Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, Об оценках первого собственного значения
в некоторых задачах Штурма–Лиувилля, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 73–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm970>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:38:09

УДК 517.5

посвящается Ольге Арсеньевне Олейник

ОБ ОЦЕНКАХ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ
В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Ю. В. ЕГОРОВ, В. А. КОНДРАТЬЕВ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	73
§ 1 . Об оценках первого собственного значения в одной задаче Штурма–Лиувилля	77
§ 2 . О других оценках первого собственного значения	84
§ 3 . О более общей задаче Штурма–Лиувилля	91
§ 4 . Об оценках всех собственных значений	100
§ 5 . Об оценке первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля для оператора высокого порядка	105
§ 6 . О задаче Лагранжа	110
§ 7 . Приложение. Технические леммы	121
Список литературы	141

Введение

Задачи оптимизации собственных значений проблемы Штурма–Лиувилля за счет выбора потенциала из некоторого фиксированного класса функций естественно возникают в теории упругости в процессе поиска наиболее прочных конструкций из данного материала.

Примером такой задачи служит знаменитая задача Лагранжа: найти наиболее прочную колонну, которая является телом вращения плоской кривой вокруг некоторой прямой, расположенной в ее плоскости. Для колонны единичной длины и единичного объема прочность означает сопротивление относительно сжатия вдоль оси вращения. Пусть λ – величина нагрузки вдоль оси и u – смещение колонны в ортогональном к оси направлении. Потенциальная энергия колонны равна

$$T = \int_0^1 EI(x)|u''(x)|^2 dx - \lambda \int_0^1 |u'(x)|^2 dx,$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00653).

где $I(x)$ – второй момент площади сечения колонны и E – модуль Юнга. Если λ достаточно мало, то минимальное значение T в классе $\mathring{H}_2^2(0, 1)$ равно 0. *Критической нагрузкой* λ_1 называется максимальное значение λ , при котором $\inf_u T = 0$. Таким образом,

$$(0.1) \quad \lambda_1 = \inf_{u \in \mathring{H}_2^2(0, 1)} F[Q, y], \quad F[Q, y] \equiv \frac{\int_0^1 EI(x) |u''(x)|^2 dx}{\int_0^1 |u'(x)|^2 dx}.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала F имеет вид

$$(0.2) \quad (Q(x)y'')'' + \lambda y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Если $S(x)$ – площадь сечения колонны при $0 < x < 1$, то $Q(x) = S^2(x)$. При этом объем колонны фиксирован, т.е.

$$(0.3) \quad \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 Q^{1/2}(x) dx = 1, \quad Q(x) \geq 0.$$

В действительности можно рассматривать колонну с сечением произвольной формы, если все эти сечения подобны одному из них. Если колонна неоднородна, но составлена из слоев с различными упругими свойствами (с сохранением подобия), то условие (0.3) можно заменить условием

$$(0.4) \quad \int_0^1 Q^\alpha(x) dx = 1, \quad Q(x) \geq 0,$$

при некотором $\alpha \in]0, 1]$.

Задача (0.2), (0.3) рассматривалась впервые Лагранжем [39], но его решение некорректно. Первое успешное исследование этой задачи было проведено в 1961 году Келлером и Таджбахшем в [34], [69]. Они показали, что для оптимальной колонны

$$S(x) = \frac{4}{3} \sin^2 \theta(x), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$\theta(x) - \frac{1}{2} \sin 2\theta(x) + \frac{\pi}{2} = 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Удивительный факт состоит в том, что $S(x)$ обращается в нуль при $x = \frac{1}{4}$ и при $\frac{3}{4}$. Этот результат вызвал поток критики.

В 1977 году Ольхофф и Расмуссен [50] показали, что первое собственное значение задачи (0.2) может быть кратным (двойным) и потому формально доказательство в [69] не корректно, так как зависимость λ_1 от Q не является дифференцируемой. Они предложили другое решение, основанное на вычислительной процедуре, но их результат ошибочен. Следует отметить, что ряд авторов, например, Майерс и Спиллерс [46] или Барнес [11], не согласились с критикой в [50].

Работа [18] Кокса и Овертона содержит новое доказательство ошибочности результатов [69]. В ней “показано”, что заменив первую собственную функцию $y(x)$ задачи (0.2) на отрезке $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ постоянной, равной $y(\frac{1}{4}) = y(\frac{3}{4})$, мы получаем другую собственную функцию $y_1(x)$ той же задачи, причем значение функционала F на y_1 в четыре раза меньше, чем $F[Q, y]$. Однако, такое утверждение абсурдно, поскольку на отрезках $[0, \frac{1}{4}]$ и $[\frac{3}{4}, 1]$ функция y_1 удовлетворяет тому же уравнению, что и y , так что без всяких вычислений видно, что значения функционала F на y_1 и y должны совпадать. Отметим также ошибку в доказательстве теоремы 2.2, основанном на предположении, что $v(x)$ – четная функция.

Попытки исправить доказательство Келлера–Таджбахша привели к потоку статей на тему о необходимых условиях оптимальности собственного значения оператора в том случае, когда оно кратно. См. работы А. С. Братуся [12], А. С. Братуся и А. П. Сейраняна [13], Накамуры [47], Кокса и Овертона [18], Овертона [52], [53], А. П. Сейраняна [64] и другие.

Для того чтобы понять суть затруднений, возникающих в случае кратного собственного значения, достаточно рассмотреть следующий простой пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 1 \end{pmatrix},$$

гладко зависящую от параметра ε . Ее собственные значения равны $1 \pm \varepsilon$. Однако, минимальное собственное значение равно $1 - |\varepsilon|$ и является недифференцируемой функцией ε .

