Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Ганиходжаев, Ф. М. Мухамедов, Эргодические свойства квантовых квадратичных стохастических процессов, определенных на алгебрах фон Неймана, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 243–244

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 13:48:26

**ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ
КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ,
ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА**

Н. Н. ГАНИХОДЖАЕВ, Ф. М. МУХАМЕДОВ

В работах [1], [2] были определены квадратичные стохастические процессы, которые естественным образом возникают при изучении некоторых моделей со взаимодействиями. В [3] были введены квантовые квадратичные стохастические процессы на алгебрах фон Неймана, которые в частном случае совпадают с квадратичными стохастическими процессами.

В предлагаемой работе изучаются некоторые эргодические свойства квантовых квадратичных стохастических процессов.

Пусть M – алгебра фон Неймана. Через S и S^2 обозначим совокупности всех нормальных состояний на M и $M \otimes M$ соответственно. Пусть далее $\{P^{s,t}: M \rightarrow M \otimes M, s, t \in \mathbb{R}_+, t - s \geq 1\}$ – семейство линейных операторов и $U: M \otimes M \rightarrow M \otimes M$ – оператор, который для элементов вида $x \otimes y$ определяется как $U(x \otimes y) = y \otimes x$ и далее продолжается на все $M \otimes M$ по линейности с сохранением нормы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что семейство линейных операторов $\{P^{s,t}, s, t \in \mathbb{R}_+\}$ определяет *квантовый квадратичный стохастический процесс* (к.к.с.п.), если каждый оператор $P^{s,t}$ ультраслабо непрерывен и при этом выполняются следующие соотношения:

(i) $P^{s,t}1_M = 1_{M \otimes M}$ для всех $s, t \in \mathbb{R}_+$, где 1_M и $1_{M \otimes M}$ – единицы алгебр M и $M \otimes M$ соответственно;

(ii) $P^{s,t}(M_+) \subset (M \otimes M)_+$ для всех $s, t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) $P^{s,t}(M)$ симметрично, т.е. $P^{s,t}(M) \subseteq \{x \in M \otimes M : Ux = x\}$ для всех $s, t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) (аналог уравнения Колмогорова–Чепмена) для начального состояния $\omega_0 \in S$ и произвольных $s, \tau, t \in \mathbb{R}_+$ таких, что $\tau - s \geq 1, t - \tau \geq 1$,

либо

$$(iv)_A \quad P^{s,t}x = (P^{s,\tau} \circ \omega_\tau)(P^{\tau,t}x), x \in M,$$

либо

$$(iv)_B \quad P^{s,t}x = \omega_s \otimes \omega_s(P^{s,\tau} \circ P^{s,\tau})(P^{\tau,t}x), x \in M,$$

где $\omega_\tau(x) = \omega_0 \otimes \omega_0(P^{0,\tau}x)$, $x \in M$, и по определению полагается:

$$\begin{aligned} (P^{s,t} \circ \omega_t)(x \otimes y) &:= \omega_t(y)P^{s,t}x, \\ \omega_t \otimes \omega_t(x \otimes y \circ a \otimes b) &:= \omega_t(y)\omega_t(b)x \otimes a, \\ (P^{s,t} \circ P^{s,t})(x \otimes y) &:= P^{s,t}x \circ P^{s,t}y. \end{aligned}$$

Если к.к.с.п. удовлетворяет равенству $(iv)_A$ или $(iv)_B$, то будем говорить, что к.к.с.п. имеет *тип* (A) или *тип* (B) соответственно.

Будем говорить, что к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ *однороден*, если $P^{s,t}$ зависит только от $t - s$, для любых s и t таких, что $t - s \geq 1$.

Множество всех непрерывных (ультраслабо непрерывных) функционалов на M обозначим через $M^*(M^*)$. Через $P_*^{s,t}$ обозначим оператор, действующий из $(M \otimes M)_*$ в M^* и определенный следующим образом: $P_*^{s,t}(\varphi)(x) = \varphi(P^{s,t}x)$, $\varphi \in (M \otimes M)_*$, $x \in M$. Норму на M^* будем обозначать $\|\cdot\|_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет *эргодическому принципу*, если для любых $\varphi, \psi \in S^2$ и $s \in \mathbb{R}_+$ имеет место $\lim_{t \rightarrow \infty} \|P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi\|_1 = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – алгебра фон Неймана и $\{P^{s,t}\}$ – к.к.с.п. на M . Для к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ выполнен эргодический принцип тогда и только тогда, когда найдутся такое всюду плотное множество $\mathfrak{F} \subset S^2$ и действительное число $\lambda \in [0, 1)$, что для каждой пары $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}$ и $s \in \mathbb{R}_+$ будет выполнено неравенство

$$\|P_*^{s,t}\varphi - P_*^{s,t}\psi\|_1 \leq \lambda \|\varphi - \psi\|_1$$

хотя бы для одного $t = t(s, \varphi, \psi)$.

