac{\partial}{\partial z^*}.$$

Аналогично случаю простого резонанса получим $N_1 = 0$. Легко видеть, что величины

$$I_0 = \alpha_0, \quad K_0 = zz^*, \quad L = \alpha_0 \ln z + iq\alpha_1$$

являются тремя независимыми интегралами уравнения $\mathcal{D}N = 0$. Следовательно, функция, принадлежащая ядру $\mathcal{D}$, должна зависеть от этих величин. Покажем, что интеграл L , выражаемый трансцендентными функциями, выпадает из аргументов и, более того, $N_2(\alpha_0, \alpha_1, z, z^*) = \Phi(I_0, K_0)$, где Φ – некоторый полином I_0 и K_0 . Якобиан преобразования $(\alpha_0, \alpha_1, z, z^*) \mapsto (\alpha_1, I_0, K_0, L)$ равен $-\alpha_0$. Таким образом, можно положить локально $N_2(\alpha_0, \alpha_1, z, z^*) = \Phi(\alpha_1, I_0, K_0, L)$. Из равенства $\mathcal{D}\Phi = 0$ следует, что Φ не должно зависеть от α_1 . Отсюда получаем, что

$$N_2(\alpha_0, \alpha_1, z, z^*) = \Phi(I_0, K_0, L).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial I_0} &= \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_0} + \frac{i}{q} \ln z \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial K_0} &= \frac{1}{z} \frac{\partial N_2}{\partial z^*}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial L} &= \frac{1}{iq} \frac{\partial N_2}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Дифференцируя n раз первое уравнение в (4.9) по α_0 , второе – по z^* , а третье – по α_1 и используя тот факт, что N_2 – полином порядка $n - 1$, получим, что достаточно высокие производные Φ по I_0 , K_0 и L должны исчезнуть, т. е. Φ является полиномом от этих аргументов. Положим далее $\arg z = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} N_2 &= c_s |z|^s + c_{s-1} |z|^{s-1} + \dots + a_0 \\ &= d_l |z|^l P_l(\ln z) + \dots + d_0 = \Phi, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где P_l – некоторый полином степени l . Очевидно, что должно выполняться равенство $s = l$. Разделим обе части (4.10) на $|z|^s$ и устремим $|z|$ к ∞ . Отсюда следует, что $P_s = \text{const}$. Продолжая эту процедуру для c_{s-1} и т. д., получим, что Φ не зависит от L .

Уравнение на N_+ эквивалентно уравнению $\mathcal{D}(N_+/z) = 0$. Отсюда, принимая во внимание предыдущие рассуждения, получим $N_+ = zP(I_0, K_0)$, где $P(I_0, K_0)$ – полином. Под действием изометрии $\mathcal{R}_0$ ($\mathcal{R}_0 \mathbf{N}(\alpha) = -\mathbf{N}(\mathcal{R}_0 \alpha)$) функция N_+ переходит в $-N_-$. Отсюда в силу обратимости сразу следует, что $P = i\Psi$, где Ψ – полином своих аргументов, имеющий вещественные коэффициенты. Уравнения (4.4) для рассматриваемого резонанса, следовательно, имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_x \alpha_0 &= \alpha_1, \\ \partial_x \alpha_1 &= \Phi(\mu, \alpha_0, |z|^2), \\ \partial_x z &= izq + iz\Psi(\mu, \alpha_0, |z|^2), \\ \partial_x z^* &= -iz^*q - iz^*\Psi(\mu, \alpha_0, |z|^2), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где Φ и Ψ – вещественные полиномы данного порядка:

$$\Phi = \sum_i^k c_i(\mu) \alpha_0^i + d(\mu) |z|^2 + \dots, \quad \Psi = \gamma_0(\mu) + \gamma_1(\mu) \alpha_0 + \gamma_1 |z|^2 + \dots.$$

Постоянные c_i , d , $\gamma_{0,1,2}$ вычисляются из (4.6). Система уравнений (4.11) имеет два интеграла $|z|^2 = K_0$ и $\alpha_1^2 - \widehat{\Phi} = l_0$, $\partial_{\alpha_0} \widehat{\Phi} = 2\Phi$ и, следовательно, является интегрируемой.

4.4. Резонанс 1:1. Центральная часть спектра оператора $\mathcal{A}$ состоит из двух собственных значений $\pm iq$, $q > 0$, каждое из которых имеет алгебраическую кратность 2 и геометрическую кратность 1. Канонический базис состоит из четырех комплексных векторов ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_0^* , ϕ_1^* : $\mathcal{A}\phi_0 = iq\phi_0$, $\mathcal{A}\phi_1 = iq\phi_1 + \phi_0$, а $\mathcal{A}_0$ в этом базисе имеет вид

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} iq & 1 & 0 & 0 \\ 0 & iq & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iq & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -iq \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathcal{R}\mathcal{A}\phi_0 = iq\mathcal{R}\phi_0 = -\mathcal{A}\mathcal{R}\phi_0$ следует, что векторы ϕ_0 и ϕ_1 можно всегда выбрать так, что $\mathcal{R}\phi_0 = \phi_0^*$, $\mathcal{R}\phi_1 = -\phi_1^*$. Поэтому

$$\mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные и присоединенные векторы сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*\psi^1 &= -iq\psi^1, & \mathcal{A}^*\psi^0 &= -iq\psi^0 + \psi^1, \\ \mathcal{A}^*\psi^{1*} &= iq\psi^{1*}, & \mathcal{A}^*\psi^0 &= iq\psi^{0*} + \psi^{1*} \end{aligned}$$

и подчиняются условиям нормировки (4.7), где индексы пробегают четыре значения: 0, 1, 2, 3, и $i, j = 2, 3$ нумеруют комплексно-сопряженные векторы $\phi_{0,1}^*$ и $\psi^{0,1*}$.

В рассматриваемом случае

$$\mathbf{N}(\alpha) = (N_1, N_2, N_1^*, N_2^*)^\top(\alpha), \quad \alpha = (A, B, A^*, B^*)^\top(x),$$

а система уравнений (4.5) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}N_1 &= -iqN_1, & \mathcal{D}N_2 &= N_1 - iqN_2, \\ \mathcal{D}N_1^* &= iqN_1^*, & \mathcal{D}N_2^* &= N_1^* + iqN_2^*. \end{aligned}$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ имеет вид

$$\mathcal{D} = -iqA\frac{\partial}{\partial A} + (A - iqB)\frac{\partial}{\partial B} + iqA^*\frac{\partial}{\partial A^*} + (A^* + iqB^*)\frac{\partial}{\partial B^*}.$$

Легко видеть, что

$$u_1 = AA^*, \quad u_2 = \frac{i}{2}(AB^* - A^*B), \quad u_3 = \frac{B}{A} + \frac{1}{iq} \ln A$$

являются тремя независимыми интегралами уравнения $\mathcal{D}N = 0$. Таким образом, функция, принадлежащая ядру $\mathcal{D}$, должна зависеть от этих величин. Кроме того,

$$\mathcal{D}\left(\frac{N_1}{A}\right) = 0,$$

откуда следует, что $P = N_1/A$ – первый интеграл уравнения $\mathcal{D}N = 0$.

Докажем, что если полином $P(A, B, A^*, B^*)$, где $A, B \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{D}P = 0, \tag{4.12}$$

то $P = \varphi(AA^*, i(AB^* - A^*B)/2)$, где φ – некоторый полином. Якобиан преобразования $(A, B, A^*, B^*) \mapsto (A, u_1, u_2, u_3)$ равен $iA/2 \neq 0$. Таким образом, можно

положить $P(A, B, A^*, B^*) = \varphi(A, u_1, u_2, u_3)$. Из (4.12) следует, что φ не должно зависеть от A , откуда

$$P(A, B, A^*, B^*) = \varphi(u_1, u_2, u_3).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} &= \frac{1}{A} \frac{\partial P}{\partial A^*} + \frac{B}{A^2} \frac{\partial P}{\partial B^*}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} &= \frac{2}{iA} \frac{\partial P}{\partial B^*}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} &= A \frac{\partial P}{\partial B} + A^* \frac{\partial P}{\partial B^*}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из первых двух уравнений (4.13) следует, что

$$\frac{\partial^n \varphi}{\partial u_i^n} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где $n - 1$ есть максимальная степень полинома P и, следовательно, функция φ является полиномом от u_1 и u_2 .

Дифференцируя последнее равенство в (4.13) $n - 1$ раз по переменной B^* , получим

$$\frac{\partial^n}{\partial u_3 \partial^{n-1} u_2} \varphi = 0. \quad (4.14)$$

Дифференцируя это же равенство в (4.13) один раз по B и $n - 2$ раза по B^* и используя (4.14), имеем

$$\frac{\partial^{n-2}}{\partial u_2^{n-2}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_3} \right) \varphi = 0. \quad (4.15)$$

Дифференцируя последнее равенство в (4.13) два раза по B и $n - 3$ раза по B^* , с учетом (4.14) и (4.15) получим

$$\frac{\partial^{n-3}}{\partial u_2^{n-3}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial u_3^2} \right) \varphi = 0.$$

Предположим, что для любого $j = 1, \dots, m$, $m \leq n - 1$,

$$\frac{\partial^{n-j}}{\partial u_2^{n-j}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial u_3^{j-1}} \right) \varphi = 0. \quad (4.16)$$

Продифференцируем последнее равенство в (4.13) $n - (m + 1)$ раз по B^* и m раз по B и учтем (4.16):

$$\frac{\partial^{n-(m+1)}}{\partial u_2^{n-(m+1)}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{\partial^m}{\partial u_3^m} \right) \varphi = 0. \quad (4.17)$$

Полагая $m = n - 1$ в (4.17), получим, что φ – полином также и от u_3 .

Таким образом, функция φ имеет вид

$$\varphi = \sum_{i,j,l,m,p} C_{ijlmp} A^i B^j A^{*l} B^{*m} P_p(u_3), \quad (4.18)$$

где P_p – полиномы от u_3 , а C_{ijlmp} – постоянные. Полиномиальные члены в (4.18), включающие степени переменных A , B , A^* и B^* , возникают в результате полиномиальной зависимости φ от u_1 и u_2 . Полином P определяется формулой

$$P = \sum_{\alpha, \beta, \delta, \mu} d_{\alpha\beta\delta\mu} A^\alpha B^\beta A^{*\delta} B^{*\mu}, \quad (4.19)$$

где $d_{\alpha\beta\delta\mu}$ – постоянные.

Функция φ в (4.18) должна равняться полиному (4.19) для любых значений переменных A , B , A^* , B^* . Сравнивая асимптотику (4.18) и (4.19) при $A \rightarrow \infty$, получим противоречие между полиномиальным ростом с одной стороны и логарифмическим – с другой. Таким образом, полиномы P_p являются постоянными и не зависят от u_3 . Отсюда следует, что полином φ не зависит от u_3 . Следовательно,

$$N_1(A, B, A^*, B^*) = A\varphi(u_1, u_2).$$

По поводу уравнения, которому удовлетворяет N_2 , заметим, что $\varphi(u_1, u_2)$ является частным решением этого уравнения. Таким образом, легко видеть, что

$$N_2(A, B, A^*, B^*) = A\varphi_1(u_1, u_2) + B\varphi(u_1, u_2),$$

где φ_1 – также полином своих аргументов. Под действием изометрии $\mathcal{R}_0$

$$A \rightarrow A^*, \quad B \rightarrow -B^*, \quad N_1 \rightarrow -N_1^*, \quad N_2 \rightarrow N_2^*,$$

откуда вследствие обратимости вытекает, что $\varphi = iR$, $\varphi_1 = Q$, где R и Q – полиномы с вещественными коэффициентами:

$$\begin{aligned} R(\mu, u, K_0) &= p_1\mu + p_2u + p_3K_0 + O((|\mu| + |u| + |K_0|)^2), \\ Q(\mu, u, K_0) &= q_1\mu - q_2u + q_3K_0 + O((|\mu| + |u| + |K_0|)^2). \end{aligned}$$

Уравнения в квазинормальной форме (4.4), таким образом, имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_x A &= iqA + B + iAR \left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right), \\ \partial_x B &= iqB + AQ \left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right) + iBR \left(AA^*, \frac{i}{2}(AB^* - A^*B) \right). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Система уравнений (4.20) обладает двумя первыми интегралами

$$K_0 = \frac{i}{2}(AB^* - A^*B), \quad H_0 = |B|^2 - G(\mu, |A|^2, K_0), \quad (4.21)$$

где

$$G = \int_0^{|A|^2} Q(\mu, u, K_0) du,$$

и, следовательно, является интегрируемой.

5. Типы солитоноподобных структур

5.1. Классические уединенные волны. Классические уединенные волны являются продуктом бифуркации из нулевого волнового числа (см. раздел 3). Матрицы $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{R}_0$ в этом случае приведены в п. 4.2.

Записывая $\mathbf{u}_0 = a_0\phi_0 + a_1\phi_1$, получим из (2.3):

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + f_{00}, \\ \dot{a}_1 &= g_{01} = c_1\mu a_0 + c_2a_0^2 + c_3a_1^2 + f_{01}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где коэффициент при a_0a_1 равен нулю в силу обратимости,

$$\begin{aligned} f_{00} &= \langle \mathbf{F}, \psi^0 \rangle = O(\mu|\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2), \\ g_{01} &= \langle \mathbf{F}, \psi^1 \rangle, \quad f_{01} = o(\mu|\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2), \end{aligned}$$

$\mathbf{a} = (a_0, a_1)$, а $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu, \mathbf{u})$ – нелинейная вектор-функция из (2.1). Как следует из п. 4.2, приведенные уравнения (5.1) приближаются уравнениями (4.8) до любого алгебраического порядка по μ и $|a_0|$.

Производя в (5.1) масштабное преобразование

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{2} \frac{|c_1|}{|c_2|} \mu b_0(\varsigma), & a_1 &= \frac{3}{2} \frac{|c_1|}{|c_2|} \mu \nu b_1(\varsigma), \\ \varsigma &= \nu x, & \nu &= |c_1\mu|^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

получим

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma b_0 &= b_1 + O(\mu), \\ \partial_\varsigma b_1 &= \text{sign } \mu \left((\text{sign } c_1) b_0 + \frac{3}{2} (\text{sign } c_2) b_0^2 \right) + O(\mu). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнения (5.3) в низшем приближении по μ ($\mu = 0$) имеют солитоноподобные решения следующих типов.

1) Сверхкритические ($\mu > 0$) уединенные волны ($\text{sign } c_1 = 1$):

1а) $\text{sign } c_2 = -1$ – уединенные волны возвышения:

$$\widehat{\beta}_0 = \text{ch}^{-2} \left(\frac{\varsigma}{2} \right); \quad (\text{s1})$$

1б) $\text{sign } c_2 = 1$ – уединенные волны типа “яма”:

$$\widehat{\beta}_0 = -\text{ch}^{-2} \left(\frac{\varsigma}{2} \right). \quad (\text{s2})$$

2) Докритические ($\mu < 0$) уединенные волны ($\text{sign } c_1 = -1$):

2а) $\text{sign } c_2 = -1$ – уединенные волны типа “яма”;

2б) $\text{sign } c_2 = 1$ – уединенные волны возвышения.

