Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Е. Вейн, Т. Каппелер, Г. Кокарев, В. Крейг, А. Пятницкий, И. Чуешов, А. Ширикян, Л. Х. Элиассон, Сергей Борисович Куксин (к шестидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2016, том 71, выпуск 1, 177–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:24:03

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Сергей Борисович Куксин

(к шестидесятилетию со дня рождения)

2 марта 2015 г. исполнилось шестьдесят лет Сергею Борисовичу Куксину – математику с глубоким талантом и замечательному человеку, профессору Национального центра научных исследований Франции. Сергей Борисович Куксин – автор основополагающих идей в теории КАМ для уравнений в частных производных и в математических основах турбулентности. Ему принадлежат четыре монографии и около ста научных статей, опубликованных в престижных международных журналах. Сергей Борисович был приглашенным докладчиком Европейского конгресса математиков 1992 г. в Париже и Международного конгресса математиков 1998 г. в Берлине. В 2002 г. он был избран членом Эдинбургского Королевского общества, а в 2006 г. – почетным профессором Эдинбургского университета.

С. Б. Куксин родился в Углеуральске. В 1972 г. он окончил известную и единственную в то время в Харькове физико-математическую школу № 27. Многие известные математики и физики получили образование в этой школе. В частности, выпускником школы является филдсовский лауреат Владимир Дринфельд. После окончания школы Сергей Борисович поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Начиная с третьего курса

С. Б. Куксин становится учеником Марко Иосифовича Вишика, а в последующие годы он принимает активное участие в работе семинаров факультета и в обсуждении различных математических проблем, связанных с нелинейными уравнениями в частных производных (УрЧП), гамильтоновыми системами и КАМ-теорией. Многие из тех, кто учился и работал в это время на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ, помнят глубокие доклады С. Б. Куksина на семинарах, его живую реакцию на новые результаты и интересные комментарии. Беседы с ним всегда были очень содержательными для собеседников.

В 1981 г. С. Б. Куксин защитил кандидатскую диссертацию, посвященную нелинейным параболическим УрЧП. После окончания аспирантуры он продолжает заниматься нелинейными УрЧП и начинает исследования по бесконечномерной теории КАМ, что определяет его научные интересы на многие годы.

С. Б. Куксин сделал основополагающую работу в развитии теории КАМ для гамильтоновых возмущений интегрируемых УрЧП (см. [1], [2], [5]). Как правило, интегрируемые УрЧП имеют целые семейства квазипериодических по времени решений, и теоремы типа КАМ утверждают, что большинство этих решений сохраняются при достаточно малых возмущениях. Исследования С. Б. Куksина восьмидесятых и девяностых годов были посвящены, в частности, нелинейным интегрируемым УрЧП на ограниченном интервале при соответствующих граничных условиях, включая классические задачи, такие как уравнения Кортевега–де Фриза (КдВ) и синус-Гордона (сГ). Обзор его исследований по этой проблеме содержится в его книге “Analysis of Hamiltonians PDEs” (см. [6]), в которой представлен общий подход к теоремам типа КАМ в аналитическом случае для широкого класса УрЧП. Двумя ключевыми элементами являются абстрактная теорема КАМ для некоторого типа “полулинейных” гамильтоновых возмущений бесконечномерных интегрируемых систем, удовлетворяющих подходящему условию невырожденности, и теория нормальных форм для одного класса интегрируемых УрЧП, допускающих широкое семейство конечномерных инвариантных торов. В случае интегрируемых УрЧП, удовлетворяющих подходящему условию невырожденности, абстрактная теорема КАМ применима к малым гамильтоновым возмущениям таких УрЧП, записанных в построенных нормальных координатах. Ясно, что техника нормальных форм представляет собой важный инструмент для анализа гамильтоновых УрЧП в разных приложениях и поэтому имеет независимый интерес. Для того чтобы описать более подробно результаты о нормальных формах, представленные в [6], напомним, что гамильтоново УрЧП представляет собой эволюционное уравнение вида $\partial_t u = X_H(u)$, где $u(t, x)$ – вещественная, комплексная или векторная функция временной и пространственной переменных (t, x) , а через X_H обозначено гамильтоново векторное поле $J dH$, ассоциированное с гамильтонианом $H(u)$ и пуассоновой структурой J , которая также может зависеть от u . Такое УрЧП называется интегрируемым в смысле Лакса, если найдутся дифференциальные операторы $L = L_u$ и $P = P_u$ с аналитическими по u коэффициентами такие, что при подходящих условиях гладкости кривая $t \mapsto u(t)$ является решением уравнения $\partial_t u = X_H(u)$ тогда и только тогда, когда операторнозначная функция $t \mapsto L_{u(t)}$ удовлетворяет коммутаторному уравнению $\partial_t L_{u(t)} = [L_{u(t)}, P_{u(t)}]$. Отсюда следует, что спектр оператора $L_{u(t)}$ инвариантен под действием потока уравнения $\partial_t u = X_H(u)$. Класс интегрируемых УрЧП, рассмотренных в [6], представляет собой гамильтоновы УрЧП, которые интегрируемы по Лаксу и допускают конечномерные интегрируемые подсистемы, расслаивающиеся на инвариантные торы. Этому классу принадлежат классические интегрируемые УрЧП, такие как уравнения КдВ и сГ, для которых так называемые конечнозонные многообразия, подробно изученные в семидесятых годах методами алгебраической геометрии, являются интегрируемыми подсистемами, расслаивающимися на инвариантные торы.