Воспроизведем рассуждения работы [69] Келлера и Таджбахша. Предположим, что существует функция $Q_0(x)$, которая максимизирует наименьшее собственное значение. Пусть $Q(x, \varepsilon)$ есть семейство функций, гладко зависящее от ε , и $Q(x, 0) = Q_0(x)$. Предположим, что λ и y , наименьшее собственное значение и соответствующая собственная функция при $Q = Q(x, \varepsilon)$, также гладко зависят от ε . Тогда уравнение

$$(Q(x, \varepsilon)y''(x, \varepsilon))'' + \lambda(\varepsilon)y''(x, \varepsilon) = 0$$

можно дифференцировать по ε , что дает:

$$(Q_0(x)z'')'' + \lambda z'' + (Q_1(x)y'')'' + \mu y'' = 0,$$

где $Q_1(x) = \partial Q(x, 0)/\partial \varepsilon$, $z(x) = \partial y(x, 0)/\partial \varepsilon$ и $\mu = \partial \lambda(0)/\partial \varepsilon$. Умножим первое уравнение на z , второе на y , вычтем одно из другого и интегрируем результат по $[0, 1]$. В силу краевых условий имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 ((Q_0(x)y'')'' z - (Q_0(x)z'')'' y) dx &= 0, \\ \int_0^1 (y'' z - z'' y) dx &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 Q_1(x)y''(x)^2 dx - \int_0^1 \mu y'(x)^2 dx = 0.$$

Поскольку λ является экстремальным значением $\lambda(\varepsilon)$, мы имеем $\mu = 0$ и потому

$$\int_0^1 Q_1(x) y''(x)^2 dx = 0$$

для каждой функции $Q_1(x)$ такой, что

$$\int_0^1 Q_0(x)^{\alpha-1} Q_1(x) dx = 0.$$

Это дает как необходимое условие максимума соотношение $y''(x)^2 = C Q_0(x)^{\alpha-1}$ и нелинейное уравнение для y

$$(|y''|^{2/(\alpha-1)} y'')'' + \lambda y'' = 0,$$

которое интегрируется в квадратурах. В самом деле, если $y'' = z$, тогда

$$(|z|^{2/(\alpha-1)} z)'' + \lambda z = 0,$$

и если мы положим теперь $z' = P(z)$, то получим линейное уравнение первого порядка для P^2 . Слабым местом данного доказательства является предположение о том, что производная $\lambda(\varepsilon)$ по ε равна нулю при $\varepsilon = 0$. В действительности, функция $\lambda(\varepsilon)$ может быть нерегулярной, поскольку собственное значение λ может быть двойным.

Авторы данной работы предложили в [25] альтернативное доказательство теоремы Келлера–Таджбахша, не зависящее от кратности собственного значения. Это доказательство приведено ниже в § 6. Кроме того, этот параграф содержит первое доказательство существования оптимального решения. Из наших результатов следует, что форма колонны, найденная в [69], оптимальна, так же, как и значение $16\pi^2/3$ критической нагрузки.

Заметим, что мы используем пространства типа Соболева $W_p^l(0, 1)$, $l = 1, 2$, с любыми вещественными значениями $p \neq 0$, что интересно также и вне рамок задачи Лагранжа. Более того, мы доказываем существование оптимального решения. Полученные результаты могут быть обобщены на многомерные задачи.

Исследование экстремалей функционала F , определенного формулой (0.1), тесно связано с изучением функционалов

$$(0.5) \quad G[Q, y] = \frac{\int_0^1 P(x) |y'(x)|^2 dx}{\int_0^1 |y(x)|^2 dx}; \quad H[Q, y] = \frac{\int_0^1 |y'(x)|^2 dx}{\int_0^1 Q(x) |y(x)|^2 dx},$$

рассмотренных ниже в §§ 1, 2, и функционала

$$(0.6) \quad I[P, Q, y] = \frac{\int_0^1 P(x) |y'(x)|^2 dx}{\int_0^1 Q(x) |y(x)|^2 dx},$$

которому посвящен §3.

Эти функционалы представляют большой интерес как для приложений, так и для спектральной теории. Им посвящено множество работ. Например, экстремальные значения функционала H при условиях

$$(0.7) \quad \int_0^1 Q(x) dx = 1, \quad 0 < a \leq Q(x) \leq b,$$

найжены в работе М. Г. Крейна [38]. Там же определены экстремальные значения всех собственных значений задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

при условиях (0.7). Обобщение этих результатов на условия (0.4) при произвольном α содержится в §4.

Экстремальные значения функционалов G и H изучались в работах [3]–[5], [9], [10], [22]–[24], [26]–[29], [31]–[33], [38], [47], [49], [63], [67], [72]–[74].

Важная роль в этих исследованиях принадлежит “перестройкам”, т.е. преобразованиям функций, сохраняющих меру множеств, на которых функция имеет значения, меньшие данной постоянной. См. [8], [10], [15], [45], [59], [62], [63], [70], [71] и др.

Аналогичные проблемы для многомерных интегралов рассматривались в [1], [2], [6]–[8], [14], [15], [41]–[43], [45], [48], [54]–[58], [60], [62], [66], [68], [70], [71].

Оценки собственных значений задачи Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

рассматривались в работах А. Г. Рамма [61], Дж. Таленти [72], Х. Эгнелла [19], Ю. В. Егорова и С. Караа [20], С. Караа [34].

В §5 приведены некоторые оценки собственных значений самосопряженных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения порядка m . Здесь остается много открытых проблем.