Перечисленные солитоноподобные решения уравнения (5.3) являются приближениями решений типа классических уединенных волн, которые удовлетворяют приведенным уравнениям (5.1). Иными словами, для простого резонанса при переходе от приближенной системы уравнений к приведенным уравнениям решение типа классической уединенной волны сохраняет свой тип.

ТЕОРЕМА 3 ([25]; см. также [22], [70]). *Без ограничения общности рассмотрим случай $\text{sign } \mu = \text{sign } c_1 = \text{sign } c_2 = 1$. Для достаточно малых μ_0 и $\mu \in (0, \mu_0]$ существует семейство $\widehat{b}_0$ солитоноподобных решений уравнений (5.3). Более того,*

$$|\widehat{b}_0 - \widehat{\beta}_0| \leq C\mu \exp(-\chi|\varsigma|),$$

где C, χ – постоянные и $C > 0, 0 < \chi < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f_{00} = a_1 p_0$ и заменим a_1 на $a_1(1 + p_0)$ в (5.1). Тогда (5.3), очевидно, запишется в виде

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma b_0 &= b_1, \\ \partial_\varsigma b_1 &= \text{sign } \mu \left((\text{sign } c_1) b_0 + \frac{3}{2} (\text{sign } c_2) b_0^2 \right) + p_1(\mu, b_0, b_1), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $p_1(\mu, b_0, b_1) = o(\mu|\mathbf{b}|, |\mathbf{b}|^2)$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1)^\top$ – четная функция по b_1 (а значит, и по ς). Уравнения (5.4) могут быть переписаны в виде

$$\mathcal{M}(b_0) = b_0'' - b_0 + \frac{3}{2} b_0^2 + p_2(\mu, b_0, b_0') = 0, \quad (5.5)$$

где штрих означает производную по ς , а $p_2(\mu, b_0, b_0')$ – по-прежнему четная функция от ς .

Определим банаховы пространства

$$C_{\chi,j}^e = \left\{ \phi \in C^j(\mathbb{R}) : \sup_{\varsigma} |\exp(\chi|\varsigma|) \phi^{(m)}| < \infty, \quad m \leq j, \quad \phi(\varsigma) = \phi(-\varsigma) \right\}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Очевидно, что $\widehat{\beta}_0 \in C_{1,2}^e$.

Пусть $\mathcal{M}: C_{\chi,2}^e \rightarrow C_{\chi,0}^e$, где $\chi < 1$. Из теоремы о неявной функции следует существование и единственность решения $\widehat{b}_0 \in C_{\chi,2}^e$, $\mu \in (0, \mu_0]$, уравнений (5.5) в случае, когда оператор

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial b_0}(b_0) \Big|_{\mu=0} : C_{\chi,2}^e \rightarrow C_{\chi,0}^e$$

имеет ограниченный обратный. Доказательство первого утверждения теоремы, таким образом, сводится к демонстрации этого факта.

Легко видеть, что

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{d\varsigma^2} - 1 + 2\widehat{\beta}_0,$$

и обратный существует тогда и только тогда, когда уравнение

$$\mathcal{L}v = w \quad (5.6)$$

имеет единственное решение для любых $w \in C_{\chi,0}^e$. Разрешимость уравнения (5.6) устанавливается следующим образом.

Однородное уравнение $\mathcal{L}v = 0$ не имеет решений в $C_{\chi,2}^e$. Действительно, одно (нечетное) решение дается формулой $v_1 = \partial_\varsigma \widehat{\beta}_0$. Линейно независимое

решение имеет вид $v_2 = c_1 v_1 + c_2 v_1 \int_y^s v_1^{-2}(s) ds$, и оно представляет собой четную, но растущую функцию (если постоянные c_1 и c_2 выбраны таким образом, что $v_2(0) = 1$ и $v_2'(0) = 0$). Отсюда следует, что решение (5.6) единственно, если оно существует.

Требуемое решение уравнения (5.6) дается формулой

$$v = v_2 \int_y^\infty v_1 w dy + v_1 \int_0^y v_2 w dy. \quad (5.7)$$

Более того, из (5.7) следует, что $\|v\|_{C_{\chi,2}^e} \leq C \|w\|_{C_{\chi,0}^e}$, где $C > 0$ – постоянная.

Первая часть утверждения теоремы, таким образом, доказана. Далее, запишем решение уравнения (5.5) в виде $\hat{b}_0 = \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_0'$. Функция $\tilde{\beta}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}\tilde{\beta}_0 = R(\mu, \tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_0', \varsigma),$$

где $R(\cdot) = O(\mu\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_0^2, \tilde{\beta}_0'^2)$. Следовательно,

$$\|\tilde{\beta}_0\|_{C_{\chi,2}^e} \leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \|R(\mu, \tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_0', \varsigma)\|_{C_{\chi,0}^e},$$

откуда утверждение теоремы, касающееся оценок, следует немедленно.

5.2. Обобщенно-удиненные волны. Обобщенно-удиненные волны являются продуктом бифуркации резонанса длинной и короткой волн (см. раздел 3). Матрицы $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{R}_0$ в этом случае приведены в п. 4.3.

Записывая

$$\mathbf{u}_0 = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1 + a_+ \phi_+ + a_- \phi_-, \quad a_- = a_+^*, \quad (5.8)$$

получим приведенные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + f_{00}, \\ \dot{a}_1 &= g_{01} = c_1 \mu a_0 + c_2 a_0^2 + c_3 a_1^2 + f_{01}, \\ \dot{a}_+ &= i q a_+ + f_{0+}, \\ \dot{a}_- &= -i q a_- + f_{0+}^*, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} f_{00} &= \langle \mathbf{F}, \psi^0 \rangle = O(\mu |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2), & f_{01} &= \langle \mathbf{F}, \psi^1 \rangle = O(\mu |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2), \\ f_{0+} &= \langle \mathbf{F}, \psi^+ \rangle = O(\mu |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^2), & \mathbf{a} &= (a_0, a_1, a_+, a_-)^\top. \end{aligned}$$

Как следует из рассмотрений в п. 4.3, приведенные уравнения (5.9) приближаются уравнениями (4.11) до любого алгебраического порядка по μ , $|a_0|$ и zz^* . Полагая в (4.11) $z = \rho \exp(i\vartheta)$, $K_0 = 0$ и совершая масштабное преобразование (5.2), где $\vartheta = \phi(\nu\varsigma)/\nu$, получим

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma^2 b_0 &= \text{sign } \mu \left((\text{sign } c_1) b_0 + \frac{3}{2} (\text{sign } c_2) b_0^2 \right) + O(\mu), \\ \partial_\varsigma \rho &= 0, \quad \partial_\varsigma \phi = q + O(\mu). \end{aligned} \quad (5.10)$$

В нулевом приближении по μ система (5.10) имеет решения типа уединенных волн с $\rho = 0$ в случаях, перечисленных в п. 5.1. Очевидно, что уравнения (4.11) при $K_0 = 0$ и любом порядке полиномов Φ и Ψ будут по-прежнему иметь решения типа уединенных волн с $z = 0$, приближаемых с точностью до μ решениями, определяемыми формулами (s1), (s2).

Несмотря на то что решения типа уединенных волн сохраняются для системы, аппроксимирующей приведенные уравнения (5.9) с точностью до любого алгебраического порядка по μ , в полной системе они могут не находиться, т. е. члены более высокого порядка малости по μ , чем любая степень, могут повлиять на асимптотику уединенной волны на бесконечности. Э. Ломбарди [30] показал, что амплитуда обобщенно-уединенной волны на бесконечности пропорциональна экспоненциально малой величине по параметру μ .

Не вникая в математические сложности работы [30], рассмотрим причину возможности образования ненулевой асимптотики у уединенной волны при переходе к приведенным уравнениям (5.9) от аппроксимирующей их системы в квазинормальной форме. Эта причина обусловлена тем, что в общем случае в (5.9) присутствует источниковый член

$$f_s = f_{0+}|_{a_+=0}. \quad (5.11)$$

Преимущество замены зависимых переменных (5.8) состоит в представлении неизвестной вектор-функции $\mathbf{a}$ в виде суммы длинноволновой (a_0, a_1) и коротковолновой (a_+, a_-) частей. В связи с этим естественно сделать в (5.9) следующее масштабное преобразование:

$$a_0 = \mu \underline{b}_0, \quad a_1 = \mu |\mu|^{1/2} \underline{b}_1, \quad a_+ = \mu^2 b_+, \quad \hat{\varsigma} = |\mu|^{1/2} x.$$

В новых переменных уравнения (5.9) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{\varsigma}} \underline{b}_0 &= \underline{b}_1 + O(\mu), \\ \partial_{\hat{\varsigma}} \underline{b}_1 &= \text{sign } \mu (c_1 \underline{b}_0 - c_2 \underline{b}_0^2) + O(\mu), \\ \dot{b}_+ &= iqb_+ + i(d_1 \underline{b}_0 + d_2 \underline{b}_0^2) + O(\mu), \\ \dot{b}_+^* &= -iqb_+^* - i(d_1 \underline{b}_0 + d_2 \underline{b}_0^2) + O(\mu), \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $d_{1,2}$ – некоторые вещественные константы, не равные нулю в общем случае. Будем рассматривать только такие комбинации знаков μ и $c_{1,2}$, при которых первые два уравнения в (5.12) обладают солитоноподобными решениями. Без ограничения общности рассуждений положим $\mu > 0$, $c_{1,2} > 0$. Из (5.12) следует, что в низшем порядке по μ система уравнений (5.9) имеет решение

$$\hat{a}_0 = \mu \frac{3}{2} \frac{c_1}{c_2} \text{ch}^{-2} \left(\frac{\sqrt{c_1 \mu}}{2} x \right), \quad \hat{a}_1 = \dot{\hat{a}}_0. \quad (5.13)$$

Для нахождения асимптотики на бесконечности у решения, главная часть которого имеет вид (5.13), рассмотрим его локальную структуру в спектральной области. Опуская члены высшего порядка по μ , перепишем последнюю пару

уравнений (5.9) в виде

$$\mathcal{K}a_+ = if(\hat{a}_0), \quad \mathcal{K}^*a_- = -if(\hat{a}_0), \quad \mathcal{K} = \frac{\partial}{\partial x} - iq, \quad (5.14)$$

где $f(y) = \mu d_1 y + d_2 y^2$. Используя преобразование Фурье

$$\widehat{a}_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\pm} \exp(-ikx) dx,$$

из (5.14) получим

$$\widehat{a}_+ = -\frac{\widehat{f}_s}{k+q}, \quad \widehat{a}_- = \frac{\widehat{f}_s}{k-q}, \quad (5.15)$$

где

$$\widehat{f}_s = (e_1 k + e_2 k^3) \operatorname{sh}^{-1} \left(-\frac{\pi k}{\sqrt{\mu c_1}} \right),$$

а $e_1 = O(\mu)$ и $e_2 = O(1)$ – некоторые постоянные. Чтобы получить выражение для $\widehat{f}_s$ из (5.11), использовалась формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^{-2} x \exp(-ikx) dx = k\pi \operatorname{sh}^{-1} \left(\frac{\pi k}{2} \right).$$

Будем искать решение системы (5.9), выражающееся четной функцией, что совместимо со свойством обратимости. Именно, рассматриваемое решение имеет главную часть (5.13) и одинаковую асимптотику на обеих бесконечностях. Имеем

$$\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma=\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \widehat{a}_{\pm} \exp(ikx) dk, \quad (5.16)$$

где контур интегрирования Γ_1 проходит над полюсами $\widehat{a}_{\pm}$ на вещественной оси, а контур Γ_2 – ниже этих полюсов. Контур $\Gamma_{1,2}$ дают вклад в асимптотику на минус и плюс бесконечностях соответственно. Из (5.15), (5.16) следует, что в низшем порядке по μ

$$\operatorname{Re} \hat{a}_+ \rightarrow \pm C \exp \left(-\frac{\pi q}{\sqrt{\mu c_1}} \right) \sin qx, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad (5.17)$$

где $C = O(1)$ – некоторая константа. Точное значение постоянной C может быть определено только при анализе полной системы (5.9), так как члены большего порядка малости по параметру μ дают равный по порядку вклад в величину C . Другими словами, вместо полинома в выражении для $\widehat{f}_s$ должны стоять бесконечные ряды по степеням k . Нас, однако, интересуют лишь качественные особенности поведения решения, соответствующего (5.13), поэтому мы не будем здесь определять точные выражения для констант.

Выражение (5.17) определяет экспоненциально малую асимптотику периодической составляющей обобщенно-уединенной волны, отвечающей (5.13).

5.3. Уединенные волновые пакеты. Уединенные волновые пакеты являются продуктом бифуркации резонанса 1:1 (см. п. 4.4). Матрицы $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{R}_0$ в этом случае приведены в п. 4.4.

Записывая

$$\mathbf{u}_0 = A\phi_0 + B\phi_1 + A^*\phi_0^* + B^*\phi_1^*,$$

получим приведенные уравнения в виде

$$\begin{aligned}\dot{A} &= iqA + B + f_{01}, \\ \dot{B} &= iqB + f_{02},\end{aligned}\tag{5.18}$$

где

$$f_{01} = \langle \mathbf{F}, \psi^0 \rangle = O(\mu, |\mathbf{a}|^2), \quad f_{02} = \langle \mathbf{F}, \psi^1 \rangle = O(\mu, |\mathbf{a}|^2), \quad \mathbf{a} = (A, B, A^*, B^*)^\top.$$

Приведенные уравнения (5.18) приближаются системой в квазинормальной форме (4.20), где компоненты вектор-функции α из (4.1) обозначаются так же, как компоненты вектора $\mathbf{a}$. После замены переменных

$$A = \rho_0 \exp(i(qx + \theta_0)), \quad B = \rho_1 \exp(i(qx + \theta_1))\tag{5.19}$$

система уравнений (4.20) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_0 &= \rho_1 \cos \Theta, \\ \dot{\rho}_1 &= \rho_0 \cos \Theta Q(\rho_0^2, K_0), \\ \dot{\Theta} &= -\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} Q(\rho_0^2, K_0) + \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) \sin \Theta,\end{aligned}\tag{5.20}$$

где $\Theta = \theta_1 - \theta_0$. Система (5.20) имеет солитоноподобные решения только при $q_2 > 0$, $\text{sign } \mu q_1 > 0$ и нулевых значениях констант H_0 и K_0 . При $K_0 = \rho_0 \rho_1 \sin \Theta = 0$ без ограничения общности имеем $\Theta = 0$. Тогда в низшем приближении система уравнений (5.20) примет вид

$$\ddot{\rho}_0 = \mu q_1 \rho_0 - q_2 \rho_0^2.\tag{5.21}$$

Отсюда, учитывая равенство $0 = H_0 = \dot{\rho}_0^2 - \mu q_1 \rho_0^2 + q_2 \rho_0^4/2$, получим солитоноподобное решение (5.21):

$$\hat{\rho}_0 = \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \text{ch}^{-1}(\sqrt{q_1 \mu} x).\tag{5.22}$$

Решения (5.22) уравнения (5.21) являются приближениями решения типа уединенного волнового пакета, которые удовлетворяют приведенным уравнениям (5.18) (с учетом (5.19)). Иными словами, для резонанса 1:1 при переходе от приближенной системы уравнений к приведенным уравнениям решение типа уединенного волнового пакета сохраняет свой тип.