Развивая подход И. М. Кричевера (см. его статью “[Perturbation theory in periodic problems for two-dimensional integrable systems](#)”, опубликованную в 1992 г. в сборнике

“Soviet Scientific Reviews”), С. Б. Куksин построил канонические координаты в окрестности U интегрируемой подсистемы S интегрируемого по Лаксу УрЧП при условии, что S допускает переменные действие-угол $(I, \theta): V \times \mathbb{T}^n \rightarrow S$. В случае уравнений КдВ и сГ угловые переменные даются известными формулами Итса–Матвеева. Наряду с переменными действие-угол (I, θ) строится бесконечная последовательность канонических координат, основанных на некотором множестве специальных решений задач, полученных *линеаризацией* уравнения $\partial_t u = X_H(u)$ на его решениях в S . Затем проводится детальный анализ канонических координат и строятся разложения гамильтонианов в этих координатах, что и приводит к требуемым нормальным формам.

Результаты, изложенные в книге [4], имели существенное влияние на эту область исследования. Дальнейшее развитие понятий и методов, связанных с упомянутыми выше ключевыми элементами, привело к результатам типа КАМ для квазилинейных гамильтоновых возмущений нелинейных интегрируемых УрЧП, а также к аналогичным результатам в случае C^k -гладкости. В то же время нет практически никаких результатов, касающихся возмущений и нормальных форм для нелинейных интегрируемых УрЧП в размерности два, таких как уравнение Кадомцева–Петвиашвили, и анализ этих уравнений – трудная задача для будущего.

Начиная с 1999 г. Сергей Борисович занимается также стохастическими уравнениями в частных производных, возникающими в математической физике. Класс изучаемых им задач включает проблему перемешивания при больших временах и исследования невязкого предела решений, а также усреднение гамильтоновых УрЧП, возмущенных трением и случайной внешней силой. Одна из первых его работ в этой области [7] была посвящена исследованию поведения решений двумерной системы Навье–Стокса и других диссипативных уравнений параболического типа с невырожденной случайной правой частью. Важность статистических решений связана с проблемой турбулентности в жидкости и была известна еще с основополагающих статей Колмогорова (1941) и Хопфа (1952), развитых в работах Фояша и Вишика–Комеча–Фурсикова семидесятых годов. К середине девяностых годов была установлена единственность распределения стационарного статистического решения при условии, что случайная внешняя сила нерегулярна по пространственным переменным. В работе [7] аналогичный результат доказан в регулярном случае, что потребовало новых идей, связанных с существованием конечного числа определяющих мод и единственностью гиббсовских распределений для некоторого класса систем статистической механики. Этот результат был развит в дальнейшем во многих работах (см. статьи [8]–[12], [15], [22], [23] и литературный обзор в книге [30]), что позволило установить единственность стационарного распределения для широкого класса стохастических УрЧП, а также закон больших чисел, центральную предельную теорему и принцип больших уклонов для рассматриваемых задач.

Важной проблемой при изучении турбулентности является описание поведения стационарного распределения, когда вязкость стремится к нулю. Этому посвящена работа [15], в которой рассматривается двумерная система Навье–Стокса на торе, возмущенная случайной силой, пропорциональной квадратному корню вязкости. Такой скейлинг является естественным, так как при фиксированном размере тора и исчезающей вязкости энергия, приходящая в систему, компенсируется диссипацией, и средняя энергия и энтропия стационарного решения остаются порядка единицы, тогда как число Рейнольдса стремится к бесконечности. С. Б. Куksиным было показано, что семейство стационарных мер, рассматриваемых в пространстве траекторий, является компактным в соответствующем функциональном пространстве и любая предельная точка представляет собой нетривиальное стационарное (в вероятностном смысле) решение двумерной системы Эйлера, причем на носителе меры имеет место теорема единственности решения. В дальнейших работах [18], [19], [21] было установлено, что любая предельная мера является бесконечномерной, а распределения функцио-

налов энергии и энтропии относительно нее обладают плотностью по мере Лебега. Отметим также, что аналоги этих результатов справедливы для широкого класса гамильтоновых УрЧП по крайней мере с двумя интегралами движения, таких как, например, нелинейное дефокусирующее уравнение Шрёдингера (см. [16]).