§1. Об оценках первого собственного значения в одной задаче Штурма–Лиувилля

Рассмотрим зависимость первого собственного значения λ_1 задачи Штурма–Лиувилля

$$y''(x) + \lambda q(x)y(x) = 0$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$, с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

от потенциала q . Обозначим R_β множество вещественнозначных суммируемых на $(0, 1)$ функций q с положительными значениями и таких, что

$$\int_0^1 q(x)^\beta dx = 1,$$

где β — вещественное число, $\beta \neq 0$. Из вариационного принципа следует, что первое собственное значение λ_1 может быть найдено как

$$\lambda_1 = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 y'(x)^2 dx}{\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx}.$$

Мы хотим оценить значения

$$m_\beta = \inf_{q \in R_\beta} \lambda_1, \quad M_\beta = \sup_{q \in R_\beta} \lambda_1.$$

Положим

$$L[q, y] = \frac{\int_0^1 y'(x)^2 dx}{\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx}, \quad G[y] = \frac{\int_0^1 y'(x)^2 dx}{\left(\int_0^1 |y(x)|^p dx\right)^{2/p}},$$

где

$$p = \frac{2\beta}{\beta - 1}.$$

Главным результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если $\beta > 1$, тогда*

$$m_\beta = \frac{(\beta - 1)^{1+1/\beta}}{\beta(2\beta - 1)^{1/\beta}} B^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta} \right) \quad \text{и} \quad M_\beta = \infty,$$

где B — бета-функция Эйлера:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Существуют функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$ и $q(x) \in R_\beta$ такие, что

$$\inf_y L[q, y] = L[q, u] = m_\beta.$$

Если $\beta = 1$, тогда $M_1 = \infty$ и $m_1 = 4$.

Если $0 < \beta < \frac{1}{2}$, тогда

$$M_\beta = \frac{(1 - \beta)^{1+1/\beta}}{\beta(1 - 2\beta)^{1/\beta}} B^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\beta} \right) \quad \text{и} \quad m_\beta = 0.$$

Существуют функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$ и $q(x) \in R_\beta$ такие, что $\inf_y L[q, y] = L[q, u] = M_\beta$.

Если $\beta < 0$, тогда

$$M_\beta = -\frac{(1 - \beta)^{1+1/\beta}}{\beta(1 - 2\beta)^{1/\beta}} B^2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta} \right) \quad \text{и} \quad m_\beta = 0.$$

Существуют функции $u(x) \in H_0^1(0, 1)$ и $q(x) \in R_\beta$ такие, что $\inf_y L[q, y] = L[q, u] = M_\beta$.

Если $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$, тогда $M_\beta = \infty$ и $m_\beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $\beta > 1$, тогда мы имеем в силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 qy(x)^2 dx \leq \left(\int_0^1 q(x)^\beta dx \right)^{1/\beta} \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p} = \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p},$$

где $p = 2\beta/(\beta - 1)$, для любой функции $y \in H_0^1(0, 1)$. Следовательно, $\lambda_1 \geq m$, где $m = \inf_y G[y]$ в классе Соболева $H_0^1(0, 1)$. Заметим, что однородность функционала позволяет предположить, что

$$\int_0^1 |y(x)|^p dx = 1.$$

Пусть $\{y_k\}$ — последовательность функций из этого класса таких, что

$$\int_0^1 |y_k(x)|^p dx = 1, \quad \int_0^1 y'_k(x)^2 dx \rightarrow m.$$

Эта последовательность ограничена в $H_0^1(0, 1)$, следовательно, она слабо компактна в этом пространстве и компактна в $C[0, 1]$. Предположим, что эта последовательность сходится равномерно и слабо в $H_0^1(0, 1)$ к функции u . Тогда

$$\int_0^1 |u(x)|^p dx = 1, \quad \int_0^1 u'(x)^2 dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 y'_k(x)^2 dx,$$

и, следовательно, $\int_0^1 u'(x)^2 dx = m$. Поскольку $G[y]$ принимает минимальное значение при $y = u$, имеем

$$\frac{d}{dt} G[u + tz] = 0, \quad \text{если } t = 0,$$

для произвольной функции z из класса $H_0^1(0, 1)$. Это означает, что

$$\int_0^1 u'(x)z'(x) dx - m \int_0^1 |u(x)|^{p-2} u(x)z(x) dx = 0$$

для всех $z \in H_0^1(0, 1)$. Следовательно, функция u' имеет обобщенную производную, равную $-m|u|^{p-2}u$, т.е.

$$u'' + m|u|^{p-2}u = 0$$

почти всюду в $(0, 1)$. Поскольку функция u непрерывна, мы имеем $u'' \in C[0, 1]$, так что уравнение выполнено в классическом смысле.

Поскольку $G[|y|] = G[y]$ для всех y , мы можем предположить, что $y_k(x) \geq 0$ и потому $u(x) \geq 0$. В силу теоремы единственности для задачи Коши, $u(x) > 0$ в $(0, 1)$. Умножая обе части уравнения

$$u''(x) + m|u(x)|^{p-2}u(x) = 0$$

на $2u'$ и интегрируя по отрезку $(0, x)$, мы получаем, что

$$u'(x)^2 + \frac{2m}{p}u(x)^p = C.$$

Интегрируя по $(0, 1)$ обе стороны этого равенства и принимая во внимание, что

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx = m, \quad \int_0^1 u(x)^p dx = 1,$$

мы получаем, что $m(1 + 2/p) = C$.

Пусть b — точка, в которой функция u принимает максимальное значение M . Поскольку $u'' = -mu^{p-1} < 0$, такая точка существует и единственна. Если $b \neq \frac{1}{2}$, то мы можем предположить, что $b < \frac{1}{2}$, поскольку $u(x)$ может быть заменена на $u(1-x)$. Функция $u_1(x) = u(2b-x)$ удовлетворяет тому же уравнению на $(b, 2b)$, что и u , причем $u(b) = u_1(b) = M$, $u'(b) = u'_1(b) = 0$. Следовательно, эти функции совпадают и $u(2b) = u(0) = 0$, т.е. $b = \frac{1}{2}$. Поскольку

$$u'(x) = \sqrt{C - \frac{2m}{p}u(x)^p}$$

для $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, мы имеем

$$\int_0^M \frac{dy}{\sqrt{C - 2my^p/p}} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $u'(1/2) = 0$,

$$M = u\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{pC}{2m}\right)^{1/p} = \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{1/p}.$$