ТЕОРЕМА 4 [27]. Пусть $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{A}^*, \hat{B}^*)$ – решение уравнений в квазинормальной форме (5.20) в низшем приближении, которое получается из (5.22)

при помощи замены (5.19). Тогда для достаточно малых $\mu_0 > 0$ и $\mu \in (0, \mu_0]$ существует семейство уединенных волновых пакетов $\mathbf{a} = (A, B, A^*, B^*)$, удовлетворяющих приведенным уравнениям (5.18). Кроме того, указанные решения приведенных уравнений мало отличаются от $\hat{\mathbf{a}}$, а именно,

$$|\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}| \leq c\mu \exp(-\chi\sqrt{\mu}x),$$

где $\tilde{\mu} = q_1\mu > 0$, $c > 0$ – некоторая постоянная, а $0 < \chi < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем в (5.18) к новым зависимым и независимым переменным:

$$A = \nu \tilde{A} \exp(iqx), \quad B = \nu^2 \tilde{B} \exp(iqx), \quad \varsigma = \nu x, \quad \nu = \sqrt{\tilde{\mu}},$$

в результате уравнения (5.18) примут вид (как и прежде, штрих обозначает производную по ς)

$$\begin{aligned} \tilde{A}' &= \tilde{B} + \nu S_A \left(\nu, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \frac{\varsigma}{\nu} \right), \\ \tilde{B}' &= \tilde{A}(1 + q_2|\tilde{A}|^2) + \nu S_B \left(\nu, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A}^*, \tilde{B}^*, \frac{\varsigma}{\nu} \right), \end{aligned} \quad (5.23)$$

где $S_{A,B}$ – функции порядка 1 по ν , ограниченные по последнему аргументу. Из первого уравнения в (5.23) и из сопряженного ему по теореме о неявной функции имеем

$$\tilde{B} = \tilde{A}' + \nu S_1 \left(\nu, \tilde{A}, \tilde{A}^*, \frac{\varsigma}{\nu} \right), \quad (5.24)$$

где функция S_1 имеет порядок 1 по ν . Комбинируя второе уравнение в (5.23) и уравнение (5.24), получим

$$\tilde{A}'' = \tilde{A}(1 + q_2|\tilde{A}|^2) + \nu S \left(\nu, \tilde{A}, \tilde{A}^*, \tilde{A}', \tilde{A}'^*, \frac{\varsigma}{\nu} \right), \quad (5.25)$$

где S – функция порядка 1 по ν , ограниченная по ς/ν .

Напомним, что, в силу обратимости, под действием изометрии $\mathcal{R}_0$

$$\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}^*, \quad S \rightarrow S^*,$$

т.е. $\tilde{A}_R = \operatorname{Re} \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_R$, $\tilde{A}_I = \operatorname{Im} \tilde{A} \rightarrow -\tilde{A}_I$ и то же – для S . Это свойство совместимо с четностью $\tilde{A}_R$ (соответственно S_R) и нечетностью $\tilde{A}_I$ (соответственно S_I) как функций от ς . Разделяя (5.25) на вещественную и мнимую части и представляя $\tilde{A}$ в виде $\tilde{A} = (\hat{A}/\nu) \exp(-iqx) + \underline{A}$, получим уравнения на добавки $\underline{A}_{R,I}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \underline{A}_R &= \nu \tilde{S}_R \left(\nu, \hat{A}, \underline{A}_R, \underline{A}_I, \varsigma, \frac{\varsigma}{\nu} \right), & \mathcal{L}_1 &= \frac{d^2}{d\varsigma^2} - q_2 \hat{A}^2, \\ \mathcal{L}_2 \underline{A}_I &= \nu \tilde{S}_I \left(\nu, \hat{A}, \underline{A}_R, \underline{A}_I, \varsigma, \frac{\varsigma}{\nu} \right), & \mathcal{L}_2 &= \frac{d^2}{d\varsigma^2} - q_2, \end{aligned}$$

где $\tilde{S}_R$ – четная функция ς , если $\underline{A}_R$ – четная и $\underline{A}_I$ – нечетная, а $\tilde{S}_I$ – нечетная функция ς .

Далее, определим пространства $C_{\chi,j}^e$, $j = 0, 1, 2$, гладких четных функций так же, как в п. 5.1, и введем пространства нечетных функций:

$$C_{\chi,j}^o = \left\{ f \in C^j(\mathbb{R}) : \sup_{\varsigma} |\exp(\chi|\varsigma|) f^{(m)}| < \infty, m \leq j, \right. \\ \left. f(\varsigma) = -f(-\varsigma) \right\}, \quad j = 0, 1, 2.$$

Тогда $\mathcal{L}_1: C_{\chi,2}^e \rightarrow C_{\chi,0}^e$, $\mathcal{L}_2: C_{\chi,2}^o \rightarrow C_{\chi,0}^o$. Доказательство существования ограниченного обратного оператора $\mathcal{L}_1^{-1}: C_{\chi,0}^e \rightarrow C_{\chi,2}^e$ полностью аналогично соответствующему доказательству в п. 5.1. Существование ограниченного оператора $\mathcal{L}_2^{-1}: C_{\chi,0}^o \rightarrow C_{\chi,2}^o$ следует из однозначной разрешимости уравнения $\mathcal{L}_2 f = g_0 \in C_{\chi,0}^o$, $f \in C_{\chi,2}^o$, решение которого дается формулой

$$f = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}_0}{k^2 + q_2} \exp(ik\varsigma) dk \in C_{\chi,2}^o,$$

где $\hat{g}_0$ обозначает преобразование Фурье функции g_0 . Применение теоремы о неявной функции завершает доказательство теоремы 4.

6. Уединенные волны на поверхности раздела вода–лед

6.1. Модель ледяного покрова. Эксперименты показывают, что ледяной покров в естественных условиях довольно часто ведет себя как тонкая упругая пластина [71]. В связи с этим будем рассматривать его в рамках модели упругой пластины Кирхгофа–Лява (см. [72]), относительно которой приняты следующие допущения:

- (i) существует нейтральная (серединная) поверхность, деформации растяжения или сжатия которой являются наперед заданными и не изменяются при изгибе;
- (ii) каждое волокно упругого слоя, которое ортогонально нейтральной поверхности в недеформированном состоянии, остается прямым и ортогональным этой поверхности после деформации;
- (iii) напряженно-деформированное состояние подчиняется закону Гука, т. е. деформации малы и пластина является физически линейной.

Будем предполагать, что пластина находится в предварительно напряженном состоянии, которое характеризуется горизонтальным напряжением σ_0 (см. рис. 2). Это напряжение обусловлено начальным растяжением (или сжатием, как на рис. 2) серединной поверхности, которое, в связи с вышеизложенным, остается неизменным при изгибных деформациях.

Математическое описание упругой пластины дается в локальной криволинейной системе координат в плоских сечениях (ξ, ζ) , жестко присоединенной к серединной поверхности пластины. В недеформированном состоянии эта система координат (с точностью до сдвига) совпадает с глобальной декартовой системой координат x, y . Координата ξ изменяется вдоль дуг окружностей,

Рис. 2. Фрагмент упругой пластины с локальной координатной системой (ξ, ζ) . Пунктирная линия обозначает срединную поверхность. В результате заданного внешнего растяжения (сжатия) в пластине возникает поле напряжений, приводящее к внутренним силам, поверхностная плотность которых имеет абсолютную величину σ_0 .

параллельных локальным фрагментам срединной поверхности, а ζ – в ортогональном направлении к срединной поверхности (рис. 2).

Упругий слой, в недеформированном состоянии имеющий толщину h , занимает искривленную область

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{R}; -h < 2\zeta < h\}$$

с границей

$$\partial\Omega = \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^- = \{\xi \in \mathbb{R}; 2\zeta = -h \cup 2\zeta = h\}.$$

Далее будем рассматривать изгиб пластины в плоскости $x, \hat{y}$.

Из свойств (i), (ii) пластины Кирхгофа–Лява следует (см. рис. 2), что

$$d\xi = (R_m + \zeta) d\varphi, \quad dx = \frac{d\varphi}{R_m}, \quad (6.1)$$

так как на срединной поверхности длина дуги совпадает с длиной прямолинейного элемента срединной поверхности пластины, свободной от изгиба. Из (6.1) вытекает, что

$$d\xi = \left(1 + \frac{\zeta}{R_m}\right) dx. \quad (6.2)$$

Следовательно,

$$d\xi^2 = g_{11} dx^2, \quad g_{11} = \left(1 + \frac{\zeta}{R_m}\right)^2. \quad (6.3)$$

Из (6.3) получим выражение для компоненты $\epsilon_{\xi\xi}$ тензора деформаций:

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{1}{2}(g_{11} - 1) = \frac{\zeta}{R_m} + O\left(\frac{\zeta^2}{R_m^2}\right). \quad (6.4)$$

Далее будем предполагать, что $h/R_m \ll 1$, и принимать во внимание лишь члены порядка $O(h/R_m)$, пренебрегая членами порядка $O(h^2/R_m^2)$.

Из закона Гука следует выражение для компоненты $\sigma_{\xi\xi}$ изгибных напряжений в случае изгиба в плоскости $(x, \hat{y})$:

$$\sigma_{\xi\xi} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\epsilon_{\xi\xi} + \tilde{\lambda}\epsilon_{\zeta\zeta}, \quad (6.5)$$

где $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$ – коэффициенты Ламе.

При изгибе тонкой пластины те компоненты напряжений, у которых хотя бы один из индексов равен ζ , значительно меньше, чем напряжения $\sigma_{\xi\xi}$, возникающие в результате сжатий и растяжений внутри пластины [73]. Поэтому при поиске распределения внутренних напряжений в изогнутой пластине в граничных условиях можно положить равными нулю компоненты напряжений $\sigma_{\zeta\zeta} = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})\epsilon_{\zeta\zeta} + \tilde{\lambda}\epsilon_{\xi\xi}$, откуда следует, что

$$\epsilon_{\zeta\zeta} = -\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \epsilon_{\xi\xi}. \quad (6.6)$$

Подставляя (6.6) в (6.5), получим с учетом (6.4), что при чистом изгибе

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{\tilde{E}}{R_m(1 - \tilde{\nu}^2)} \zeta,$$

где $\tilde{E}$ – модуль Юнга:

$$\tilde{E} = \tilde{\mu} \frac{3\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}},$$

а $\tilde{\nu}$ – коэффициент Пуассона льда:

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{\lambda}}{2(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})}.$$

Изгибающий момент M связан с радиусом кривизны R_m срединной поверхности следующими соотношениями:

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \zeta \sigma_{\xi\xi}(\zeta) d\zeta = \frac{J}{R_m}, \quad J = \frac{\tilde{E}h^3}{12(1 - \tilde{\nu}^2)}.$$

6.2. Основные уравнения, формулировка задачи. Изучаются плоскопараллельные потенциальные движения идеальной несжимаемой жидкости глубины H и плотности ρ .

Жидкость занимает область

$$D = \{x \in \mathbb{R}; 0 < \hat{y} < H + \eta(x)\},$$

которая имеет границу

$$\partial D = \partial D^+ \cup \partial D^- = \{x \in \mathbb{R}; \hat{y} = H + \eta(x) \cup \hat{y} = 0\}.$$

Массовую плотность пластины обозначим через ρ_s , поверхность раздела вода–лед задается уравнением $\hat{y} = H + \eta(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Динамическое граничное условие на поверхности раздела определяется балансом сил внутри упругого слоя:

$$\begin{aligned} \partial_\xi \sigma_{\xi\xi} + \partial_\zeta \sigma_{\xi\zeta} &= 0, & \partial_\xi \sigma_{\xi\zeta} + \partial_\zeta \sigma_{\zeta\zeta} + f &= \rho_s \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, & (\xi, \zeta) \in \Omega, \\ \sigma_{\xi\zeta} &= -p_0, & \sigma_{\xi\zeta} &= 0, & (\xi, \zeta) \in \partial\Omega^+, \\ \sigma_{\zeta\zeta} &= -p, & \sigma_{\xi\zeta} &= 0, & (\xi, \zeta) \in \partial\Omega^-, \end{aligned} \quad (6.7)$$

где $f = -\sigma_0/R_m$ – плотность силы растяжения, а p , p_0 – значения давления соответственно на поверхности раздела пластина–вода и на верхней стороне пластины (атмосферное давление).

Умножим первое уравнение в (6.7) на ζ и проинтегрируем по ζ , используя граничные условия. В результате получим соотношение между перерезывающей силой N и изгибающим моментом M :

$$\partial_\xi M = N = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\xi\zeta} d\zeta.$$

Интегрирование второго уравнения в (6.7) дает уравнение баланса сил, действующих на пластину:

$$p = p_0 + \frac{\sigma_0 h}{R_m} - \partial_{xx}^2 M + \rho_s h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (6.8)$$

Кривизна срединной поверхности выражается следующим образом [8]:

$$\frac{1}{R_m} = - \frac{\partial_{xx} \eta}{(1 + (\partial_x \eta)^2)^{3/2} - h \partial_{xx} \eta / 2}.$$

Из (6.8) следует, что уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины в присутствии упомянутых поверхностных эффектов имеют вид [10], [74]:

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{\hat{y}\hat{y}} &= 0 \quad \text{при} \quad 0 < \hat{y} < H + \eta(x), \\ \varphi_{\hat{y}} &= 0 \quad \text{при} \quad \hat{y} = 0, \\ \varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_{\hat{y}}^2) + g\eta - \hat{b}\hat{\kappa}_1 + J\hat{\kappa}_2 + \hat{c}\eta_{tt} &= 0, \\ \eta_t + \eta_x \varphi_x &= \varphi_{\hat{y}} \quad \text{при} \quad \hat{y} = H + \eta(x), \end{aligned} \quad (6.9)$$

где g – ускорение свободного падения,

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{h\sigma_0}{\rho}, & \hat{c} &= \frac{\rho_s h}{\rho}, \\ \hat{\kappa}_1 &= \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2} - h\eta_{xx}/2}, & \hat{\kappa}_2 &= \partial_{xx}^2 \frac{\eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2} - h\eta_{xx}/2}. \end{aligned}$$

Нижние буквенные индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Обозначения используемых основных размерных величин и фундаментальных констант сведены в таблицу 1.