В случае, когда невозмущенная задача представляет собой интегрируемое гамильтоново уравнение в частных производных, можно дать более точное описание невязкого предела. Такие результаты были получены в работах [26], [28], [31]–[33]. Главным достижением этих работ является построение эффективных уравнений (представляющих собой нелокальные нелинейные УрЧП), описывающих поведение решений при двойном пределе, когда сначала время устремляется к бесконечности, а затем вязкость ν к нулю. Этот метод является далеко идущим обобщением на УрЧП классической теории усреднения Н. Н. Боголюбова для обыкновенных дифференциальных уравнений и принципа усреднения Р. З. Хасьминского для стохастических уравнений. Отметим, что методы и результаты упомянутых выше работ имеют непосредственное применение в теории слабой турбулентности В. Захарова; см. [34].

Еще одной областью интересов Сергея Борисовича является изучение квазилинейных эллиптических уравнений на отображениях многообразий. Как известно, классическая формула Лефшеца устанавливает соотношение между алгебраическим числом замкнутых траекторий динамической системы общего положения и числом Эйлера–Пуанкаре многообразия. Изучая решения квазилинейной системы Коши–Римана для отображений на двумерном торе, которую можно рассматривать как динамическую систему с комплексным временем, С. Б. Куксин [3], [4] получил результаты, аналогичные формуле Лефшеца. Впоследствии им была предложена программа, целью которой являлось изучение аналогичных соотношений для отображений на многомерных многообразиях, удовлетворяющих некоторой системе нелинейных УрЧП. Ключевым условием, наложенным на эту систему, является предположение о том, что пространство ее решений компактно и остается таковым при некоторых возмущениях. Для квазилинейной системы уравнений Коши–Римана это условие выполняется благодаря знаменитой теореме М. Громова о компактности для псевдоголоморфных кривых. В статье [13] доказано, что это условие выполняется также для некоторых возмущений уравнения гармонических отображений, когда многообразие-образ имеет неположительную секционную кривизну. Важным результатом этой статьи, имеющим независимый интерес, является геометрическое неравенство для L_2 -ширины геодезических гомотопий между отображениями; см. также [17]. Оказывается, что это неравенство тесно связано с некоторыми алгебраическими свойствами фундаментальной группы для многообразия-образа; независимое, чисто алгебраическое доказательство этого факта было дано М. Бридсоном и Дж. Хови в 2005 г. При выполнении условия компактности программа С. Б. Куксина была реализована в работах [14], [20] для довольно общих квазилинейных УрЧП. Одним из важных элементов этих работ является изучение бесконечномерных пространств модулей, образованных решениями таких УрЧП. А именно, авторы установили, что первый класс Штифеля–Уитни (ответственный за ориентацию) пространства модулей совпадает с первым классом когомологий, заданным в терминах $\mathbb{Z}_2$ -спектральных потоков линеаризованных операторов. Этот анализ важен для теорий типа Морса: он позволяет развивать понятие индекса (изолированного решения или подмногообразия решений) через спектральные свойства довольно общих эллиптических операторов. Круг идей вокруг этих результатов был развит и нашел дальнейшие применения в работах учеников С. Б. Куксина.

В 2000-х годах С. Б. Куксин снова вернулся к бесконечномерной теории КАМ, в частности к вопросам, связанным с КАМ-теоремами для уравнений в частных производных, заданных в областях высокой размерности. Из-за дополнительных резонансов, возникающих в таких задачах, применение теории КАМ для построения периодических и квазипериодических решений для УрЧП ограничивалось вначале