Заменяя переменную интегрирования $y = Mt$, мы получаем равенство

$$M^{1-p/2} \sqrt{\frac{p}{2m}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^p}} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^p}} = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right),$$

и потому

$$M^{p/2-1} = \sqrt{\frac{2}{pm}} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2}\right).$$

Полученные соотношения позволяют найти

$$m = C(\beta) = \frac{(\beta-1)^{1+1/\beta}}{\beta(2\beta-1)^{1/\beta}} B^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta}\right).$$

2. Пусть $\beta = 1$. Поскольку

$$\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \leq \max y(x)^2,$$

мы имеем

$$\lambda_1 \geq m = \inf_{y \in H_0^1(0,1)} \frac{\int_0^1 y'(x)^2 dx}{\max y(x)^2}.$$

Значение m может быть найдено в соответствии с леммой A10,¹ утверждающей, что $\lambda_1 \geq 4$, если $\beta = 1$.

3. Пусть $\beta < 0$. Положим

$$q(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon)^{1/\beta} \varepsilon^{-1/\beta}, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ (1-\varepsilon)^{-1/\beta} \varepsilon^{1/\beta}, & \text{если } \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число. Пусть $y_0(x) = 1/2 - |x - \frac{1}{2}|$. Тогда

$$\int_0^1 q(x)^\beta dx = 1, \quad \int_0^1 y_0'(x)^2 dx = 1, \quad \lambda_1 \leq \frac{1}{\int_0^1 q(x) y_0(x)^2 dx} \leq C \varepsilon^{-1/\beta}.$$

Следовательно, λ_1 может быть произвольно мало.

4. Пусть $0 < \beta < 1$. Положим

$$q(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1/\beta}, & \text{если } |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x - \frac{1}{2}| > \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число. Пусть y_0 – гладкая функция, равная нулю в точках $x = 0$ и $x = 1$ и равная 1 в интервале $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Тогда

$$\lambda_1 \leq \frac{C}{\int_{1/2-\varepsilon}^{1/2+\varepsilon} (2\varepsilon)^{-1/\beta} dx} = C_1 \varepsilon^{1/\beta-1} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, λ_1 может быть произвольно мало.

5. Пусть $\beta > \frac{1}{2}$. Положим

$$q(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\beta}, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где число $\varepsilon > 0$ мало. Тогда

$$\int_0^1 q(x) y(x)^2 dx = \varepsilon^{-1/\beta} \int_0^\varepsilon y(x)^2 dx \leq \varepsilon^{2-1/\beta} \int_0^\varepsilon y'(x)^2 dx,$$

и

$$\lambda_1 \geq \varepsilon^{1/\beta-2}.$$

¹Леммы A1–A16 приведены в приложении в конце статьи.

Следовательно, в этом случае $M_\beta = \infty$.

6. Если $\beta = \frac{1}{2}$, то можно положить

$$q(x) = Cx^{\varepsilon-2},$$

где $C = \varepsilon^2/4$, так что $\int_0^1 q(x)^{1/2} dx = 1$. Тогда

$$\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx = \frac{\varepsilon^2}{4} \int_0^1 x^{\varepsilon-2} y(x)^2 dx \leq C_1 \varepsilon^2 \int_0^1 y'(x)^2 dx.$$

Следовательно, $\lambda_1 \geq C_1^{-1} \varepsilon^{-2}$ и $M_{1/2} = \infty$.

7. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$. Тогда в силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 q(x)^\beta dx \leq \left(\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \right)^\beta \left(\int_0^1 y(x)^p dx \right)^{1-\beta},$$

где $p = 2\beta/(\beta - 1)$, так что $0 > p > -2$. Следовательно,

$$L[q, y] \leq G[y].$$

Положим $y_0(x) = x^\gamma$ для $0 < x < \frac{1}{2}$ и $y_0(x) = (1-x)^\gamma$ для $\frac{1}{2} < x < 1$, где $-1/p > \gamma > \frac{1}{2}$, так что $y_0 \in H_0^1(0, 1)$. Тогда интеграл $\int_0^1 y_0(x)^p dx$ сходится, и потому

$$\lambda_1 \leq C_1.$$

Пусть $m = \inf_{y \in H_0^1(0, 1)} G[y]$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{y_k\}$ такую, что

$$\int_0^1 |y_k(x)|^p dx = 1, \quad \int_0^1 y_k'(x)^2 dx \rightarrow m.$$

Существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, равномерно сходящаяся к функции $u \in H_0^1(0, 1)$. По теореме Фату, мы имеем $\int_0^1 u(x)^p dx \leq 1$ и $\int_0^1 u'(x)^2 dx \leq m$. Следовательно, $G[u] \leq m$ и, поскольку m – наименьшее возможное значение G , то $G[u] = m$. Мы имеем $G[|y|] = G[y]$ для всех y , так что можно предположить, что $y_k(x) \geq 0$, и, следовательно, $u(x) \geq 0$. Функция u удовлетворяет тому же самому уравнению, что и в п. 1, т.е. уравнению

$$u'' + m|u|^{p-2}u = 0$$

почти всюду в $(0, 1)$. Поскольку функция u непрерывна, мы видим, что уравнение выполняется в классическом смысле в каждом интервале, где $u \neq 0$. Если $u(x_0) = 0$, $u(x_1) = 0$, $u(x) > 0$ для $x_0 < x < x_1$ и $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$, $x_1 - x_0 = \varkappa < 1$, то мы можем рассмотреть функцию $v(x) = u(x_0 + \varkappa x)$ и, поскольку

$$v''(x) + m\varkappa^2 v^{p-1} = 0, \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0,$$

мы видим, что $G[v] = m\mathscr{K}^2 < m$, а это невозможно, так как $u(x) > 0$ в $(0, 1)$. Более того, при этом справедливо уравнение

$$u'(x)^2 + \frac{2m}{p}u(x)^p = C$$

для $0 < x < 1$ с $C = m(1 + 2/p) < 0$.