Таблица 1. Используемые обозначения основных размерных величин и фундаментальных констант

Символ	Величина	Размерность
p	давление на жидкость со стороны пластины	$[ML^{-1}T^{-2}]$
p_0	атмосферное давление	$[ML^{-1}T^{-2}]$
φ	потенциал скорости	$[L^2T^{-1}]$
η	отклонение поверхности жидкости	$[L]$
x	горизонтальная координата	$[L]$
$\hat{y}$	вертикальные координата	$[L]$
h	толщина льда	$[L]$
H	глубина жидкости	$[L]$
g	ускорение свободного падения	$[LT^{-2}]$
k	волновое число	$[L^{-1}]$
ω	частота	$[T^{-1}]$
σ_0	начальное напряжение в пластине	$[ML^{-1}T^{-2}]$
$\tilde{E}$	модуль Юнга	$[ML^{-1}T^{-2}]$
$\tilde{\nu}$	коэффициент Пуассона	$[]$
ρ	плотность жидкости	$[ML^{-3}]$
ρ_s	плотность льда	$[ML^{-3}]$

Дисперсионное соотношение системы (6.9) имеет вид

$$\omega^2 = \left[\frac{k \operatorname{th}(kH)}{1 + \hat{c}k \operatorname{th}(kH)} \right] \left[g + \hat{b}k^2 + \frac{J}{\rho}k^4 \right]. \quad (6.10)$$

6.3. Бегущие волны. Рассмотрим бегущую волну, которая распространяется влево вдоль оси x со скоростью V . В системе координат, движущейся со скоростью V , компоненты вектора скорости частиц $\mathbf{v} = (u, v)^\top$ удовлетворяет следующим асимптотическим условиям: $u \rightarrow V$, $v \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Произведем следующие масштабные преобразования:

$$(x, \hat{y}) \rightarrow \left(\frac{x}{H}, \frac{\hat{y}}{H} \right), \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{H}, \quad \mathbf{v} \rightarrow \frac{\mathbf{v}}{V}.$$

В новых безразмерных переменных, для обозначения которых будем использовать старые символы, система уравнений Эйлера для бегущих волн, с учетом (6.9), имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (xH, \hat{y}H) \in D; \\ \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \lambda\eta - b\kappa_1 + \gamma\kappa_2 + c\partial_{xx}\eta &= \operatorname{const}, \quad (xH, \hat{y}H) \in \partial D^+; \\ \partial_x \eta u - v &= 0, \quad (xH, \hat{y}H) \in \partial D^+; \\ v &= 0, \quad (xH, \hat{y}H) \in \partial D^-; \\ \mathbf{v} &\rightarrow (1, 0), \quad \eta(x) \rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (6.11)$$

здесь постоянные λ , b , γ , c и κ определяются соотношениями

$$\lambda = \frac{gH}{V^2}, \quad c = \frac{\hat{c}}{H}, \quad b = \frac{\hat{b}}{HV^2} - c, \quad \gamma = \frac{J}{\rho V^2 H^3}, \quad \kappa = \frac{h}{2H},$$

а функции κ_j , $j = 1, 2$, выражаются формулами

$$\kappa_1 = \frac{\partial_{xx}\eta}{(1 + (\partial_x\eta)^2)^{3/2} - \kappa\partial_{xx}\eta}, \quad \kappa_2 = \partial_{xx}^2 \frac{\partial_{xx}\eta}{(1 + (\partial_x\eta)^2)^{3/2} - \kappa\partial_{xx}\eta}.$$

Гравитационно-капиллярные волны, рассмотренные в [25], получаются в пределе $\gamma = \kappa = c = 0$ в (6.11). Отметим также, что, в отличие от [25], знак b может быть теперь любым.

Определим новые “полулагранжевы” координаты $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 1)$ формулой $y = \psi(x, \hat{y}) = \hat{y} + \Psi$, где $\psi(x, \hat{y})$ обозначает функцию тока, нормированную при помощи среднего расхода VH . Кроме того, произведем отображение поля скоростей $\mathbf{v} = (u, v)^\top = (1 + U, \mathcal{V})^\top$ на векторное поле $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^\top$ [65]:

$$w_1 = \frac{1}{2}\{(1 + U)^2 + \mathcal{V}^2 - 1\}, \quad w_2 = \frac{\mathcal{V}}{1 + U},$$

где $U, \mathcal{V}$ предполагаются малыми, а $\partial_{\hat{y}}\Psi = U$, $\partial_x\Psi = -\mathcal{V}$. Оба этих преобразования являются обратимыми как отображения $D \rightarrow D' = \mathbb{R} \times (0, 1)$. В новых переменных система уравнений (6.11) записывается в виде

$$\begin{aligned} \partial_x \mathbf{s} &= \mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{w}), & y &= 1, \\ \partial_x \mathbf{w} &= \mathcal{K}(\mathbf{w})\partial_y \mathbf{w}, & x, y &\in D', \\ w_2(0) &= 0, & y &= 0, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где $\mathbf{s} = (s_0, s_1, s_2)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$,

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{s}, \mathbf{w}) &= s_j, \quad j = 1, 2, \quad \mathcal{K}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} w_2 \hat{g}^{-1} & -\hat{g}^{-3} \\ \hat{g} & w_2 \hat{g}^{-1} \end{pmatrix}, \\ f_3(\mathbf{s}, \mathbf{w}) &= \frac{1}{\gamma(1 + s_0^2)^{3/2}} \left(\sqrt{1 + s_0^2} + s_0^2 \sqrt{1 + s_0^2 - \kappa s_1^2} \right)^2 \\ &\quad \times \left(-\lambda([\hat{g}] - 1) - w_1(1) - cs_1 + \frac{bs_1}{(1 + s_0^2)^{3/2} - \kappa s_1} + P \right), \\ P &= \frac{\gamma}{\sqrt{1 + s_0^2} (\sqrt{1 + s_0^2} + s_0^2 \sqrt{1 + s_0^2 - \kappa s_1^2})^3} \\ &\quad \times \left(-3\sqrt{1 + s_0^2} (-1 + 3s_0^2 + 4s_0^4)s_1^3 - 3(\kappa + 2\kappa s_0^2)s_1^4 \right. \\ &\quad \left. + 9s_0(1 + s_0^2)^{5/2}s_1s_2 + 3\kappa s_0(1 + s_0^2)s_1^2s_2 - 2\kappa(1 + s_0^2)^2s_2^2 \right), \\ s_0 &= w_2(1), \quad \hat{g} = \frac{(1 + w_2^2)^{1/2}}{(1 + 2w_1)^{1/2}}, \quad [\hat{g}] = \int_0^1 \hat{g} dy. \end{aligned}$$

Отклонение поверхности η дается формулой $\eta = 1 - [w_1] + \dots$.

Определим вектор $\mathbf{u} = (\mathbf{s}, \mathbf{w})^\top$ и рассмотрим его как образ при отображении $\mathbb{R} \ni x \rightarrow X = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{L}^2(0, 1)$, где $\mathbb{L}^2(0, 1) = L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, а $L^2(0, 1)$ обозначает пространство квадратично интегрируемых функций на интервале $(0, 1)$. Система (6.12) может быть переписана в виде

$$\partial_x \mathbf{u} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u}), \quad (6.13)$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, b, \gamma)$.

Оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ определяется по действию на вектор-функцию $\mathbf{u}$:

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u} = \{s_1, s_2, \gamma^{-1}(bs_1 - w_1(1) + \lambda[w_1]), -\partial_y w_2, \partial_y w_1\}^\top,$$

а нелинейная вектор-функция $\mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u})$ имеет вид

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\lambda}, c, \mathbf{u}) = \{\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{w}), \mathcal{K}(\mathbf{w})\partial_y \mathbf{w}\}^\top - \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u}.$$

Область $D(\mathcal{A})$ определения оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ имеет вид

$$D(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{w_2(0) = 0, w_2(1) = s_0\},$$

где $\mathbb{H}^1(0, 1) = H^1(0, 1) \times H^1(0, 1)$, а $H^1(0, 1)$ – пространство функций, квадратично интегрируемых на интервале $(0, 1)$ вместе со своими производными.

Образ оператора $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ является линеаризацией $(\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{w}), \mathcal{K}(\mathbf{w})\partial_y \mathbf{w})$ в точке $\mathbf{w} = 0$ при фиксированных значениях параметров $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $c \in \mathbb{R}^+$. Система уравнений (6.12) и соответствующая ей система (6.13) обратимы по отношению к изометрии $\mathcal{R} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, -1)$.

Легко видеть, что $\mathbf{G}$ отображает $D(\mathcal{A})$ в гильбертово пространство $Y = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{L}^2(0, 1)$, которое является замкнутым подпространством X .

Сопряженный оператор, имеющий область определения

$$D(\mathcal{A}^*) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{H}^1(0, 1) \cap \{s_2 = \gamma w_2(1), w_2(0) = 0\},$$

можно выписать в явном виде:

$$\mathcal{A}^*(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{u} = (-w_1(1), s_0 + bw_2(1), s_1, -\partial_y w_2 + \lambda w_2(1), \partial_y w_1).$$

Можно показать, что неограниченный замкнутый в X оператор $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ имеет компактную резольвенту и, следовательно, его спектр состоит из собственных значений, каждое из которых имеет конечную кратность [75]. Эти собственные значения в данном случае являются корнями уравнения (1.1). Вследствие вещественности $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ и обратимости уравнений (6.13) спектр $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ симметричен относительно вещественной и мнимой осей в комплексной плоскости спектрального параметра. Из общей теории [65] (см. раздел 2) и теоремы о резольвентных оценках, доказанной в разделе 8 (см. также [74]), следует, что все ограниченные решения системы (6.12), лежащие в достаточно малой окрестности нулевого решения, могут быть найдены из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые связаны с центральной частью спектра $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$, состоящей из конечного числа мнимых собственных значений. Следовательно, множество нетривиальных решений системы (6.12) будет изменяться качественно только при тех значениях параметров, при которых изменяется упомянутая центральная часть спектра.

Для нахождения значений $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma})$ и фиксированного значения $c \in \mathbb{R}^+$ в пространстве параметров $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, b, \gamma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, при которых наступают бифуркации, необходимо определить те значения, при которых (1.1) имеет мнимые корни кратности, большей 1, иными словами, происходят резонансы (собственные значения $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ приходят на мнимую ось параметра; см. раздел 3).

Рис. 3. Поверхности $\lambda = 1$ и (6.16), на которых происходит бифуркация в пространстве параметров. Расположение собственных значений, пары которых совпадают на мнимой оси на этих поверхностях, показано черными кружками по обе стороны от поверхности (6.16) и над плоскостью $\lambda = 1$ и белыми кружками – под плоскостью $\lambda = 1$.

Из (6.10) легко следует вековое уравнение для бегущих волн (1.1). Полагая $\sigma = iq$, $q \in \mathbb{R}_+$, получим

$$q \operatorname{cth} q = \lambda + bq^2 + \gamma q^4. \quad (6.14)$$

Двойной корень должен удовлетворять уравнению

$$\operatorname{cth} q - q \operatorname{sh}^{-2} q = 2bq + 4\gamma q^3. \quad (6.15)$$

Заметим, что если $q \neq 0$, то соотношения (6.15) определяют b как функцию от q и γ , в то время как (6.14) фиксирует λ в зависимости от q при произвольных b и γ . С другой стороны, $q = 0$ отвечает $\lambda = 1$ в силу разложения

$$\operatorname{cth} q = \frac{1}{q} + \frac{1}{3}q - \frac{1}{45}q^3 + O(q^5),$$

справедливого в окрестности нуля. Таким образом, для получения полной картины расположения действительных корней уравнения (6.14) необходимо рассмотреть следующие два случая (см. рис. 3).²

Случай 1: кратный корень $q = 0$. При $\hat{\lambda} = 1$ и произвольных b и γ соотношения (6.14), (6.15) выполняются. Необходимо также различать случаи $b > 1/3$ и $b < 1/3$. В первом случае $q = 0$ – единственное решение (6.14), в то время как при $b < 1/3$ имеется пара дополнительных простых корней $\pm q$, $q \neq 0$.

Таким образом, при $\lambda = 1$, $b \neq 1/3$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ имеем два или четыре собственных значения в центральном спектре; нулевое собственное значение имеет

²Возможна еще бифуркация коразмерности два, соответствующая корню (6.14) кратности три, однако она отвечает нефизической ситуации, когда параметр γ отрицателен.

кратность два, а один зависимый параметр определяет бифуркацию коразмерности 1. В противоположность случаю коразмерности 1 случай $\lambda = 1$, $b = 1/3$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ приводит к корню $q = 0$ уравнения (1.1) кратности четыре, в результате чего возникает бифуркация коразмерности два (единственным свободным параметром является γ).

Случай 2: кратный корень $q \neq 0$. В результате разрешения соотношений (6.14), (6.15) получим двумерную поверхность, параметризованную следующим образом:

$$\hat{\lambda} = \gamma q^4 + \frac{q \operatorname{cth} q}{2} + \frac{q^2 \operatorname{sh}^{-2} q}{2}, \quad \hat{b} = -2\gamma q^2 + \frac{\operatorname{cth} q}{2q} - \frac{\operatorname{sh}^{-2} q}{2}. \quad (6.16)$$

Асимптотики параметров $\hat{\lambda}$ и $\hat{b}$ на поверхности (6.16) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= 1 + \left(\frac{1}{45} + \gamma \right) q^4 + O(q^6), \quad \hat{b} = \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{45} + 2\gamma \right) q^2 + O(q^4), & q \rightarrow 0, \\ \hat{\lambda} &\sim \gamma q^4 + \frac{q}{2}, \quad \hat{b} \sim -2\gamma q^2 + \frac{1}{2q}, & q \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Как показано выше, для $\gamma \geq 0$, $b \neq 1/3$ имеются три типа бифуркаций из состояния покоя, происходящих при следующих значениях параметров:

$$\text{I: } \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma}) = (1, b, \gamma), \quad b > \frac{1}{3}, \quad \gamma \geq 0,$$

$$\text{II: } \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma}) = (1, b, \gamma), \quad b < \frac{1}{3}, \quad \gamma \geq 0,$$

$$\text{III: } \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma}) \text{ удовлетворяет (6.16).}$$

Поведение собственных значений оператора $\mathcal{A}(\lambda)$, приходящих на мнимую ось, показано на рис. 3.

Бифуркации этого типа были впервые изучены в работах [28], [25] для $b \geq 0$ и $\gamma = \kappa = c = 0$. Здесь нет ограничений на знак b , хотя рассмотрение случая отрицательных значений этого параметра не добавляет ничего нового к качественному поведению волн по сравнению с предыдущими работами.

Далее будем рассматривать систему уравнений (6.13) в окрестности критических множеств I, II и III, определяемой (без ограничения общности) изменением только параметра λ : $\lambda = \hat{\lambda} + \mu$, $|\mu| \ll 1$. Обозначим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\hat{\lambda}), \quad \mathbf{F}(\mu, \mathbf{u}) = \mathbf{G}(\hat{\lambda} + \mu, \hat{b}, \hat{\gamma}, c, \mathbf{u}).$$

Тогда система уравнений (6.13) запишется в виде (2.1).

Для понижения порядка системы уравнений (6.13) будет использована теорема о центральном многообразии (раздел 2). Для бесконечномерных динамических систем эта теорема справедлива при условии выполнения оценок, гарантирующих убывание резольвенты оператора $\mathcal{A}$. Справедливость этих оценок установлена в разделе 8.

6.3.1. *Классические уединенные волны.* Рассмотрим случай (см. также [76]), когда двойным корнем (6.14) является $q = 0$. При $\hat{\lambda} = 1$ и произвольных $\hat{b}$, c и $\hat{\gamma}$ выполняются соотношения (6.14), (6.15). Солитоноподобные решения существуют только в случае $\hat{b} > 1/3$. При этом $q = 0$ – единственное решение (6.14).

Таким образом, при $\hat{\lambda} = 1$, $\hat{b} > 1/3$, $\hat{\gamma} \in \mathbb{R}_+$ имеем собственные значения в центральном спектре, которые имеют кратность 2, и два независимых параметра определяют бифуркацию коразмерности 1; движение центральных собственных значений в рассматриваемом случае изображено на рис. 1, (а).