одномерным случаем по пространству, и единственный результат в многомерном случае был получен Ж. Бургэном, который решил задачу не с помощью подхода КАМ, а достаточно прямым исследованием уравнений для компонент Фурье решений. И на самом деле были некоторые сомнения в применимости техники КАМ для многомерного случая. Все вопросы были сняты благодаря серии работ С.Б. Куксина и Л.Х. Элиассона [24], [25], [29]. Ими был введен класс матриц и операторов Тёплица–Липшица и было показано, что они обладают в точности теми свойствами, которые нужны для применения теории КАМ в многомерном случае. В статье [29], опубликованной в “Annals of Mathematics”, авторы доказали, что если рассматривать нелинейное возмущение линейного уравнения Шрёдингера на d -мерном торе, то широкие семейства квазипериодических решений сохраняются также для нелинейного уравнения. Их доказательство дает не только существование таких решений, но и их линейную устойчивость – дополнительное свойство, которое трудно получить прямым подходом Ж. Бургэна. Существенной особенностью доказательства этой теоремы является изучение приводимости гомологических уравнений, возникающих вследствие линеаризации задачи при реализации схемы Ньютона в теореме КАМ. С этим тесно связана работа [27], в которой доказывается, что матрицы Тёплица–Липшица могут быть использованы для доказательства приводимости уравнений Шрёдингера с квазипериодическим по времени потенциалом. Хотя это свойство и изучалась в более ранних работах в одномерном случае, статья [27] была первой, где оно было установлено в многомерной ситуации.

В личной жизни Сергей Борисович – интеллектуально активный и физически здоровый человек. За его научной требовательностью скрывается теплосердечная личность. Выделяющиеся глубиной и технической сложностью работы Сергея Борисовича мотивированы физическими задачами и замечательным математическим вкусом и служат источником вдохновения для многих его коллег, работающих как в Париже, так и в Москве и в других крупных центрах. У Сергея Борисовича замечательная семья: его жена Юлия, высококвалифицированный филолог, работает в IT-компании в парижском регионе, сын – финансовый эксперт в Цюрихе, а дочь делает первые успешные шаги высшего образования в одной из ведущих школ Франции. Благодаря их опыту проживания в разных странах, все они свободно владеют многими языками, включая русский, французский и английский (с эдинбургским акцентом). Сергей Борисович высоко ценит время, проведенное с ними, будь то посещение культурного мероприятия или прогулка на природе. Последнему способствует их семейный дом, находящийся в непосредственной близости от лесов вокруг Парижа (и позволяющий наслаждаться грибными сезонами). Вся его семья имеет множество непрофессиональных интересов, включающих активные виды спорта, которые связаны в основном с горами и морем. Сергей Борисович – заядлый лыжник зимой, а в другие сезоны его любимые занятия – пеший туризм и кемпинг в горах с семьей. Они также увлекаются виндсерфингом на Средиземном море и походами в Исландии и в Канаде (сопровождающимися плаванием, когда это позволяет температура воды).

Сергей Борисович Куксин встретил свое шестидесятилетие в расцвете творческих сил. Мы желаем ему долгой плодотворной жизни, новых научных достижений и талантливых учеников.

Е. Вейн, Т. Канпелер, Г. Кокарев, В. Крейг,
А. Пятницкий, И. Чуешов, А. Ширкиян, Л.Х. Элиассон

Список цитированных работ С.Б. Куксина

- [1] “Гамильтоновы возмущения бесконечномерных линейных систем с мнимым спектром”, *Функц. анализ и его прил.*, **21:3** (1987), 22–37; англ. пер.: “Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with an imaginary spectrum”, *Funct. Anal. Appl.*, **21:3** (1987), 192–205.