Заметим, что аналогичная теорема была доказана в [4] для однородного марковского процесса с дискретным временем, определенного на упорядоченном пространстве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ на M удовлетворяет *условию регулярности* (экспоненциальной), если существует состояние $\mu_1 \in S$ такое, что для любого $\varphi \in S^2$ и $s \in \mathbb{R}_+$ $\|P_*^{s,t}\varphi - \mu_1\|_1 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ ($\|P_*^{s,t}\varphi - \mu_1\|_1 \leq de^{-bt}$ для любых $\varphi \in S^2$ и $t \geq t_0$, где $d, b > 0$).

Будем говорить, что к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет *условию* (A_1) на $\mathfrak{A} \subset S^2$, если существуют число $\lambda \in (0, 1]$ и семейство состояний $\{\mu_s^t : s, t \in \mathbb{R}_+, t - s \geq 1\} \subset S$ такие, что для любых $\varphi \in \mathfrak{A}$, $s \in \mathbb{R}_+$ найдется число $t_0 = t_0(\varphi, s)$, для которого $\varphi \circ P^{s,t} \geq \lambda \mu_s^t$ при всех $t \geq t_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ на алгебре фон Неймана M удовлетворяет *условию* (A_1) на множестве $\mathfrak{A}$, выпуклая оболочка которого $\sigma((M \otimes M)_*, M \otimes M)$ -слабо плотна в S^2 . Тогда к.к.с.п. $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет эргодическому принципу.

Доказательство получается непосредственной проверкой условия теоремы 1.

Заметим, что теорема 2 обобщает результаты работы [5].

ЛЕММА 1. Пусть $\{P^{s,t}\}$ – однородный к.к.с.п. на алгебре фон Неймана M . Тогда имеет место равенство $\omega_2 = \omega_t$ при всех $t \geq 2$.

Из этой леммы и теоремы 1 можно получить следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{P^{s,t}\}$ – однородный к.к.с.п. на алгебре фон Неймана M . Квантовый квадратичный стохастический процесс $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет *условию регулярности* тогда и только тогда, когда найдутся такое всюду плотное множество $\mathfrak{F} \subset S^2$ и действительное число $\lambda \in [0, 1)$, что для каждой пары $\varphi, \psi \in \mathfrak{F}$ будет выполнено неравенство

$$\|P_*^{0,\tau}\varphi - P_*^{0,\tau}\psi\|_1 \leq \lambda \|\varphi - \psi\|_1$$

хотя бы для одного $\tau = \tau(\varphi, \psi)$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{P^{s,t}\}$ – однородный к.к.с.п. на алгебре фон Неймана M . Квантовый квадратичный стохастический процесс $\{P^{s,t}\}$ удовлетворяет *условию экспоненциальной регулярности* тогда и только тогда, когда найдутся такое всюду плотное множество $\mathfrak{F} \subset S^2$ и действительное число $\lambda \in [0, 1)$, что при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$ выполнено неравенство

$$\|P_*^{0,\tau}\varphi - P_*^{0,\tau}\psi\|_1 \leq \lambda \|\varphi - \psi\|_1 \quad \text{для всех } \varphi, \psi \in \mathfrak{F}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н. // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1052–1056. [2] Sarumsakov T. A., Ganikhodzhaev N. N. // J. Theor. Probab. 1990. V. 3. № 1. P. 51–70. [3] Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М. // Докл. АН РУз. 1997. № 3. С. 13–16. [4] Сарымсаков Т. А., Зимаков Н. П. // Операторные алгебры и функциональные пространства. Ташкент: Фан, 1988. С. 45–53. [5] Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М. // Узб. матем. журн. 1997. № 3. С. 8–20.