Без ограничения общности будем полагать, что $\hat{\lambda} \rightarrow \lambda$, где в невозмущенном состоянии $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}, \hat{b}, \hat{\gamma})$, в актуальном состоянии $\lambda = (\lambda, \hat{b}, \hat{\gamma})$, $\lambda = \hat{\lambda} + \mu$, $\mu \ll 1$. В рассматриваемом случае единственным мнимым собственным значением оператора $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\hat{\lambda}) = \mathcal{A}(\hat{\lambda})$ является двукратное нулевое собственное значение и размерность X_0 (и, тем самым, размерность центрального многообразия) равняется двум. Канонический базис в X_0 состоит из собственного ϕ_0 и присоединенного ϕ_1 векторов оператора $\mathcal{A}$, отвечающих нулевому собственному значению: $\mathcal{A}\phi_0 = 0$, $\mathcal{A}\phi_1 = \phi_0$. Далее, имеем $\mathcal{R}\phi_0 = \phi_0$. Тогда из равенства $\mathcal{R}\mathcal{A}\phi_1 = \mathcal{R}\phi_0 = -\mathcal{A}\mathcal{R}\phi_1$ немедленно следует $\mathcal{R}\phi_1 = -\phi_1$ и, значит,

$$\mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}^*$, сопряженный $\mathcal{A}$, имеет один собственный вектор ψ^1 и один присоединенный вектор ψ^0

$$\mathcal{A}^*\psi^1 = 0, \quad \mathcal{A}^*\psi^0 = \psi^1, \quad \langle \phi_i, \psi^j \rangle = \delta_i^j,$$

где, напомним, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в комплексном гильбертовом пространстве X , а δ_i^j – символ Кронеккера.

При помощи векторов ψ^i , $i = 0, 1$, осуществляется проекция π_0 на центральное многообразие:

$$\mathbf{u}_0 = \pi_0 \mathbf{u} = \sum_j \langle \mathbf{u}, \psi^j \rangle \phi_j. \quad (6.17)$$

Размерность образа проекции равна двум. Здесь

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix}, \quad \psi^0 = \Pi \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ 0 \\ \hat{b} + (y^2 - 1)/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^1 = \Pi \begin{pmatrix} -\hat{b} \\ 0 \\ \gamma_0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix},$$

где $\Pi = (\hat{b} - 1/3)^{-1}$.

Полагая $\mathbf{u}_0 = a_0 \phi_0 + a_1 \phi_1$, получим приведенные уравнения на центральном многообразии:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= a_1 + O(\mu^2 |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^3), \\ \dot{a}_1 &= \Pi \left(\mu a_0 - \frac{3}{2} a_0^2 + \frac{a_1^2}{4} \right) + O(\mu^2 |\mathbf{a}|, |\mathbf{a}|^3), \quad \mathbf{a} = (a_0, a_1)^\top. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Производя замену

$$a_0 = \mu\beta_0(\varsigma), \quad a_1 = \mu\nu\beta_1(\varsigma), \quad \varsigma = \nu x, \quad \nu = \mu^{1/2}\Pi^{1/2}, \quad (6.19)$$

получим из (6.18) в нулевом порядке по μ :

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma\beta_0 &= \beta_1, \\ \partial_\varsigma\beta_1 &= (\text{sign } \mu)\left(\beta_0 - \frac{3}{2}\beta_0^2\right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Уравнения (6.20) обладают первым интегралом

$$(\text{sign } \mu)\beta_1^2 - (\beta_0^2 - \beta_0^3) = l_0.$$

Для $\mu > 0$, $l_0 = 0$ имеет место солитоноподобное решение системы (6.20):

$$\beta_0 = \text{ch}^{-2}\left(\frac{\varsigma}{2}\right).$$

Это решение описывает классическую уединенную волну понижения уровня.

Производя замену, обратную (6.19), получим

$$a_0 = \mu\beta_0 = \mu \text{ch}^{-2}\left(\frac{\nu x}{2}\right).$$

Форма свободной поверхности задается формулой

$$\eta = 1 - a_0(x) + O(\mu^2) = 1 - \mu \text{ch}^{-2}\left(\frac{\nu x}{2}\right) + O(\mu^2). \quad (6.21)$$

Отметим, что зависимость от параметра γ не возникает в членах низшего порядка по μ в (6.21).

Имеет место результат о грубости солитонных решений “обрезанной системы” (6.20) (см. п. 5.1).

6.3.2. Обобщенно-уединенные и уединенные волны с рябью. В случае II центральная часть спектра $\mathcal{A}$ состоит из двукратного нулевого собственного значения и пары простых мнимых собственных значений $\pm iq$. Размерность центрального многообразия, определяемого (6.17), таким образом, равняется 4. Собственные и присоединенные векторы оператора $\mathcal{A}$ даются формулами

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -y \end{pmatrix}, \quad \phi_+ = \begin{pmatrix} i \text{sh } q \\ -q \text{sh } q \\ -iq^2 \text{sh } q \\ -\text{ch } qy \\ i \text{sh } qy \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \phi_+^*,$$

где $\mathcal{A}\phi_+ = iq\phi_+$. Собственные и присоединенные векторы сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ имеют вид

$$\psi^0 = \Pi \begin{pmatrix} 0 \\ \widehat{\gamma} \\ 0 \\ \widehat{b} + (y^2 - 1)/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^1 = \Pi \begin{pmatrix} -\widehat{b} \\ 0 \\ \gamma \\ 0 \\ y \end{pmatrix},$$

$$\psi^+ = r_0^{-1}(q) \begin{pmatrix} i(\widehat{b} + \gamma q^2) \operatorname{sh} q \\ -q\gamma \operatorname{sh} q \\ -i\widehat{\gamma} \operatorname{sh} q \\ -\operatorname{ch} qy + (\operatorname{sh} q)/q \\ -i \operatorname{sh} qy \end{pmatrix}, \quad \psi^- = \psi^{+*},$$

$$r_0(q) = \left(\widehat{b} + 3\widehat{\gamma}q^2 - \frac{1}{q^2} \right) \operatorname{sh}^2 q + 1,$$

где $\mathcal{A}^*\psi^+ = -iq\psi^+$.

Полагая

$$\mathbf{u}_0 = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_+\phi_+ + a_-\phi_-,$$

получим приведенные уравнения (5.9), которые имеют квазинормальную форму (4.11). Непосредственные вычисления с использованием (4.6) дают для коэффициентов полиномов Φ и Ψ в (4.11) следующие формулы:

$$\begin{aligned} c_1(\mu) &= \mu\Pi + O(\mu^2), & c_2(\mu) &= -\frac{3}{2}\Pi + O(\mu), \\ d(\mu) &= d_0|\Pi| = -\frac{\Pi}{q} \left[q + 2\kappa q \operatorname{sh} q \right. \\ &\quad \times \left. (-2q \operatorname{ch} q + (2 + (\widehat{b} - c)q^2 + 2\widehat{\gamma}q^4) \operatorname{sh} q) + \operatorname{sh} 2q \right] + O(\mu). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Полагая $z = \varrho \exp(i\theta)$, при помощи масштабного преобразования

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \mu\beta_0(\varsigma), & \alpha_1 &= \mu\beta_1(\varsigma), & K_0 &= \mu^2 k_0 \quad (K_0 = |z|^2), \\ \theta &= \frac{\vartheta(\varsigma)}{\nu}, & \varsigma &= \nu x, & \nu &= |\mu\Pi|^{1/2} \end{aligned}$$

и соотношений (6.22) получим

$$\begin{aligned} \partial_\varsigma^2 \beta_0 + \operatorname{sign} \mu \left(\beta_0 - \frac{3}{2}\beta_0^2 - d_0 k_0 \right) &= O(\mu), \\ \partial_\varsigma \varrho &= O(\mu), & \partial_\varsigma \vartheta &= \Psi(\mu, \alpha_0, k_0^2) = q + O(\mu). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Система уравнений (6.23) имеет две точки равновесия. В низшем порядке по μ они принимают вид

$$\widetilde{\beta}_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \operatorname{sign} \mu \sqrt{1 - 6d_0 k_0}$$

(седловая точка) и

$$\widetilde{\widetilde{\beta}}_0 = \frac{1}{3} - \operatorname{sign} \mu \frac{1}{3} \sqrt{1 - 6d_0 k_0}$$

(центр), $d_0 < 1/(6k_0)$.

Умножая первое уравнение в (6.23) на $\partial_\varsigma \beta_0$ и интегрируя, получим

$$(\partial_\varsigma \beta_0)^2 = \operatorname{sign} \mu f(\beta_0, l_0, k_0),$$

где

$$f(\beta_0, h_0, k_0) = \beta_0^3 - \beta_0^2 + 2d_0 k_0 \beta_0 + l_0.$$

Для существования решений β_0 необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\operatorname{sign} \mu f(\beta_0, l_0, k_0) > 0.$$

Обобщенно-удиненные волны имеют место при $K_0 = 0$, $\mu < 0$ и являются волнами возвышения поверхности. Форма поверхности для этих волн имеет следующий вид:

$$\eta = 1 + |\mu| \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{\nu x}{2} \right) + O(\mu^2). \quad (6.24)$$

При помощи соображений, изложенных в п. 5.2, можно убедиться, что периодическая составляющая обобщенно-удиненной волны обладает следующей асимптотикой на бесконечности:

$$\eta \rightarrow \pm C \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{|\Pi|} \sqrt{|\mu|}} \right) \sin qx, \quad x \rightarrow \pm \infty,$$

где C – некоторая постоянная.

Возвышение поверхности для уединенных волн с рябью дается формулой

$$\eta = 1 - a_0 + \frac{2}{q} \varrho \operatorname{sh} q \cos qx + O(\mu^2), \quad (6.25)$$

где

$$a_0 = \mu \tilde{\beta}_0 - \mu \operatorname{sign} \mu \sqrt{1 - 6d_0 k_0} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{(1 - 6d_0 k_0)^{1/4} \nu x}{2} \right).$$

6.3.3. Уединенные волновые пакеты и темные солитоны. В случае III центральная часть спектра $\mathcal{A}$ состоит из пары ненулевых двукратных мнимых собственных значений $\pm iq$. Размерность центрального многообразия, таким образом, равняется четырем.

Собственные и присоединенные векторы оператора $\mathcal{A}$ при $\sigma = \pm iq$ имеют следующий вид:

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} iq^{-1} \operatorname{th} q \\ -\operatorname{th} q \\ -iq \operatorname{th} q \\ -\operatorname{ch} qy/(q \operatorname{ch} q) \\ i \operatorname{sh} qy/(q \operatorname{ch} q) \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} q^{-1} \\ i + iq^{-1} \operatorname{th} q \\ -q - 2q \operatorname{th} q \\ iy \operatorname{sh} qy/(q \operatorname{ch} q) \\ y \operatorname{ch} qy/(q \operatorname{ch} q) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A} \phi_0 = iq \phi_0, \quad \mathcal{A} \phi_1 = iq \phi_1 + \phi_0.$$

Нелинейная вектор-функция $\mathbf{F}(\mu, \mathbf{u})$ в (2.1) при $\mu = 0$ дается формулой

$$\mathbf{F}(0, \mathbf{u}) = \mathbf{N}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{N}_3(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) + \dots,$$

где точки обозначают члены высшего порядка,

$$\mathbf{N}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_2 \\ -w_1 w_{1y} + w_2 w_{2y} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{N}_3(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n_3 \\ w_1 w_2 w_{1y} - 3w_{2y}(w_1^2 - w_2^2)/2 \\ (3w_1^2 + w_2^2)w_{1y}/2 + w_1 w_2 w_{2y} \end{pmatrix},$$

$$n_2 = -\frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\gamma}}(3[w_1^2] + [w_2^2] + 4\kappa s_1[w_1]) + \frac{\kappa}{\hat{\gamma}}(2s_1 w_1(1) - \hat{b}s_1^2 + cs_1^2 - 2\hat{\gamma}s_2^2),$$

$$n_3 = \frac{\hat{\lambda}}{2\hat{\gamma}}(5[w_1]^3 + [w_1 w_2^2]) - \frac{3c}{\hat{\lambda}}s_0^2 s_1 + 3s_1^3 + 9s_0 s_1 s_2 + \frac{3s_0^2}{2\hat{\gamma}}([w_1] - w_1(1))$$

$$+ \frac{\kappa\hat{\lambda}}{\hat{\gamma}}(3s_1[w_1]^2 + s_1[w_2^2]) + \frac{\kappa^2}{\hat{\gamma}}(\hat{\lambda}s_1^2[w_1] - s_1^2 w_1(1) - cs_1^3 - 2\hat{\gamma}s_1 s_2^2).$$

Все ограниченные решения системы уравнений (6.12) записываются в виде

$$\mathbf{u}_0 = A\phi_0 + B\phi_1 + A^*\phi_0^* + B^*\phi_1^* + \Phi(\mu, A, B, A^*, B^*), \quad (6.26)$$

где

$$\Phi(0, A, B, A^*, B^*) = (A^2\Phi_{2000} + \text{к.с.}) + |A|^2\Phi_{1100} + \dots$$

представляет собой нелинейную вектор-функцию своих аргументов. Функция Φ в правой части (6.26) отвечает преобразованию от приведенных уравнений в форме (5.18) к уравнениям в квазинормальной форме, которые для резонанса 1:1, в комбинации с обратимостью, имеют вид уравнений (4.20). Напомним, что (4.20) имеет два первых интеграла (4.21).