- [2] “Теория возмущений условно-периодических решений бесконечномерных гамильтоновых систем и ее приложения к уравнению Кортевега–де Фриза”, *Матем. сб.*, **136(178)**:3(7) (1988), 396–412; англ. пер.: “Perturbation theory for quasiperiodic solutions of infinite-dimensional Hamiltonian systems, and its application to the Korteweg–de Vries equation”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:2 (1989), 397–413.
- [3] “Pseudoholomorphic 2-tori in $\mathbf{T}^4$ ”, *Differential Geom. Appl.*, **6**:2 (1996), 109–119.
- [4] “Double-periodic solutions of nonlinear Cauchy–Riemann equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **49**:7 (1996), 639–676.
- [5] “Invariant Cantor manifolds of quasi-periodic oscillations for a nonlinear Schrödinger equation”, *Ann. of Math. (2)*, **143**:1 (1996), 149–179 (with J. Pöschel).
- [6] *Analysis of Hamiltonian PDEs*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **19**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000, xii+212 pp.
- [7] “Stochastic dissipative PDE’s and Gibbs measures”, *Comm. Math. Phys.*, **213**:2 (2000), 291–330 (with A. Shirikyan).
- [8] “A coupling approach to randomly forced nonlinear PDE’s. I”, *Comm. Math. Phys.*, **221**:2 (2001), 351–366 (with A. Shirikyan).
- [9] “Ergodicity for the randomly forced 2D Navier–Stokes equations”, *Math. Phys. Anal. Geom.*, **4**:2 (2001), 147–195 (with A. Shirikyan).
- [10] “On exponential convergence to a stationary measure for nonlinear PDEs perturbed by random kick-forces, and the turbulence limit”, *Partial differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **206**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 161–176.
- [11] “A coupling approach to randomly forced nonlinear PDE’s. II”, *Comm. Math. Phys.*, **230**:1 (2002), 81–85 (with A. Piatnitski, A. Shirikyan).
- [12] “Coupling approach to white-forced nonlinear PDEs”, *J. Math. Pures Appl. (9)*, **81**:6 (2002), 567–602 (with A. Shirikyan).
- [13] “Perturbations of the harmonic map equation”, *Commun. Contemp. Math.*, **5**:4 (2003), 629–669 (with T. Kappeler, V. Schroeder).
- [14] “Квазилинейные эллиптические дифференциальные уравнения на отображениях многообразий. I”, *Алгебра и анализ*, **15**:4 (2003), 1–60 (совм. с Г. Кокаревым); англ. пер.: “Quasilinear elliptic differential equations for mappings between manifolds. I”, *St. Petersburg Math. J.*, **15**:4 (2004), 469–505 (with G. Kokarev).
- [15] “The Eulerian limit for 2D statistical hydrodynamics”, *J. Statist. Phys.*, **115**:1-2 (2004), 469–492.
- [16] “Randomly forced CGL equation: stationary measures and the inviscid limit”, *J. Phys. A*, **37**:12 (2004), 3805–3822 (with A. Shirikyan).
- [17] “Poincaré inequalities for maps with target manifold of negative curvature”, *Mosc. Math. J.*, **5**:2 (2005), 399–414 (with T. Kappeler, V. Schroeder).
- [18] “A family of balance relations for the two-dimensional Navier–Stokes equations with random forcing”, *J. Statist. Phys.*, **118**:3-4 (2005), 437–449 (with O. Penrose).
- [19] “Remarks on the balance relations for the two-dimensional Navier–Stokes equation with random forcing”, *J. Statist. Phys.*, **122**:1 (2006), 101–114.
- [20] “Quasi-linear elliptic differential equations for mappings of manifolds. II”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **31**:1 (2007), 59–113 (with G. Kokarev).
- [21] “On distribution of energy and vorticity for solutions of 2D Navier–Stokes equation with small viscosity”, *Comm. Math. Phys.*, **284**:2 (2008), 407–424.
- [22] “Stochastic 3D Navier–Stokes equations in a thin domain and its α -approximation”, *Phys. D*, **237**:10-12 (2008), 1352–1367 (with I. Chueshev).
- [23] “Random kick-forced 3D Navier–Stokes equations in a thin domain”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **188**:1 (2008), 117–153 (with I. Chueshev).
- [24] “Infinite Töplitz–Lipschitz matrices and operators”, *Z. Angew. Math. Phys.*, **59**:1 (2008), 24–50 (with H. L. Eliasson).

- [25] “Four lectures on KAM for the non-linear Schrödinger equation”, *Hamiltonian dynamical systems and applications*, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., Springer, Dordrecht, 2008, 179–212 (with L. H. Eliasson).
- [26] “Khasminskii–Whitham averaging for randomly perturbed KdV equation”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **89**:4 (2008), 400–428 (with A. L. Piatnitski).
- [27] “On reducibility of Schrödinger equations with quasiperiodic in time potentials”, *Comm. Math. Phys.*, **286**:1 (2009), 125–135 (with H. L. Eliasson).
- [28] “Damped-driven KdV and effective equations for long-time behaviour of its solutions”, *Geom. Funct. Anal.*, **20**:6 (2010), 1431–1463.
- [29] “KAM for the nonlinear Schrödinger equation”, *Ann. of Math.* (2), **172**:1 (2010), 371–435 (with L. H. Eliasson).
- [30] *Mathematics of two-dimensional turbulence*, Cambridge Tracts in Math., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, xvi+320 pp. (with A. Shirikyan).
- [31] “Weakly nonlinear stochastic CGL equations”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Statist.*, **49**:4 (2013), 1033–1056.
- [32] “The KdV equation under periodic boundary conditions and its perturbations”, *Nonlinearity*, **27**:9 (2014), R61–R88 (with Huang Guan).
- [33] “The limit of small Rossby numbers for randomly forced quasi-geostrophic equation on β -plane”, *Nonlinearity*, **28**:7 (2015), 2319–2341 (with A. Maiocchi).
- [34] “Derivation of a wave kinetic equation from the resonant-averaged stochastic NLS equation”, *Phys. D*, **309** (2015), 65–70 (with A. Maiocchi).