Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич, Классификация m -спинорных клейновых поверхностей, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 2, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:45:14

Классификация m -спинорных клейновых поверхностей

С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич

Клейновы поверхности – это аналог римановых поверхностей для неориентируемых поверхностей и/или поверхностей с границей [1], [4]. Клейновы поверхности представляются в виде P/τ , где $\tau: P \rightarrow P$ – антиголоморфная инволюция римановой поверхности P . Категория клейновых поверхностей изоморфна категории вещественных алгебраических кривых. Топологические инварианты связной клейновой поверхности P/τ исчерпываются ее (алгебраическим) родом $g = g(P)$, числом овалов, т. е. компонент связности границы: $k = k(P/\tau) = |\partial(P/\tau)|$, и ориентируемостью $\varepsilon = \varepsilon(P/\tau)$. Положим $\varepsilon = 1$, если поверхность ориентируема (в этом случае $1 \leq k \leq g+1$, $k \equiv g+1 \pmod{2}$), и $\varepsilon = 0$, если поверхность неориентируема (в этом случае $0 \leq k \leq g$). Наряду с этими инвариантами удобно рассматривать геометрический род $\tilde{g} = \tilde{g}(P/\tau)$. Если $\varepsilon = 1$, то $\tilde{g}$ – это число ручек, которые надо приклеить к сфере с дырками, чтобы она стала гомеоморфной P/τ . Если $\varepsilon = 0$, то $\tilde{g}$ – это половина числа листов Мёбиуса, которые надо приклеить к сфере с дырками, чтобы она стала гомеоморфной P/τ . Далее мы считаем, что $\tilde{g} > 1$ и, в частности, $g > 1$.

m -спинорное расслоение на римановой или клейновой поверхности S – это линейное расслоение $e: L \rightarrow S$ такое, что расслоение $e^{\otimes m}: L^{\otimes m} \rightarrow S$ изоморфно кокасательному расслоению. Пространство модулей m -спинорных расслоений на римановых поверхностях описано в [2], [7], [8]. Эти расслоения и их пространства модулей естественно возникают в математической физике [9]. Пространство модулей компактных римановых поверхностей P рода $g > 1$ с m -спинорным расслоением связно при нечетном m и распадается на две компоненты связности при четном m . Эти компоненты определяются инвариантом Арфа $\delta = \delta(P, e) \in \{0, 1\}$. На каждой римановой поверхности рода g имеется m^{2g} m -спинорных расслоений, среди которых (при четном m) $2^{-1-g}m^{2g}(2^g + 1)$ расслоений с $\delta = 0$ и $2^{-1-g}m^{2g}(2^g - 1)$ расслоений с $\delta = 1$. Наша цель – найти топологические инварианты m -спинорных расслоений на клейновых поверхностях геометрического рода $\tilde{g} > 1$, найти число таких расслоений и описать пространство модулей клейновых поверхностей с m -спинорным расслоением. Для $m = 2$ это сделано в [3], [6].

ТЕОРЕМА 1. *Всякая компонента связности пространства модулей клейновых поверхностей рода g с m -спинорным расслоением гомеоморфна $\mathbb{R}^{3g-3}/\text{Mod}$, где Mod – дискретная группа.*

ТЕОРЕМА 2. *Если m нечетно, то m -спинорное расслоение существует на клейновой поверхности P/τ тогда и только тогда, когда $g(P) \equiv 1 \pmod{m}$; при этом число таких расслоений равно m^g . Более того, для нечетного m пространство модулей всех клейновых поверхностей рода g с m -спинорным расслоением связно.*

Далее мы считаем, что m четно.

ТЕОРЕМА 3. *Если m четно, то m -спинорное расслоение существует на клейновой поверхности P/τ тогда и только тогда, когда $g(P) \equiv 1 \pmod{m/2}$; число таких*

Со стороны первого автора статья подготовлена в ходе проведения работ по проекту № 15-01-0052 в рамках Программы “Научный фонд Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ)” в 2015–2016 гг. и с использованием средств субсидий на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ. Исследование второго автора выполнено при поддержке Leverhulme Trust (грант RPG-057).

DOI: 10.4213/rm9695

расслоений с инвариантом Арфа δ равно: 1) $m^g/2$, если $\varepsilon = k = 0$; 2) $2^{k-2}m^g$, если $\varepsilon = 0$, $k > 0$ или $m \equiv 0 \pmod{4}$, $\varepsilon = 1$; 3) $(2^{k-1} + 1)m^g/2$, если $m \equiv 2 \pmod{4}$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 0$; 4) $(2^{k-1} - 1)m^g/2$, если $m \equiv 2 \pmod{4}$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 1$.