Коэффициент q_1 полинома Q в (4.20) связан с собственными значениями линеаризованной правой части уравнения (4.20) по формуле

$$\sigma = iq \pm \sqrt{q_1\mu} + O(\mu).$$

Если подставить это выражение в (1.1) с $\lambda = \hat{\lambda} + \mu$, $b = \hat{b}$ и $\gamma = \hat{\gamma}$, то получим, что в рассматриваемом случае

$$q_1 = \frac{1}{(2\hat{b}q + 4\hat{\gamma}q^3) \coth q + 6\hat{\gamma}q^2 + \hat{b} - 1} > 0$$

и

$$q_1 \sim \frac{1}{(4/45 + 4\hat{\gamma})q^2}, \quad q \rightarrow 0, \quad q_1 \sim \frac{1}{4\hat{\gamma}q^2}, \quad q \rightarrow \infty.$$

Коэффициент q_2 определяется из следующего уравнения [77]:

$$q_2 = -\langle 2\mathbf{N}_2(\phi_0, \Phi_{1100}) + 2\mathbf{N}_2(\phi_0^*, \Phi_{2000}) + 3\mathbf{N}_3(\phi_0, \phi_0, \phi_0^*), \psi_1 \rangle, \quad (6.27)$$

где $\mathcal{A}^* \psi_1 = -iq\psi_1$,

$$\psi_1 = r(q) \begin{pmatrix} -(\widehat{b} + \widehat{\gamma}q^2) \operatorname{sh} q \\ -iq\widehat{\gamma} \operatorname{sh} q \\ \widehat{\gamma} \operatorname{sh} q \\ i(-\operatorname{ch} qy + \widehat{\lambda}q^{-1} \operatorname{sh} q) \\ \operatorname{sh} qy \end{pmatrix},$$

$$r(q) = \frac{q^4 \operatorname{cth} q}{\widehat{\lambda}q \operatorname{ch} q - \widehat{b}q^3 \operatorname{ch} q - 3\widehat{\gamma}q^5 \operatorname{ch} q - \widehat{\lambda} \operatorname{sh} q - 3\widehat{\gamma}q^4 \operatorname{sh} q}.$$

Асимптотика $r(q)$ имеет вид

$$r(q) = -\frac{1}{4(1/45 + \widehat{\gamma})q^2} + O(1), \quad q \rightarrow 0,$$

$$r(q) \sim -\frac{1}{2\widehat{\gamma}} \exp(-q), \quad q \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты Φ_{1100} и Φ_{2000} удовлетворяют следующим уравнениям [77]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\Phi_{2000} + \mathbf{N}_2(\phi_0, \phi_0) &= 2iq\Phi_{2000}, \\ \mathcal{A}\Phi_{1100} + 2\mathbf{N}_2(\phi_0, \phi_0^*) &= 0. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Для подсчета коэффициента q_2 использовался пакет символьных вычислений Mathematica 7.0. Векторные функции Φ_{1100} и Φ_{2000} , определяемые при помощи (6.28), даются формулами

$$\Phi_{1100} = \frac{1}{(\widehat{\lambda} - 1)q^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2(\operatorname{th} q)(\widehat{\lambda} - 2\kappa q^2 + 2\kappa q(\widehat{\lambda} + \widehat{\gamma}q^4 - q^2c) \operatorname{th} q) + \\ + q(\operatorname{sech}^2 q)(\widehat{\lambda} + 4\kappa \operatorname{sh}^2 qy \operatorname{th}^2 q) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{2000} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2iq\alpha \\ -4q^2\alpha \\ 2q^{-2}(\operatorname{ch}^{-2} q)(2 + (\operatorname{ch}^2 qy)(1 + i\alpha q^2 \operatorname{cth} q) + (1 + i\alpha q^2 \operatorname{cth} q) \operatorname{sh}^2 qy) \\ \alpha \operatorname{csch} 2q \operatorname{sh} 2qy \end{pmatrix},$$

$$\alpha = -2i \frac{1 + (2 + \kappa q^2) \operatorname{sech}^2 q - \kappa q \operatorname{th} q + (1 - 2\kappa q^2 - 4\widehat{\gamma}\kappa q^4) \operatorname{th}^2 q}{q^2(18\widehat{\gamma}q^3 + 3 \operatorname{cth} q - 3q \operatorname{csch}^2 q - 2 \operatorname{th} q)}.$$

Коэффициент q_2 вычисляется из уравнения (6.27) и имеет следующий вид:

$$q_2 = q_{21} + \kappa q_{22} + \kappa^2 q_{23},$$

где

$$\begin{aligned}
 q_{21} = & \frac{r \operatorname{sech}^3}{16(\hat{\lambda} - 1)} \left(5\hat{\lambda}q + 21\hat{\lambda}^2q - 8q^3 + 9cq^3 + 16\hat{\lambda}q^3 - 9c\hat{\lambda}q^3 + 10i\alpha q^4 - 10i\alpha\hat{\lambda}q^4 \right. \\
 & + 4q(\hat{\lambda} - 7\hat{\lambda}^2 - 3cq^2 + 3c\hat{\lambda}q^2 + 3i\alpha q^3 - 3i\alpha\hat{\lambda}q^3) \operatorname{ch} 2q \\
 & + q(7\hat{\lambda}^2 + q^2(3c + 2i\alpha q) - \hat{\lambda}(9 + 3cq^2 + 2i\alpha q^3)) \operatorname{ch} 4q \\
 & \left. + 24\hat{\lambda}^2 \operatorname{sh} 2q - 2q^2 \operatorname{sh} 2q + 6\hat{\lambda}q^2 \operatorname{sh} 2q - 12\hat{\lambda}^2 \operatorname{sh} 4q + 3q^2 \operatorname{sh} 4q - 3\hat{\lambda}q^2 \operatorname{sh} 4q \right), \\
 q_{23} = & \frac{r \operatorname{th}^2 q}{(\hat{\lambda} - 1)q^3} \left((4\hat{\lambda}q \operatorname{sech} q \operatorname{th}^2 q + \operatorname{sh} q)(5(\hat{\lambda} - 1)q^2 \right. \\
 & \left. - 5(\hat{\lambda} - 1)q(\hat{\lambda} - cq^2 + 2\hat{\gamma}q^4) \operatorname{th} q - 4\hat{\lambda} \operatorname{th}^2 q + 8q \operatorname{th}^3 q) \right)
 \end{aligned}$$

(выражение для коэффициента q_{22} является громоздким и поэтому здесь не приводится).

Если не учитывать инерцию пластины ($c = \kappa = 0$), то $q_2 = q_{21}$. Функция q_{21} является монотонной. Ее асимптотика при $c = 0$ и $\hat{\gamma} \neq 0$, $\hat{b} \neq 0$ имеет вид

$$q_{21} \sim \frac{19}{8(1/45 + \hat{\gamma})^2 q^8}, \quad q \rightarrow 0, \quad q_{21} \sim -\frac{7}{8}, \quad q \rightarrow \infty.$$

На рис. 4 изображена сравнительная форма графиков q_{21} при $c = 0$ и q_2 для фиксированного значения $\hat{\gamma}$ (соответствующего глубине жидкости порядка 100 м и толщине льда порядка 1 м).

Рис. 4. Форма коэффициента q_2 при $\hat{\gamma} = 0.002$, $c = \kappa = 0$ (жирная кривая) и при $c = 0.01$, $\kappa = 0.009$ (тонкая кривая)

Коэффициент q_2 при $\gamma > 0$ меняет знак. Такое поведение q_2 является типичным для любого фиксированного γ (см. рис. 4).

Поведение решений радикально изменяется, когда q_2 меняет знак. Более того, в вырожденном случае, когда q_2 лежит в малой окрестности нуля, качественная картина малых ограниченных решений определяется коэффициентом

при членах следующего порядка малости в разложении полинома Q в (4.20) и отличается от случая конечного q_2 [49]. Здесь рассмотрим только невырожденный случай.

Поведение q_2 при учете инерции ледяного покрова существенно отличается от безинерционного случая $c = \kappa = 0$ при больших q (но при умеренных значениях физического значения волнового числа, а значит, для достаточно длинных волн: напомним, что обезразмеривание происходит при помощи глубины жидкости H , которая может быть значительной). В самом деле, из рис. 4, который изображает типичное поведение коэффициента q_2 , видно, что для достаточно больших q при учете инерции ледяного покрова график кривой $q_2(q)$ начинает возрастать из отрицательной области.

Следуя п. 4.4, сделаем в (4.20) следующее преобразование:

$$A = \rho_0 \exp(i(qx + \theta_0)), \quad B = \rho_1 \exp(i(qx + \theta_1)).$$

Вместо уравнений (5.20), получающихся из (4.20) указанной заменой, мы будем здесь использовать следующую форму этих уравнений [27]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du_0}{dx}\right)^2 &= 4\{u_0(G(\mu, u_0, K_0) + H_0) - K_0^2\}, \\ \frac{d(\theta_1 - \theta_0)}{dx} &= -K_0(u_0 u_1)^{-1}(u_0 Q(\mu, u_0, K_0) + G(\mu, u_0, K_0) + H_0), \end{aligned} \quad (6.29)$$

где $u_0 = \rho_0^2$, $u_1 = \rho_1^2$. Стационарные решения уравнений (6.29) (и, следовательно, периодические решения уравнений (4.20)) даются кратными корнями полинома

$$f(u_0) = u_0(G(\mu, u_0, K_0) + H_0) - K_0^2. \quad (6.30)$$

Производя масштабные преобразования

$$H_0 = \mu^2 h_0, \quad u_0 = |\mu| v_0, \quad K_0 = |\mu|^{3/2} k_0,$$

получим

$$f = |\mu|^3 g_0(v_0, h_0, k_0) + O(|\mu|^{7/2}),$$

где

$$g_0(v_0, h_0, k_0) = v_0 h_0 + \operatorname{sign} \mu q_1 v_0^2 - \frac{q_2}{2} v_0^3 - k_0^2.$$

Таким образом, кратные корни полинома (6.30) в низшем порядке по μ даются кратными корнями полинома $g_0(v_0, h_0, k_0)$. Эти корни лежат на кривых в плоскости (k_0, h_0) , которые параметрически задаются уравнениями

$$k_0 = \pm \sqrt{q_2 v_0^3 - \operatorname{sign} \mu q_1 v_0^2}, \quad h_0 = \frac{3}{2} q_2 v_0^2 - 2 \operatorname{sign} \mu q_1 v_0. \quad (6.31)$$

При $q_2 > 0$, $\mu > 0$ точка $(0, 0)$ множества (6.31) отвечает гомоклиническому решению:

$$u_0 = \frac{2\mu q_1}{q_2} \operatorname{ch}^{-2}(\sqrt{\mu q_1} x) + O(|\mu|^{3/2}).$$

Форма поверхности раздела вода–лед представляет собой уединенный волновой пакет

$$\eta = 1 \pm \frac{2 \operatorname{th} q}{q^2} \sqrt{\frac{2\mu q_1}{q_2}} \operatorname{ch}^{-1}(\sqrt{\mu q_1} x) \cos qx + O(|\mu|^{3/2}). \quad (6.32)$$

В случае $q_2 < 0$, $\mu < 0$ в точке $k_0 = 0$, $h_0 = -q_1^2/(2q_2)$ множества (6.31) получим так называемые темные солитоны

$$u_0 = \frac{q_1 \mu}{q_2} \operatorname{th}^2 \left(\sqrt{-\frac{q_1 \mu}{2}} x \right) + O(|\mu|^{3/2}).$$

Форма поверхности раздела для случая темных солитонов имеет вид

$$\eta = 1 \pm \frac{2 \operatorname{th} q}{q^2} \sqrt{\frac{\mu q_1}{q_2}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{-\mu q_1}{2}} x \right) \sin qx + O(|\mu|^{3/2}). \quad (6.33)$$

Имеет место результат о грубости солитонных решений “обрезанной системы” (5.20) в низшем приближении по μ (см. п. 5.3).

7. Заключение

В настоящей статье показано, что на поверхности жидкости под ледяным покровом имеют место три типа бифуркаций бегущих волн из состояния покоя; каждый из этих типов определяется своим множеством значений физических параметров. Вследствие этих бифуркаций возникают следующие типы уединенных волн, ответвляющихся от состояния покоя на поверхности раздела вода–лед:

- классические уединенные волны понижения уровня при большом положительном натяжении в ледовой пластине ($\hat{b} > 1/3$); форма поверхности в низшем порядке по μ дается (6.21);
- обобщенно-уединенные волны и уединенные волны с рябью при малом положительном, нулевом и отрицательном натяжении в ледовой пластине ($-\infty < \hat{b} < 1/3$); форма поверхности в низшем порядке по μ дается формулами (6.24) и (6.25) соответственно;
- уединенные волновые пакеты и темные уединенные волны в случае резонанса 1:1 при малом положительном, нулевом и отрицательном натяжении в ледовой пластине ($-\infty < \hat{b} < 1/3$); при $q \notin (A, B)$ (см. рис. 4) форма поверхности в низшем порядке по μ дается формулой (6.32) (уединенные волновые пакеты), при $q \in (A, B)$ форма поверхности в низшем порядке по μ дается формулой (6.33) (темные солитоны).

Первые две бифуркации происходят в плоскости $\hat{\lambda} = 1$, а третья – на поверхности (6.16). Для первых двух бифуркаций типы бегущих волн полностью аналогичны типам волн в случае капиллярно-гравитационных волн ($\gamma = 0$). Это обстоятельство может означать, что в данном диапазоне параметров распространение волн в этих двух средах происходит качественно аналогичным образом. Сильное основание для такого предположения доставляют также результаты статьи [8], где рассматривались изгибно-гравитационные волны конечной амплитуды в слое бесконечной глубины. В этой статье было обнаружено, что бесконечные ряды, приближающие неизвестные функции, начинают расходиться при дискретных значениях жесткости на изгиб, что было

интерпретировано как бифуркация из периодических решений. Аналогичные результаты для капиллярно-гравитационных волн известны с 1915 г.: в [78] было продемонстрировано, что при счетном количестве значений поверхностного натяжения ряды Стокса перестают быть асимптотическими и что это обстоятельство означает неединственность решения задачи.

Однако, как было указано в [79], при умеренных значениях поверхностного натяжения пространственные масштабы для гравитационно-капиллярных волн оказываются малыми (так, для учета капиллярных сил в случае длинных волн на поверхности воды глубина ее должна иметь порядок нескольких миллиметров). При этом очевидным образом становятся существенными вязкие эффекты. Было также показано экспериментально [80], что затухание гравитационно-капиллярных волн происходит быстро. Таким образом, сравнение теоретических и экспериментальных результатов не имеет особого смысла в этом случае.

С другой стороны, в случае гравитационно-изгибных волн пространственные масштабы существенно иные и какие-либо ограничения на глубины жидкости отсутствуют. Амплитуда волны может иметь достаточно большие значения даже для малых отклонений скорости волны от фазовой скорости бесконечно длинных волн. Таким образом, результаты настоящей статьи могут служить для описания волновых структур под ледяным покровом не только качественно, но и количественно.

При $b < 1/3$ имеют место обобщенно-удиненные волны и уединенные волны с рябью. В реальных условиях при

$$h = 1 \text{ м}, \quad E_0 = 5 \times 10^9 \text{ нм}^{-2}, \quad H = 10 \text{ м и } \sigma_0 = 0,$$

например, длина волны l периодической компоненты обобщенно-удиненной волны (см. (6.25)) имеет порядок 10 м и для возрастающих σ_0 увеличивается. Такие волны подпадают под описание в рамках модели пластины Кирхгофа–Лява, используемой здесь.

Как следует из изложенного в главе 2 монографии [74], существование обобщенно-удиненных волн обычно указывает на некоторые специфические свойства нестационарных процессов в системе, а именно на излучение коротковолновой составляющей при распаде локализованных возмущений. Период излучаемой волны равен периоду периодической составляющей обобщенно-удиненной волны. Для малых амплитуд ядра уединенной волны последняя распространяется практически без изменения формы, так как время распада в этом случае очень велико (см., например, [74]). Тем не менее при умеренных амплитудах процесс излучения играет значительную роль в динамике уединенной волны. Возникновение коротковолновых осцилляций в хвостах локализованных возмущений подтверждается экспериментальными наблюдениями в стратифицированных потоках жидкости над порогами (см., например, [81]). Практическое детектирование подобного излучения представляется возможным также и в случае изгибно-гравитационных волн вследствие больших характерных масштабов явления, которые позволяют пренебрегать эффектами вязкости.

В результате бифуркации резонанса 1:1 из параметрического множества, заданного (6.16), возникают уединенные волновые пакеты. Существует связь

между волнами огибающих нелинейного уравнения Шрёдингера и уединенными волновыми пакетами, возникающими в результате резонанса 1:1 в некоторой системе уравнений, описывающих волновые процессы ([82]-[84]; см. также [74; гл. 2]). Именно, уравнение Шрёдингера в самофокусирующей области имеет семейство нестационарных решений – солитонов огибающей, которые характеризуются двумя скоростями: скоростью огибающей и скоростью волнового пакета (наполнения), распространяющегося под огибающей. Солитоны огибающей представляют собой продукт модуляционной неустойчивости (самофокусировки) несущей периодической волны.

