Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, Замечание о радиусе инъективности квазиконформных погружений, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 1, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:12:12

Замечание о радиусе инъективности квазиконформных погружений

В. А. Зорич

1. Введение. Локально обратимое квазиконформное отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально. Это утверждение было сформулировано М. А. Лаврентьевым [1] для $n = 3$ и позднее доказано в работе [2].

Затем оно было развито в нескольких направлениях (см. обзоры [3], [4] и работы [5], [6]). Отметим лишь результат, нужный нам сейчас.

О. Мартио, С. Риккман и Ю. Вьясала [7] нашли следующее красивое развитие теоремы о глобальном гомеоморфизме, заодно обобщающее на случай квазиконформных отображений близкий результат Ф. Джона [8], относящийся к квазиизометриям.

Пусть Q_k – класс локально гомеоморфных отображений $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ единичного шара B^n в пространство $\mathbb{R}^n$ с коэффициентом квазиконформности $k_f \leq k$. Пусть r_f – радиус наибольшего концентрического с B^n шара, в котором f еще инъективно.

Утверждение: если $n \geq 3$, то $r(n, k) := \inf_{f \in Q_k} r_f > 0$.

Итак, каждое такое отображение инъективно в шаре радиуса $r(n, k)$, называемого *радиусом инъективности*. Радиус инъективности зависит только от коэффициента квазиконформности отображения и от размерности пространства.

Радиус инъективности, очевидно, меняется пропорционально радиусу исходного шара, поэтому, заменяя здесь шар B^n всем пространством $\mathbb{R}^n$, мы вновь получаем теорему о глобальном гомеоморфизме (формально получаем только инъективность, но это здесь главное, дальнейшее просто).

В работе [9] теорема о глобальном гомеоморфизме была распространена на погружения контактных структур. Естественно выяснить, существует ли и тут гарантированный радиус инъективности.

2. Иное доказательство классического результата. Мы уже отметили, что теорема Мартио, Риккмана и Вьясала (трех финских классиков области) о радиусе инъективности содержит теорему о глобальном гомеоморфизме. Покажем, как теорему о радиусе инъективности, в свою очередь, можно получить непосредственно из теоремы о глобальном гомеоморфизме.

Польза этого рассуждения в том, что его идея переносится, например, на случай контактных отображений, действующих в группе Гейзенберга, наделенной инвариантной метрикой Карно–Каратеодори.

Итак, допустим, что универсального радиуса инъективности нет.

Гомотетией и сдвигом можно добиться того, чтобы этот шар инъективности был единичным, а точки “0” и “1” (центр шара и некоторая точка его границы) оставались на месте. Разумеется, новое отображение будет определено не в единичном шаре, где оно теперь инъективно, а в большом шаре, размер которого растет до бесконечности по мере уменьшения радиуса инъективности начального отображения единичного шара.

Из последовательности так нормированных квазиконформных отображений можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактах.

В пределах единичного шара, где все отображения гомеоморфны, это можно сделать ввиду равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности отображений на любом компакте единичного шара. То же верно и в случае, когда на любом компакте степень отображений равномерно ограничена константой, зависящей от компакта. Ниже мы покажем, что это условие можно считать выполненным.

Предельное отображение не постоянно, а поскольку допредельные отображения были локально гомеоморфными и квазиконформными, полученное предельное отображение тоже будет локально гомеоморфным и квазиконформным.

Все, что пока сказано, конечно, справедливо и на плоскости применительно к локально гомеоморфным конформным и квазиконформным отображениям, например к отображению $z \mapsto \exp z$. В последнем случае можно брать одно и то же отображение $z \mapsto \exp z$ и расширяющуюся систему концентрических кругов, на которых оно рассматривается.

В случае же, когда размерность пространства больше двух, локально гомеоморфное квазиконформное отображение (погружение) евклидова пространства (или любого риманова или субриманова многообразия конформно параболического типа, например группы Гейзенберга с метрикой Карно–Каратеодори) в себя, как следует из теоремы о глобальном гомеоморфизме [2], [9], является глобально гомеоморфным (т. е. вложением). Но тогда допредельные отображения по топологическим причинам не могли на границе единичного шара иметь точки с одинаковым образом.

Тем самым, исходя из теоремы о глобальном гомеоморфизме доказано, что если отображение n -мерного ($n \geq 3$) единичного шара локально гомеоморфно и квазиконформно, то в некотором концентрическом шаре, радиус которого зависит только от коэффициента квазиконформности отображения и размерности пространства, это отображение инъективно.

Нам осталось пояснить, почему можно было считать, что степени всех отображений рассмотренной последовательности равномерно ограничены на компактах.

Исходное отображение, заданное в единичном шаре, априори могло иметь большое количество точек с одинаковым образом, и это количество могло расти при переходе от одного отображения к другому.

Но тогда мы бы сами выбрали маленький шарик инъективности, на границе которого была бы пара точек с общим образом, а также выбрали бы новый объемлющий шар, размеры которого велики по сравнению с размерами шарика инъективности и в котором точки с общим образом уже распределены так, что на компакте, содержащем шар инъективности, их число оценивается мерой самого компакта (количеством точек максимальной для этого компакта сети, размер ячеек которой соответствует размеру выбранного малого шарика инъективности). Дополнительным конформным мёбиусовым автоморфизмом большого шара маленький шар можно поместить в центр большого.

3. Заключительный комментарий. Проведенное рассуждение (или его идея), как уже отмечалось, может быть использовано не только в случае евклидова пространства. Однако оно не дает никакой количественной оценки получаемого радиуса инъективности. В работе [7], конструкции которой в значительной степени привязаны к евклидову пространству $\mathbb{R}^n$, такая оценка, зависящая от размерности пространства и коэффициента квазиконформности отображения, приведена. Есть определенные основания считать, и это было отмечено в обзорах [3], [4], что на самом деле в случае евклидова пространства имеется даже универсальная оценка, не зависящая от размерности n пространства при условии, что $n \geq 3$.

Список литературы

- [1] М. А. Lavrentieff, Докл. АН СССР, **20** (1938), 241–242. [2] В. А. Зорич, Матем. сб., **74(116):3** (1967), 417–433. [3] V. A. Zorich, Lecture Notes in Math., **1508**, Springer, Berlin, 1992, 132–148. [4] В. А. Зорич, УМН, **57:3(345)** (2002), 3–28. [5] M. Gromov, Ann. of Math. Stud., **97**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981, 183–213. [6] M. Gromov, Progr. Math., **152**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999, xx+585 pp. [7] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I, 1971, №488, 1–31. [8] F. John, Comm. Pure Appl. Math., **22:2** (1969), 265–278. [9] В. А. Зорич, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 81–85.

В. А. Зорич (V. A. Zorich)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vzor@mccme.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
17.10.2015