Пусть b — точка, в которой функция u имеет максимальное значение M . Поскольку $u'' = -mu^{p-1} < 0$, такая точка существует и единственна. Если $b \neq \frac{1}{2}$, то мы можем предположить, что $b < \frac{1}{2}$, так как функция $u(x)$ может быть заменена на $u(1-x)$. Функция $u_1(x) = u(2b-x)$ удовлетворяет тому же уравнению на $(b, 2b)$, что и u , причем $u(b) = u_1(b) = M$, $u'(b) = u'_1(b) = 0$. Следовательно, по теореме единственности для задачи Коши, эти функции совпадают и $u(2b) = u(0) = 0$, т.е. $b = \frac{1}{2}$. Мы имеем

$$\int_0^M \frac{dy}{\sqrt{C - 2my^p/p}} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $u'(\frac{1}{2}) = 0$, мы имеем

$$M = u\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{pC}{2m}\right)^{1/p} = \left(1 + \frac{p}{2}\right)^{1/p}.$$

Заменяя переменную интегрирования $y = Mt$, мы получаем равенство

$$M^{1-p/2} \sqrt{-\frac{p}{2m}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^p - 1}} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^p - 1}} = -\frac{1}{p} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right),$$

так что

$$m = C(\beta) = \frac{(1-\beta)^{1+1/\beta}}{\beta(1-2\beta)^{1/\beta}} B^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta}\right).$$

Пусть $\mu = \inf_{y \in H_0^1(0,1)} L[q, y]$, где $q(x) = u(x)^{p-2}$, и

$$\mu_\varepsilon = \inf_{y \in H_0^1(\varepsilon, 1-\varepsilon)} L[q, y] = L[q, y_\varepsilon].$$

Тогда $\mu_\varepsilon \geq \mu$, $y_\varepsilon > 0$ при $\varepsilon < x < 1 - \varepsilon$, $y_\varepsilon(\varepsilon) = y_\varepsilon(1 - \varepsilon) = 0$ и $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку $u > 0$ в $(0, 1)$ и $L[q, u] = m$, из теоремы Штурма следует, что $\mu_\varepsilon > m$, и потому $\mu \geq m$. Так как $\mu \leq m$, мы видим, что $\mu = m$.

8. Если $\beta < 0$, то в силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 y(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \leq \left(\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \right)^{\beta/(\beta-1)} \left(\int_0^1 q(x)^\beta dx \right)^{1/(1-\beta)}.$$

Следовательно,

$$L[q, y] \leq G[y].$$

Положим $y_0(x) = |x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$. Тогда

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{\left(\int_0^1 \left(\left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \right)^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}},$$

и потому $M_\beta < \infty$. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{y_k\}$ такую, что

$$\int_0^1 y_k(x)^p dx = 1, \quad \int_0^1 y'_k(x)^2 dx \rightarrow m.$$

Существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, равномерно сходящаяся к функции $u \in H_0^1(0, 1)$. Поскольку $p > 0$, последовательность $\{y_{n_k}^p\}$ сходится равномерно к u^p . Следовательно,

$$\int_0^1 u(x)^p dx = 1, \quad \int_0^1 u'(x)^2 dx \leq m.$$

Поэтому $G[u] \leq m$ и, так как m — это наименьшее возможное значение функционала G , мы имеем равенство $G[u] = m$. Функция u удовлетворяет тому же самому уравнению, что и в п. 1, и $C(\beta)$ определяется той же формулой, что и в случае, когда $\beta > 1$. Поскольку

$$\inf_y L[q, y] \leq \inf_y G[y] = C(\beta),$$

мы видим, что $M_\beta = C(\beta)$.

§ 2. О других оценках первого собственного значения

Рассмотрим зависимость первого собственного значения λ_1 задачи Штурма–Лиувилля

$$(p(x)y')' + \lambda y(x) = 0$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$, с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

от функции p . Обозначим R_α множество вещественных положительных измеримых функций p на $[0, 1]$ таких, что

$$\int_0^1 p(x)^\alpha dx = 1,$$

где α — вещественное число, $\alpha \neq 0$. Положим

$$L[p, y] = \frac{\int_0^1 p(x)y'(x)^2 dx}{\int_0^1 y(x)^2 dx}, \quad G[y] = \frac{\left(\int_0^1 |y'(x)|^r dx \right)^{2/r}}{\int_0^1 y(x)^2 dx}, \quad r = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

Обозначим $K_p(a, b)$ для вещественных $p \neq 0$ множество неубывающих вещественных функций y , определенных на $[a, b]$, абсолютно непрерывных на $[a, b - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$ и таких, что $y(0) \geq 0$,

$$\int_a^b y'(x)^p dx < \infty, \quad \int_a^b y(x)^2 dx < \infty.$$

Пусть $K_p(a, b, c)$ — это множество вещественных функций y , определенных на $[a, c]$ и таких, что $y \in K_p(a, b)$, $y(-x) \in K_p(-c, -b)$, $\int_a^b |y'(x)|^p dx < \infty$ и $\int_b^c |y'(x)|^p dx < \infty$. Главным результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$M_\alpha = \sup_{p \in R_\alpha} \lambda_1, \quad m_\alpha = \inf_{p \in R_\alpha} \lambda_1,$$

$$C(r) = \frac{3r-2}{r} \left(\frac{2r-2}{3r-2} \right)^{2/r} B^2 \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{r} \right).$$

Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$, тогда $M_\alpha = C(r)$ и $m_\alpha = 0$. Существуют функции $p \in R_\alpha$, $z \in H_0^1(0, 1)$ такие, что $z'(x)^2 = p(x)^{\alpha-1}$ и

$$\inf_y L[p, y] = L[p, z] = C(r).$$

Если $\alpha \leq -1$, тогда $m_\alpha = C(r)$ и $M_\alpha = \infty$. Существуют функции $p \in R_\alpha$, $z \in H_0^1(0, 1)$ такие, что $z'(x)^2 = p(x)^{\alpha-1}$ и

$$\inf_y L[p, y] = L[p, z] = C(r).$$

Если $-1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}$, тогда $M_\alpha = \infty$ и $m_\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2 основывается на вариационном принципе, в соответствии с которым $\lambda_1 = \inf_{y \in H_0^1(0, 1)} L[p, y]$.