Уединенный волновой пакет является членом семейства солитонов огибающей в окрестности точки дисперсионной кривой, в которой фазовая и групповая скорости совпадают. Для тех волновых чисел, для которых коэффициент q_2 при ведущей нелинейности в квазинормальной форме отрицателен, периодические несущие волны малой амплитуды устойчивы и, как следствие, система обладает темными солитонами вместо уединенных волновых пакетов. Присутствие таких волн известно на поверхности раздела двух бесконечных слоев жидкости с капиллярными эффектами [31]. Переход от уединенных волновых пакетов к темным солитонам в этом случае имеет место, когда коэффициент q_2 меняет знак при $R = R_c = (21 - 8\sqrt{5})/11$, где R равняется отношению плотностей верхнего и нижнего слоев. При $R < R_c$ существуют уединенные волновые пакеты, что означает, что в окрестности резонансного волнового числа $q = (1 + R)/2$ имеет место самофокусировка периодических волн [49]. При $R > R_c$ уединенный волновой пакет замещается темным солитоном – индикатором модуляционной устойчивости. Таким образом, при переходе R через R_c фокусирующая окрестность резонансного волнового числа q замещается дефокусирующей окрестностью. В случае изгибно-гравитационных волн, рассматриваемых в настоящей статье, коэффициент q_2 также меняет знак. Физический механизм перехода резонансного волнового числа в дефокусирующую область, естественно, отличается от случая двуслойной жидкости (см. [74; п. 6.5]).

Основные этапы исследования рассматриваемой в настоящей статье задачи сводятся к следующим.

1. *Определение критического значения параметра бифуркации*, т.е. значения физического параметра задачи $v = v_0$, при малом возмущении $\mu = v - v_0$ которого, наряду с нулевым решением, система имеет нетривиальное решение.

2. *Запись системы уравнений, описывающих бегущие волны*, в виде конечномерной или бесконечномерной динамической системы (2.1).

3. *Определение движения собственных значений линейного оператора $\mathcal{A}(v)$* в окрестности мнимой оси при изменении параметра $\mu = v - v_0$. Бифуркации возникают при пересечении собственными значениями $\mathcal{A}(v)$ мнимой оси. В силу обратимости системы уравнений собственные значения $\mathcal{A}(v)$ выходят на мнимую ось парами при изменении параметра v и являются симметричными относительно мнимой и вещественной осей. В разделе 3 рассмотрены следующие типы бифуркаций: бифуркация, отвечающая простому резонансу, или бифуркация из нулевого волнового числа; бифуркация, отвечающая резонансу длинной и короткой волн; бифуркация резонанса 1:1.

4. *Понижение порядка динамической системы*. Формально понижение порядка осуществляется при помощи разбиения неизвестных функций на сумму двух слагаемых. Одно из этих слагаемых представляет собой линейную

комбинацию присоединенных и собственных векторов, соответствующих центральному спектру (мнимым собственным значениям), а другое является малой следующего порядка по амплитуде волн и представляет собой определяемую функцию от первого слагаемого. Уравнения на коэффициенты упомянутой линейной комбинации являются системой пониженного порядка. В случае бесконечномерной динамической системы указанное понижение порядка возможно лишь при выполнении дополнительных условий, которым должен удовлетворять оператор $\mathcal{A}$. В разделе 2 разобрана теорема о понижении порядка для бесконечномерных динамических систем.

5. Исследование системы обыкновенных уравнений, полученных после понижения порядка. Проводится асимптотическими методами, в частности приближением уравнений пониженного порядка квазинормальными формами этих уравнений. Уравнения в квазинормальной форме, отвечающие всем трем перечисленным типам бифуркаций, являются интегрируемыми. В разделе 4 даны формулировки общих результатов теории квазинормальных форм для обратимых систем, а также вывод уравнений в квазинормальной форме в рассматриваемых случаях.

6. Доказательство грубости решений типа уединенной волны асимптотических уравнений, т. е. доказательство того факта, что решения полной системы, приближаемые решениями асимптотических уравнений, являются также уединенными волнами соответствующих типов. Эти доказательства, как правило, сводятся к использованию теоремы о неявной функции в различных формах. Для бифуркаций, изображенных на рис. 1, такие доказательства известны для всех типов бегущих волн, кроме случая решений типа классических уединенных волн, которыми обладает система уравнений в квазинормальной форме для резонанса длинных и коротких волн: в случае общего положения эти уединенные волны соответствуют решениям типа обобщенно-уединенных волн полной системы. Типы локальных солитоноподобных структур – волн малой амплитуды, представляющих собой решения систем уравнений в каждом из трех случаев основных резонансов, рассматриваются в разделе 5.

8. Приложение

В данном разделе будет доказана справедливость резольвентных оценок, необходимая для выполнения теоремы о центральном многообразии (см. раздел 2) для системы уравнений (6.12).

ЛЕММА. Для каждого $b \in (-\infty, \infty)$ и $\gamma > 0$ существует постоянная $\kappa_0 > 0$ такая, что $\varpi = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $|\kappa| \geq \kappa_0$, принадлежат резольвентному множеству $\mathcal{A}$. Более того, для некоторой положительной постоянной C , не зависящей от κ , выполняются неравенства

- (i) $\|(\mathcal{A} - i\kappa)^{-1}\|_{X \rightarrow X} \leq C$,
- (ii) $\|(\mathcal{A} - i\kappa)^{-1}\|_{\tilde{Z} \rightarrow X} \leq C/\kappa$,
- (iii) $\|(\mathcal{A} - i\kappa)^{-2}\|_{\tilde{Z} \rightarrow X} \leq C/\kappa^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Спектр $\mathcal{A}$ лежит в области $|\operatorname{Re} \varpi| \geq \tilde{\beta} > 0$. Следовательно, для каждого $\hat{\beta} \in [0, \tilde{\beta})$ существует $c_0(\hat{\beta})$ такое, что для всех ϖ с $|\operatorname{Re} \varpi| \leq \hat{\beta}$

выполняются неравенства (см. раздел 2):

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{A}_1 - \varpi)^{-1}\|_{X_1 \rightarrow X_1} &\leq c_0(\widehat{\beta}), \\ \|(\mathcal{A}_1 - \varpi)^{-1}\|_{Z \rightarrow X_1} &\leq \frac{c_0(\widehat{\beta})}{1 + |\varpi|}, \\ \|(\mathcal{A}_1 - \varpi)^{-2}\|_{Z \rightarrow X_1} &\leq \frac{c_0(\widehat{\beta})}{1 + |\varpi|^2}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Заметим, что из равенства $(\mathcal{A} - \varpi)\mathbf{u} = \{e, e_1, e_2, \mathbf{W}\}^\top$, где $\mathbf{W} = (W_1, W_2)$, следуют равенства

$$\begin{aligned}s_1 - \varpi s &= e, \\ s_2 - \varpi s_1 &= e_1, \\ bs_1 - w_1(1) + \lambda[w_1] - \varpi \gamma s_2 &= \gamma e_2, \\ -w'_2 - \varpi w_1 &= W_1, \\ w'_1 - \varpi w_2 &= W_2\end{aligned}\tag{8.1}$$

и $w_2(0) = 0$. Из первых двух равенств в (8.1) получим $s_1 = e + \varpi s$, $s_2 = e_1 + \varpi e + \varpi^2 s$. Третье равенство в (8.1) записывается в виде

$$w_1(1) - \lambda[w_1] - \varpi(b - \varpi^2 \gamma)w_2(1) = \delta,$$

где $\delta = -\gamma\alpha_2 - p\gamma\alpha_1 + (b - p^2\gamma)\alpha$. Далее, возводя в квадрат последние два равенства в (8.1) и полагая $\varpi = i\kappa$, получим

$$|\mathbf{w}'|_0^2 + \kappa^2 |\mathbf{w}|_0^2 - 2\kappa \operatorname{Im} w_1(1)w_2^*(1) = |\mathbf{W}|_0^2,\tag{8.2}$$

здесь $|\cdot|_0$ обозначает норму в комплексном $L_2(0, 1)$ (или $L_2(0, 1) \times L_2(0, 1)$). Умножив третье равенство в (8.1) на $w_1^*(1)$ и используя четвертое, получим

$$i\left(\kappa(b + \gamma\kappa^2) + \frac{\lambda}{\kappa}\right)w_1(1)w_1^*(1) = |w_1(1)|^2 - \frac{i\lambda}{\kappa}w_1^*(1)[W_1] - \delta w_1^*.$$

Далее используем геометрическое неравенство $(c_1^2 + c_2^2) \geq 2c_1c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ и неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im} w_1(1)w_2^*(1)| &\leq \frac{1}{\kappa|b + \gamma\kappa^2 + \lambda\varepsilon^{-2}|} \left\{ (1 + 4\varepsilon^2)|w_1(1)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\varepsilon^2} \left(\frac{\lambda^2|W_1|_0^2}{\kappa^2} + (b + \kappa^2\gamma)^2|e|^2 + \gamma^2|e_2|^2 + \gamma^2\kappa^2|e_1|^2 \right) \right\}\end{aligned}$$

для любого положительного ε . Умножим последнее равенство в (8.1) на y^n для любого $n \in \mathbb{N}$, проинтегрируем и снова используем неравенство Гёльдера и геометрическое неравенство:

$$|w_1(1)|^2 \leq \frac{3n^2}{2n-1}|w_1|_0^2 + \frac{3\kappa^2}{2n+1}|w_2|_0^2 + \frac{3}{2n+1}|W_2|_0^2.\tag{8.3}$$

Выберем далее n и ε таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{6(1+2\varepsilon^2)}{|b|(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

для $b \neq 0$ и

$$\frac{6(1+2\varepsilon^2)}{\gamma(2n+1)} = \frac{1}{2}$$

для $b = 0$. Заметим, что для $b \neq 0$ и достаточно больших $\varkappa$

$$\frac{1}{|b + \gamma \varkappa^2|} < \frac{1}{|b|}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 2\varkappa |\operatorname{Im} w_1(1)w_2^*(1)| &\leq C_1(n)|w_1|_0^2 + \frac{1}{2}\varkappa^2|w_2|_0^2 + \frac{1}{2}|W_2|_0^2 \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon^2|b|} \left(\frac{\lambda^2|W_1|_0^2}{\varkappa^2} + \gamma^2|e_2|^2 + \gamma^2\varkappa^2|e_1|^2 \right) \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon^2} \left| b + \varkappa^2\gamma + \frac{\lambda}{\varkappa^2} \right| |e|^2, \end{aligned}$$

где

$$C_1(n) = \frac{(2n+1)n^2}{2(2n-1)}.$$

Комбинируя далее (8.2) и последнее неравенство, окончательно получим для $b \neq 0$

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}'|_0^2 + |\varkappa^2 - C_1(n)| |w_1|_0^2 + \frac{\varkappa^2}{2} |w_2|_0^2 &\leq |\mathbf{W}|_0^2 + \frac{1}{2} |W_2|_0^2 \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon^2|b|} \left(\frac{\lambda^2|W_1|_0^2}{\varkappa^2} + \gamma^2|e_2|^2 + \gamma^2\varkappa^2|e_1|^2 \right) + \frac{1}{2\varepsilon^2} \left| b + \varkappa^2\gamma + \frac{\lambda}{\varkappa^2} \right| |e|^2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

При $b = 0$

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}'|_0^2 + \left(\varkappa^2 - \frac{C_1(n)}{\varkappa^2} \right) |w_1|_0^2 + \left(\varkappa^2 - \frac{1}{2} \right) |w_2|_0^2 \\ \leq |\mathbf{W}|_0^2 + \frac{1}{2\varkappa^2} |W_2|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2\gamma} \left(\frac{\lambda^2|W_1|_0^2}{\varkappa^4} + \frac{\gamma^2}{\varkappa^2} |e_2|^2 + \gamma^2|e_1|^2 \right) \\ + \frac{1}{2\varepsilon^2} \left(\varkappa^2\gamma + \frac{\lambda}{\varkappa^2} \right) |e|^2. \end{aligned}$$

Из второго и третьего равенств в (8.1), а также из (8.3), (8.4) получаем следующую оценку для s_2 :

$$\begin{aligned} |s_2| &\leq \frac{1}{|b/\varkappa + \gamma\varkappa|} \left(\frac{b}{\kappa} |e_1| + \gamma|e_2| + |w_1(1)| + \lambda|[w_1]| \right) \\ &\leq \frac{1}{|b/\varkappa + \gamma\varkappa|} \left(\frac{|b|}{\varkappa} |e_1| + \gamma|e_2| + |w_1(1)| + |w_1|_0 \right) \\ &\leq \frac{1}{|b/\varkappa + \gamma\varkappa|} (C_2 + C_3\varkappa) \leq C. \end{aligned}$$

Аналогично, $|s_1| \leq C/\varkappa$, $|s| \leq C/\varkappa^2$, откуда немедленно следует оценка (i) леммы.

Оценка (ii) следует из (i), если положить e и e_1 равными нулю. В этом случае

$$|s_2| \leq \frac{C}{\varkappa}, \quad |s_1| \leq \frac{C}{\varkappa^2}, \quad |s| \leq \frac{C}{\varkappa^3}.$$

Для доказательства (iii) применим оператор $(\mathcal{A} - i\varkappa)^{-1}$ дважды и заметим, что после второго применения в соответствии с (ii) следует, что в (8.4)

$$|\mathbf{W}|_0 \leq \frac{C}{\varkappa}, \quad |e_2| \leq \frac{C}{\varkappa}, \quad |e_1| \leq \frac{C}{\varkappa^2}, \quad |e| \leq \frac{C}{\varkappa^3},$$

откуда резольвентная оценка (iii) следует немедленно.

Список литературы

- [1] Дж. Дж. Стокер, *Волны на воде. Математическая теория и приложения*, ИЛ, М., 1959, 617 с.; пер. с англ.: J. J. Stoker, *Water waves. The mathematical theory with applications*, Pure Appl. Math., **IV**, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London, 1957, xxviii+567 pp.
- [2] V. A. Squire, "On the critical angle for ocean waves entering shore fast ice", *Cold Reg. Sci. Technol.*, **10**:1 (1984), 59–68.
- [3] E. O. Tuck, "An inviscid theory for sliding flexible sheets", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **23**:4 (1982), 403–415.
- [4] L. Brevdo, A. Il'ichev, "Exponential neutral stability of a floating ice layer", *Z. Angew. Math. Phys.*, **49**:3 (1998), 401–419.
- [5] L. Brevdo, A. Il'ichev, "Multi-modal destabilization of a floating ice layer by wind stress", *Cold Reg. Sci. Technol.*, **33**:1 (2001), 77–89.
- [6] L. Brevdo, A. Il'ichev, "Uni-modal destabilization of a visco-elastic floating ice layer by wind stress", *Eur. J. Mech. A Solids*, **25**:3 (2006), 509–525.
- [7] J. Strathdee, W. H. Robinson, E. M. Haines, "Moving loads on ice plates of finite thickness", *J. Fluid Mech.*, **226** (1991), 37–61.
- [8] L. K. Forbes, "Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. I. High order series solution", *J. Fluid Mech.*, **169** (1986), 409–428.
- [9] L. K. Forbes, "Surface waves of large amplitude beneath an elastic sheet. II. Galerkin solutions", *J. Fluid Mech.*, **188** (1988), 491–508.
- [10] А. В. Марченко, "О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом", *ПММ*, **52**:2 (1988), 230–234; англ. пер.: A. V. Marchenko, "Long waves in shallow liquid under ice cover", *J. Appl. Math. Mech.*, **52**:2 (1988), 180–183.
- [11] А. Т. Ильичев, А. В. Марченко, "О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом", *Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа*, 1989, № 1, 88–95; англ. пер.: A. T. Il'ichev, A. V. Marchenko, "Propagation of long nonlinear waves in a ponderable fluid beneath an ice sheet", *Fluid Dynam.*, **24**:1 (1989), 73–79.
- [12] С. В. Музылев, "Волны в океане под ледяным покровом: основы теории и модельные задачи", *Современные проблемы динамики океана и атмосферы*, ГУ "Гидрометцентр России", "Триада ЛТД", М., 2010, 315–345.
- [13] R. G. Chowdhury, B. N. Mandal, "Motion due to fundamental singularities in finite depth water with an elastic solid cover", *Fluid Dynam. Res.*, **38**:4 (2006), 224–240.