Ограничение спинорного расслоения на овал может быть как тривиальным, так и нетривиальным расслоением. Обозначим через $k_0 = k_0(P/\tau, e)$ и $k_1 = k_1(P/\tau, e)$ число овалов с тривиальным и нетривиальным ограничением соответственно.

ТЕОРЕМА 4. *Пространство модулей кляйновых поверхностей с расслоением фиксированного типа $(g, \varepsilon, m, \delta, k_0, k_1)$ непусто тогда и только тогда, когда $k_1 m/2 \equiv (1 - g) \pmod{m}$. При $\varepsilon = 0$ это пространство связно. На любой кляйновой поверхности типа $(g, k_0 + k_1, 0)$ существует $C_k^{k_1} m^g/2$ расслоений типа $(g, 0, m, \delta, k_0, k_1)$.*

Далее мы считаем, что $k_1 m/2 \equiv (1 - g) \pmod{m}$ и $\varepsilon = 1$. В этом случае существуют дополнительные топологические инварианты. Прежде всего, это инвариант Арфа $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(P/\tau)$ римановой поверхности $P/\tau \setminus \partial(P/\tau)$. Кроме того, отношение подобия делит овалы на два класса. Овалы c_1 и c_2 называются подобными [5], если существует пересекающий их простой замкнутый контур d такой, что ограничение расслоения на него нетривиально и $\tau(d) = d$. Выберем один из классов подобия и обозначим через k_0^0 и k_1^0 число овалов этого класса, ограничение расслоения на которые тривиально и нетривиально соответственно. Положим $k_i^1 = k_i - k_i^0$. (Набор инвариантов $(k_0^0, k_1^0, k_0^1, k_1^1)$ определен с точностью до замены $k_i^j \mapsto k_i^{1-j}$.)

ТЕОРЕМА 5. *Пространство модулей расслоений с инвариантами $(g, \tilde{\delta}, m, k_0^0, k_1^0, k_0^1, k_1^1)$ связно. Если $m \equiv 0 \pmod{4}$ или $m \equiv 2 \pmod{4}$, $k_0 > 0$, то число расслоений такого типа на произвольной кляйновой поверхности отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\tilde{\delta} = 0$, и равно в этом случае $2^{1-k} m^g C_k^{k_1} C_{k_0}^{k_0^0} C_{k_1}^{k_1^0}$. При $m \equiv 2 \pmod{4}$ и $k_0 = 0$ число структур типа $(g, \tilde{\delta}, m, 0, k_1^0, 0, k_1^1)$ на произвольной кляйновой поверхности типа $(g, k_1^0 + k_1^1, 1)$ равно $(2^{-k} + 2^{-(g+k+1)/2}) m^g C_k^{k_1} C_{k_0}^{k_0^0} C_{k_1}^{k_1^0}$, если $\tilde{\delta} = 0$, и $(2^{-k} - 2^{-(g+k+1)/2}) m^g C_k^{k_1} C_{k_0}^{k_0^0} C_{k_1}^{k_1^0}$, если $\tilde{\delta} = 1$.*

Список литературы

- [1] N.L. Alling, N. Greenleaf, *Foundation of the theory of Klein surfaces*, Lecture Notes in Math., **219**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971, ix+117 pp. [2] T.J. Jarvis, *Internat. J. Math.*, **11**:5 (2000), 637–663. [3] С. М. Натанзон, *УМН*, **44**:3(267) (1989), 165–166. [4] С. М. Натанзон, *УМН*, **45**:6(276) (1990), 47–90. [5] С. М. Натанзон, *УМН*, **54**:6(330) (1999), 3–60. [6] С. М. Натанзон, *Модули римановых поверхностей, вещественных алгебраических кривых и их супераналоги*, МЦНМО, М., 2003, 176 с. [7] С. М. Натанзон, А. М. Пратусевич, *УМН*, **60**:2(362) (2005), 169–170. [8] S. Natanzon, A. Pratussevitch, *J. Lie Theory*, **19**:1 (2009), 107–148. [9] E. Witten, *Topological methods in modern mathematics* (Stony Brook, NY, 1991), Publish or Perish, Houston, TX, 1993, 235–269.

С. М. Натанзон (S. M. Natanzon)

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”; НИУ ВШЭ;

Институт теоретической и экспериментальной физики

им. А. И. Алиханова

E-mail: natanzons@mail.ru

Представлено С. К. Ландо

Принято редколлегией

22.09.2015

А. М. Пратусевич (A. M. Pratussevich)

University of Liverpool, Liverpool, UK

E-mail: annap@liv.ac.uk