1. Если $\alpha > 0$, тогда можно взять в качестве функции y функцию, равную нулю в $[0, \frac{1}{2}]$ и такую, что $\int_0^1 y^2 dx = 1$. Поскольку функция p может иметь произвольно малые значения в $[\frac{1}{2}, 1]$, значение λ_1 не может быть ограничено снизу положительной постоянной.

2. Пусть $0 > \alpha > -1$. Покажем, что в этом случае λ_1 также не может быть ограничено снизу положительной постоянной.

Положим для этого

$$y(x) = \begin{cases} x/\varepsilon, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ 1, & \text{если } \varepsilon < x < 1 - \varepsilon, \\ (1-x)/\varepsilon, & \text{если } 1 - \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

$$p(x) = \begin{cases} \delta, & \text{если } 0 < x < \varepsilon \text{ или } 1 - \varepsilon < x < 1, \\ \varepsilon^{-1}, & \text{если } \varepsilon < x < 1 - \varepsilon, \end{cases}$$

где δ – такое число, что

$$\int_0^1 p(x)^\alpha dx = 2\varepsilon\delta^\alpha + (1 - 2\varepsilon)\varepsilon^{-\alpha} = 1,$$

так что $\delta \leq C_1\varepsilon^{-1/\alpha}$. Очевидно, что

$$\int_0^1 y(x)^2 dx = 1 - 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{3} = 1 - \frac{4\varepsilon}{3}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 p(x)y'(x)^2 dx = \frac{2\delta}{\varepsilon} \leq C_2\varepsilon^{-1-1/\alpha}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 p(x)y'(x)^2 dx}{\int_0^1 y(x)^2 dx} \leq C\varepsilon^{-1-1/\alpha},$$

и так как $-1 - 1/\alpha > 0$, то значение λ_1 может быть произвольно мало.

3. Пусть $\alpha \leq -1$. Тогда $1 \leq r \leq 2$ и в силу неравенства Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_0^1 |y'(x)|^r dx &= \int_0^1 p(x)^{r/2} |y'(x)|^r p(x)^{-r/2} dx \\ &\leq \left(\int_0^1 p(x)y'(x)^2 dx \right)^{r/2} \left(\int_0^1 p(x)^\alpha dx \right)^{1/(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

где $r = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Следовательно, для каждого допустимого p выполнено соотношение $L[p, y] \geq G[y]$. Пусть $m = \inf_y G[y]$. Поскольку $y(x) = \int_0^x y'(t) dt$, мы имеем

$$\int_0^1 y(x)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x |y'(t)| dt \right)^2 dx \leq \left(\int_0^1 |y'(t)|^r dt \right)^{2/r},$$

и потому $m \geq 1$.

Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{y_k\}$ такую, что

$$\int_0^1 |y'_k(x)|^r dx = 1, \quad \int_0^1 y_k(x)^2 dx \rightarrow \frac{1}{m}.$$

Существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящаяся равномерно к функции $z \in H_0^1(0, 1)$ такой, что

$$\int_0^1 |z'(x)|^r dx = 1, \quad \int_0^1 z(x)^2 dx = \frac{1}{m}.$$

Эта функция z удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$(|z'(x)|^{r-2} z'(x))' + mz(x) = 0.$$

Умножая его на z' и интегрируя, мы получаем, что

$$\frac{r-1}{r} |z'(x)|^r + \frac{m}{2} z^2 = C.$$

Интегрируя последнее равенство по $(0, 1)$, мы видим, что $C = 3/2 - 1/r > 0$. Функция z четна относительно точки $x = \frac{1}{2}$, возрастает в $(0, \frac{1}{2})$ от 0 до M и убывает в $(\frac{1}{2}, 1)$. Поскольку $z'(\frac{1}{2}) = 0$, мы имеем

$$mM^2 = 2C = 3 - \frac{2}{r}.$$

Таким образом,

$$\int_0^M \frac{dz}{(C - mz^2/2)^{1/r}} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{1/r}.$$

Подставляя $z = My$, мы получаем, что

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/r}} = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{1/r} \frac{C^{1/r}}{M}.$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{dy}{(1 - y^2)^{1/r}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{r}\right).$$

Следовательно,

$$M^{-1} = \left(\frac{r-1}{r} \right)^{1/r} C^{-1/r} B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{r}\right)$$

и $m = 2CM^{-2} = C(r)$. Поскольку $L[p, y] \geq C(r)$ и $L[z'^{2/(\alpha-1)}, z] = C(r)$, отсюда следует, что $m_\alpha = C(r)$.