- [14] D. Q. Lu, S. Q. Dai, "Generation of transient waves by impulsive disturbances in an inviscid fluid with an ice-cover", *Arch. Appl. Mech.*, **76**:1-2 (2006), 49–63.
- [15] D. Q. Lu, S. Q. Dai, "Flexural- and capillary-gravity waves due to fundamental singularities in an inviscid fluid of finite depth", *Internat. J. Engrg. Sci.*, **46**:11 (2008), 1183–1193.
- [16] А. А. Савин, А. С. Савин, "Возмущение ледяного покрова движущимся в жидкости диполем", *Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа*, 2012, № 2, 3–10; англ. пер.: A. A. Savin, A. S. Savin, "Ice cover perturbation by a dipole in motion within a liquid", *Fluid Dyn.*, **47**:2 (2012), 139–146.
- [17] А. Т. Ильичев, А. А. Савин, А. С. Савин, "Установление волны на ледяном покрове над движущимся в жидкости диполем", *Докл. РАН*, **444**:2 (2012), 156–159.
- [18] M. Hărăguș-Courceille, A. Il'ichev, "Three-dimensional solitary waves in the presence of additional surface effects", *Eur. J. Mech. B Fluids*, **17**:5 (1998), 739–768.
- [19] A. Afendikov, A. Mielke, "Bifurcation of homoclinic orbits to a saddle-focus in reversible systems with $SO(2)$ -symmetry", *J. Differential Equations*, **159**:2 (1999), 370–402.
- [20] А. Л. Афендииков, А. Мильке, "О семействах обратимых $SO(2)$ -инвариантных векторных полей с четырехкратным ненулевым собственным значением", *Докл. РАН*, **369**:2 (1999), 153–157; англ. пер.: A. L. Afendikov, A. Mielke, "Unfoldings of reversible vector fields with $SO(2)$ -symmetry and non-semisimple eigenvalue zero of multiplicity four", *Dokl. Math.*, **60**:3 (1999), 332–336.
- [21] М. А. Лаврентьев, "До теорії довгих хвиль", *Збірн. праць Ін-ту матем. АН УССР*, **1946**:8 (1947), 13–69; англ. пер.: M. A. Lavrent'ev, "On the theory of long waves", *Amer. Math. Soc. Transl.*, **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1954, 1–50.
- [22] K. O. Friedrichs, D. H. Hyers, "The existence of solitary waves", *Comm. Pure Appl. Math.*, **7**:3 (1954), 517–550.
- [23] J. T. Beale, "The existence of solitary water waves", *Comm. Pure Appl. Math.*, **30**:4 (1977), 373–389.
- [24] C. J. Amick, K. Kirchgässner, "A theory of solitary water-waves in the presence of surface tension", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **105**:1 (1989), 1–49.
- [25] G. Iooss, K. Kirchgässner, "Water waves for small surface tension: an approach via normal form", *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **122**:3-4 (1992), 267–299.
- [26] D. J. Korteweg, G. de Vries, "On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves", *Phil. Mag.* (5), **39**:240 (1895), 422–443.
- [27] G. Iooss, M. C. Pérouème, "Perturbed homoclinic solutions in reversible 1 : 1 resonance vector fields", *J. Differential Equations*, **102**:1 (1993), 62–88.
- [28] G. Iooss, K. Kirchgässner, "Bifurcation d'ondes solitaires en présence d'une faible tension superficielle", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **311**:5 (1990), 265–268.
- [29] S. M. Sun, M. C. Shen, "Exponentially small estimate for the amplitude of capillary ripples of a generalized solitary wave", *J. Math. Anal. Appl.*, **172**:2 (1993), 533–566.
- [30] E. Lombardi, "Orbits homoclinic to exponentially small periodic orbits for a class of reversible systems. Application to water waves", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **137**:3 (1997), 227–304.
- [31] F. Dias, G. Iooss, "Ondes solitaires 'noires' à l'interface entre deux fluides en présence de tension superficielle", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319**:1 (1994), 89–93.
- [32] C. J. Amick, J. F. Toland, "On solitary water-waves of finite amplitude", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **76**:1 (1981), 9–95.
- [33] C. J. Amick, J. F. Toland, "On periodic water-waves and their convergence to solitary waves in the long-wave limit", *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, **303**:1481 (1981), 633–669.

- [34] А. И. Некрасов, “Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости”, *Собрание сочинений*, т. 1, Физматгиз, М., 1961, 358–439.
- [35] J. L. Bona, D. K. Bose, R. E. L. Turner, “Finite-amplitude steady waves in stratified fluids”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **62**:4 (1983), 389–439.
- [36] C. J. Amick, R. E. L. Turner, “A global theory of internal solitary waves in two-fluid systems”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **298**:2 (1986), 431–484.
- [37] E. A. Karabut, “Asymptotic expansions in the problem of a solitary wave”, *J. Fluid Mech.*, **319** (1996), 109–123.
- [38] E. A. Karabut, “An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth”, *J. Fluid Mech.*, **372** (1998), 45–70.
- [39] T. J. Bridges, F. Dias, D. Menasce, “Steady three-dimensional water-wave patterns on a finite-depth fluid”, *J. Fluid Mech.*, **436** (2001), 145–175.
- [40] A. Иlichev, “Steady waves in a cold plasma”, *J. Plasma Phys.*, **55**:2 (1996), 181–194.
- [41] А. Т. Ильичев, “Уединенные волны в холодной плазме”, *Матем. заметки*, **59**:5 (1996), 719–728; англ. пер.: А. Т. Иlichev, “Solitary waves in a cold plasma”, *Math. Notes*, **59**:5 (1996), 518–524.
- [42] А. Т. Ильичев, “Уединенные волны-пакеты в холодной плазме”, *Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа*, 1996, №5, 154–161; англ. пер.: А. Т. Иlichev, “Solitary wave trains in a cold plasma”, *Fluid Dynam.*, **31**:5 (1996), 754–760.
- [43] F. Dias, A. Иlichev, “Interfacial waves with free-surface boundary conditions: an approach via a model equation”, *Phys. D*, **150**:3-4 (2001), 278–300.
- [44] A. Иlichev, “Faraday resonance: asymptotic theory of surface waves”, *Phys. D*, **119**:3-4 (1998), 327–351.
- [45] А. Т. Ильичев, “Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор)”, *Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа*, 2000, №2, 3–27; англ. пер.: А. Т. Иlichev, “Solitary waves in media with dispersion and dissipation (a review)”, *Fluid Dynam.*, **35**:2 (2000), 157–176.
- [46] Y. B. Fu, A. Т. Иlichev, “Localized standing waves in a hyperelastic membrane tube and their stabilization by a mean flow”, *Math. Mech. Solids*, **20**:10 (2015), 1198–1214.
- [47] A. Scarpellini, “Center manifolds of infinite dimensions. I. Main results and applications”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **42**:1 (1991), 1–32.
- [48] Л. Р. Волевич, А. Р. Ширикян, “Локальная динамика для полулинейных гиперболических уравнений высокого порядка”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:3 (2000), 3–50; англ. пер.: L. R. Volevich, A. R. Shirikyan, “Local dynamics for high-order semilinear hyperbolic equations”, *Izv. Math.*, **64**:3 (2000), 439–485.
- [49] F. Dias, G. Iooss, “Capillary-gravity interfacial waves in infinite depth”, *European J. Mech. B Fluids*, **15**:3 (1996), 367–393.
- [50] G. Iooss, P. Kirrmann, “Capillary gravity waves on the free surface of an inviscid fluid of infinite depth. Existence of solitary waves”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **136**:1 (1996), 1–19.
- [51] M. D. Groves, M. Haragus, S. M. Sun, “A dimension-breaking phenomenon in the theory of steady gravity-capillary water waves”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **360**:1799 (2002), 2189–2243.
- [52] A. R. Champneys, “Homoclinic orbits in reversible systems and their applications in mechanics, fluids and optics”, *Phys. D*, **112**:1-2 (1998), 158–186.
- [53] A. R. Champneys, “Homoclinic orbits in reversible systems. II. Multi-bumps and saddle-centres”, *CWI Quarterly*, **12**:3-4 (1999), 185–212.
- [54] A. Afendikov, A. Mielke, “Multi-pulse solutions to the Navier–Stokes problem between parallel plates”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **52**:1 (2001), 79–100.
- [55] A. Afendikov, B. Fiedler, S. Liebscher, “Plane Kolmogorov flows and Takens–Bogdanov bifurcation without parameters: the singly reversible case”, *Asymptot. Anal.*, **72**:1-2 (2011), 31–76.

- [56] A. T. Il'ichev, A. Yu. Semenov, "Stability of solitary waves in dispersive media described by a fifth-order evolution equation", *Theoret. Comput. Fluid Dyn.*, **3**:6 (1992), 307–326.
- [57] F. Dias, E. A. Kuznetsov, "On the nonlinear stability of solitary wave solutions of the fifth-order Korteweg–de Vries equation", *Phys. Lett. A*, **263**:1-2 (1999), 98–104.
- [58] T. J. Bridges, G. Derks, G. Gottwald, "Stability and instability of solitary waves of the fifth-order KdV equation: a numerical framework", *Phys. D*, **172**:1-4 (2002), 190–216.
- [59] В. А. Плисс, "О принципе сведения в теории устойчивости движения", *Докл. АН СССР*, **154**:5 (1964), 1044–1046; англ. пер.: V. A. Pliss, "The reduction principle in the theory of stability of motion", *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 247–250.
- [60] K. Kirchgässner, "Wave-solutions of reversible systems and applications", *J. Differential Equations*, **45**:1 (1982), 113–127.
- [61] K. Kirchgässner, "Nonlinearly resonant surface waves and homoclinic bifurcation", *Adv. Appl. Math.*, **26**, Academic Press, Boston, MA, 1988, 135–181.
- [62] A. Vanderbauwhede, G. Iooss, "Center manifold theory in infinite dimensions", *Dynam. Report. Expositions Dynam. Systems (N.S.)*, **1**, Springer, Berlin, 1992, 125–163.
- [63] G. Iooss, M. Adelmeyer, *Topics in bifurcation theory and applications*, 2nd ed., Adv. Ser. Nonlinear Dynam., **3**, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998, viii+186 pp.
- [64] G. Fischer, "Zentrumsmanigfaltigkeiten bei elliptischen Differentialgleichungen", *Math. Nachr.*, **115** (1984), 137–157.
- [65] A. Mielke, "Reduction of quasilinear elliptic equations in cylindrical domains with applications", *Math. Methods Appl. Sci.*, **10**:1 (1988), 51–56.
- [66] A. Mielke, "Über maximale L^p -Regularität für Differentialgleichungen in Banach- und Hilbert-Räumen", *Math. Ann.*, **277**:1 (1987), 121–133.
- [67] А. Т. Ильичев, "Уединенные и обобщенные уединенные волны в диспергирующих средах", *ПММ*, **61**:4 (1997), 606–620; англ. пер.: A. T. Il'ichev, "Isolated and generalized isolated waves in dispersive media", *J. Appl. Math. Mech.*, **61**:4 (1997), 587–600.
- [68] A. Il'ichev, "Stability of solitary waves in nonlinear composite media", *Phys. D*, **150**:3-4 (2001), 264–277.
- [69] C. Elphick, E. Tirapegui, M. E. Brachet, P. Coullet, G. Iooss, "A simple global characterization of normal forms of singular vector fields", *Phys. D*, **29**:1-2 (1987), 95–127.
- [70] Y. B. Fu, A. T. Il'ichev, "Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: existence, persistence, and the role of axial displacement", *IMA J. Appl. Math.*, **75**:2 (2010), 257–268.
- [71] A. Müller, R. Ettema, "Dynamic response of an icebreaker hull to ice breaking", *Proceedings of the 7th IAHR International Symposium on Ice*, v. II, Hamburg, W. Germany, 1984, 287–296.
- [72] A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927, xviii+643 pp.
- [73] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, 4-е изд., Теоретическая физика, **7**, Наука, М., 1987, 248 с.; нем. пер.: L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik*, v. VII: *Elastizitätstheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1989, x+223 pp.
- [74] А. Т. Ильичев, *Уединенные волны в моделях гидромеханики*, Физматлит, М., 2003, 256 с.
- [75] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
- [76] А. Т. Ильичев, В. Я. Томашпольский, "Солитоноподобные структуры на поверхности жидкости под ледяным покровом", *ТМФ*, **182**:2 (2015), 277–293; англ. пер.:

- A. T. Il'ichev, V. Ya. Tomashpolskii, "Soliton-like structures on a liquid surface under an ice cover", *Theoret. and Math. Phys.*, **182**:2 (2015), 231–245.
- [77] F. Dias, G. Iooss, "Capillary-gravity solitary waves with damped oscillations", *Phys. D*, **65**:4 (1993), 399–323.
- [78] J. R. Wilton, "On ripples", *Phil. Mag.* (6), **29**:173 (1915), 688–700.
- [79] J. A. Zufiria, "Symmetry breaking in periodic and solitary gravity-capillary waves on water of finite depth", *J. Fluid Mech.*, **184** (1987), 183–206.
- [80] T. B. Benjamin, "The solitary wave with surface tension", *Quart. Appl. Math.*, **40**:2 (1982/83), 231–234.
- [81] D. M. Farmer, J. D. Smith, "Tidal interaction of stratified flow with a sill in Knight Inlet", *Deep-Sea Res.*, **27**:3-4 (1980), 239–254.
- [82] T. R. Akylas, "Envelope solitons with stationary crests", *Phys. Fluids A*, **5**:4 (1993), 789–791.
- [83] R. Grimshaw, B. Malomed, E. Benilov, "Solitary waves with damped oscillatory tails: an analysis of the fifth-order Korteweg–de Vries equation", *Phys. D*, **77**:4 (1994), 473–485.
- [84] M. S. Longuet-Higgins, "Capillary-gravity waves of solitary type and envelope solitons on deep water", *J. Fluid Mech.*, **252** (1993), 703–711.

Андрей Теймуразович Ильичев
(Andrej T. Il'ichev)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: ilichev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
19.01.2015