4. Если $\alpha > 1$, тогда по неравенству Гёльдера

$$\int_0^1 p(x) y'(x)^2 dx \leq \left(\int_0^1 p(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_0^1 |y'(x)|^r dx \right)^{2/r},$$

где $r = 2\alpha/(\alpha - 1) > 2$. Положим $u(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$. Тогда

$$\lambda_1 \leq \frac{\left(\int_0^1 |u'(x)|^r dx \right)^{2/r}}{\int_0^1 u(x)^2 dx} = C.$$

Мы можем повторить те же аргументы, что и выше, в п. 3, чтобы найти оптимальные функции p и z . Более того, тогда $M = C(r)$ и если $\alpha = 1$, тогда

$$\lambda_1 \leq \frac{\max u'(x)^2}{\int_0^1 u(x)^2 dx} = 12 = \lim_{r \rightarrow \infty} C(r).$$

5. Пусть $0 < \alpha < 1$ и p – функция из класса R_α . Положим

$$u'(x)^2 = p(x)^{\alpha-1}$$

и построим функцию u такую, что она обращается в нуль в крайних точках отрезка, монотонно возрастает в $(0, b)$ и убывает на $(b, 1)$, где $b \in (0, 1)$. Очевидно, что

$$\int_0^1 |u'(x)|^r dx = \int_0^1 p(x)^\alpha dx = 1.$$

Пусть $b \geq \frac{1}{2}$. Мера точек $x \in (0, b)$ таких, что $u'(x)^r \geq 4$, меньше $\frac{1}{4}$. Следовательно, дополнительное множество E на $(0, b)$ имеет меру $\geq \frac{1}{4}$ и в точках x этого множества

$$u'(x) \geq 4^{1/r},$$

поскольку $r < 0$. Положим теперь $z(0) = 0$, $z'(x) = 4^{1/r}$ в точках E и $z'(x) = 0$ в других точках $(0, b)$. Тогда

$$\int_0^1 u(x)^2 dx \geq \int_0^r z(x)^2 dx \geq \int_0^{1/4} 4^{2/r} x^2 dx = c_0,$$

и, следовательно,

$$M_\alpha \leq \frac{\int_0^1 p(x) u'(x)^2 dx}{\int_0^1 u(x)^2 dx} \leq \frac{1}{c_0}.$$

Для того чтобы доказать существование оптимальных функций p и z , нам понадобится результат леммы A16.

Пусть p – произвольная положительная функция из класса R_α . Тогда существует функция $y_1(x)$ такая, которая возрастает в $(0, b)$ и убывает в $(b, 1)$, где $0 < b < 1$, и такая, что $p(x) = |y_1'|^{2/(\alpha-1)}$. Кроме того, $L[p, y_1] = G[y_1]$ и, следовательно, $M_\alpha \leq m$, где

$$m = \sup_{y \in K_p(0, b, 1)} G[y].$$

Это число указано в лемме A7. С другой стороны, мы имеем равенство $L[p_0, y_0] = G[y_0]$, если $p_0(x) = |y_0(x)|^{2/(\alpha-1)}$, где y_0 – функция, указанная в лемме A7. По лемме A16 мы имеем

$$m = \inf_{y \in H_0^1(0, 1)} \frac{\int_0^1 p_0(x) y'(x)^2 dx}{\int_0^1 y(x)^2 dx} = L[p_0, y_0],$$

что и требовалось доказать.

6. Пусть теперь $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$. Воспользуемся той же функцией u , что и выше, в начале п. 5. Пусть $r = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Тогда $0 < r < \frac{2}{3}$. В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 u'(x)^r dx \leq \left(\int_0^1 |u'(x)| dx \right)^r \left(\int_0^1 dx \right)^{1-r} \leq \left(\int_0^1 |u'(x)| dx \right)^r.$$

Поскольку

$$\int_0^1 |u'(x)|^r dx = 1,$$

отсюда вытекает, что

$$\int_0^1 |y'_0(x)| dx \geq 1,$$

и, следовательно,

$$M = (\max y_0(x))^2 = y_0(b)^2 \geq \frac{1}{4}.$$

Мы можем предположить, что

$$\int_0^b y'_0(x)^r dx \geq \frac{1}{2}.$$

Пусть x_1 — это такая точка из $(0, b)$, что $y_0(x_1) = 1/4^{1/r}$. Тогда, как и выше, мы имеем

$$\int_0^{x_1} |y'_0(x)|^r dx \leq \left(\int_0^{x_1} |y'_0(x)| dx \right)^r = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\int_{x_1}^b |y'_0(x)|^r dx \geq \frac{1}{4}.$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\leq \int_{x_1}^b |y'_0(x)|^r dx = \int_{x_1}^b |y'_0(x)|^r y_0(x)^{2r-2} y_0(x)^{2-2r} dx \\ &\leq \left(\int_{x_1}^b y'_0(x) y_0(x)^{2-1/r} dx \right)^r \left(\int_{x_1}^b y_0(x)^2 dx \right)^{1-r} \\ &= [y_0(x_1)^{3-2/r} - y_0(b)^{3-2/r}]^r \left(3 - \frac{2}{r} \right) \left(\int_{x_1}^b y_0(x)^2 dx \right)^{1-r} \\ &\leq C_1(a) \left(\int_0^1 y_0(x)^2 dx \right)^{1-r}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 y_0(x)^2 dx \geq (4C_1(a))^{1/(r-1)}$$

и

$$\lambda_1 \leq (4C_1(\alpha))^{1/(1-r)}.$$

Позже мы докажем, что оптимальные значения достигаются.

7. Пусть $\alpha < -\frac{1}{2}$. Пусть

$$p(x) = \begin{cases} k^{1/\alpha}, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ k, & \text{если } \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где k — такое число, что

$$k\varepsilon + k^\alpha(1 - \varepsilon) = 1,$$

так что $k \sim \varepsilon^{-1}$ и

$$\int_0^1 p(x)^\alpha dx = 1.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$\int_0^\varepsilon y(x)^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_0^1 y'(x)^2 dx.$$

С другой стороны,

$$\int_\varepsilon^1 y(x)^2 dx \leq (1 - \varepsilon)^2 \int_\varepsilon^1 y'(x)^2 dx.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 y(x)^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_0^1 y'(x)^2 dx + (1 - \varepsilon)^2 \int_\varepsilon^1 y'(x)^2 dx \leq \delta \int_0^1 p(x)y'(x)^2 dx,$$

где

$$\delta = \max(\varepsilon^2 k^{-1/\alpha}, (1 - \varepsilon)^2 k^{-1}) \leq \max(\varepsilon^{2+1/\alpha}, (1 - \varepsilon)^2 \varepsilon),$$

так что $\delta \rightarrow 0$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда выводим, что

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\delta} \rightarrow \infty$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

8. Рассмотрим, наконец, случай $\alpha = -\frac{1}{2}$. Положим

$$p(x) = \max(x^2/\varepsilon^2, \delta^2/\varepsilon^2),$$

где $\delta = \exp(1 - 1/\varepsilon)$. Заметим, что

$$\int_0^1 p(x)^{-1/2} dx = \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{x} dx = \varepsilon - \varepsilon \ln \delta = 1.$$

С другой стороны, из хорошо известной оценки

$$\int_0^1 y(x)^2 dx \leq 4 \int_0^1 x^2 y'(x)^2 dx,$$

справедливой для всех функций $y \in C^1$, имеющих нулевое значение в 1, следует, что

$$\int_0^1 y(x)^2 dx \leq 4\delta^2 \int_0^\delta y'(x)^2 dx + 4 \int_\delta^1 y(x)^2 dx \leq 4\varepsilon^2 \int_0^1 p(x) y'(x)^2 dx.$$

Это означает, что для выбранной функции p

$$\lambda_1 = \inf \frac{\int_0^1 p(x) y'(x)^2 dx}{\int_0^1 y(x)^2 dx} \geq \frac{1}{4\varepsilon^2},$$

так что оценка сверху невозможна.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$, тогда

$$\lambda_1 \leq C(\alpha) \left(\int_0^1 p(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha};$$

если $\alpha \leq -1$, тогда

$$\lambda_1 \geq C(\alpha) \left(\int_0^1 p(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha};$$

где $C(\alpha)$ – положительное число, зависящее только от α .

§3. О более общей задаче Штурма–Лиувилля

В этом параграфе рассматривается задача Штурма–Лиувилля

$$(1) \quad (P(x)y')' + \lambda Q(x)y = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$(2) \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Мы хотим оценить минимальное собственное значение λ_1 этой задачи при условии, что неотрицательные измеримые функции $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что

$$(3) \quad \int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1, \quad \int_0^1 Q(x)^\beta dx = 1,$$

где α и β – ненулевые вещественные числа. Из вариационного принципа следует, что

$$\lambda_1 = \inf_y \frac{\int_0^1 P(x) y'(x)^2 dx}{\int_0^1 Q(x) y(x)^2 dx},$$

где нижняя грань берется в классе всех отличных от нуля функций из $C_0^1[0, 1]$.

Пусть

$$M_{\alpha, \beta} = \sup_{P, Q} \lambda_1, \quad m_{\alpha, \beta} = \inf_{P, Q} \lambda_1.$$

Главным результатом этого параграфа является следующая

ТЕОРЕМА 4. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta - \alpha + 2\alpha\beta < 0$, тогда $M_{\alpha, \beta} \leq C(\alpha, \beta)$ и $m_{\alpha, \beta} = 0$.
Если $\alpha \leq -1$, $\beta \geq 1$, тогда $m_{\alpha, \beta} \geq C(\alpha, \beta) > 0$ и $M_{\alpha, \beta} = \infty$.
Если $1/\alpha - 1/\beta + 2 \leq 0$ и либо $\alpha > -1$, либо $\beta < 1$, тогда $m_{\alpha, \beta} = 0$ и $M_{\alpha, \beta} = \infty$.²

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Оценка $M_{\alpha, \beta}$.

а. Пусть вначале $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\beta - \alpha + 2\alpha\beta > 0$. Покажем, что $M_{\alpha, \beta} = \infty$. Для этого положим $P(x) = \varepsilon^{-1/\alpha}$ для $0 < x < \varepsilon$ и $P(x) = 0$ для $\varepsilon < x < 1$; $Q(x) = \varepsilon^{-1/\beta}$ для $0 \leq x \leq \varepsilon$ и $Q(x) = 0$ для $\varepsilon \leq x \leq 1$, где ε — малое положительное число. Тогда для $y(x) \in C_0^1(0, 1)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx &= \varepsilon^{-1/\beta} \int_0^\varepsilon y(x)^2 dx; \\ \int_0^1 P(x)y'(x)^2 dx &= \varepsilon^{-1/\alpha} \int_0^\varepsilon y'(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^\varepsilon y(x)^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_0^\varepsilon y'(x)^2 dx, \quad y(x) \in C_0^1(0, 1),$$

мы видим, что

$$\int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx \leq \varepsilon^{2-1/\beta+1/\alpha} \int_0^1 P(x)y'(x)^2 dx,$$

т.е.

$$\lambda_1 \geq \varepsilon^{-2+1/\beta-1/\alpha},$$

и $\lambda_1 \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, в этом случае $M_{\alpha, \beta} = \infty$.

б. Если $\alpha < 0$, $\beta > 0$, положим

$$\begin{aligned} P(x) &= \begin{cases} \varepsilon^{-1/\alpha}(1-\varepsilon)^{1/\alpha} & \text{для } 0 < x < \varepsilon, \\ \varepsilon^{1/\alpha}(1-\varepsilon)^{-1/\alpha} & \text{для } \varepsilon < x < 1; \end{cases} \\ Q(x) &= \begin{cases} 0 & \text{для } 0 < x < 2\varepsilon, \\ (1-2\varepsilon)^{-1/\beta} & \text{для } 2\varepsilon < x < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$. Ясно, что

$$\int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1, \quad \int_0^1 Q(x)^\beta dx = 1,$$

²С. Караа доказал, что при $\alpha < 0$, $\beta > 0$ и при $\alpha > 1$, $\beta \leq -1$

$$C(\alpha, \beta) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\alpha}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\beta}\right)^2 \left(\frac{\alpha\beta + \alpha}{\alpha - \beta + 2\alpha\beta}\right)^{1-1/\beta} \left(\frac{\alpha - \beta + 2\alpha\beta}{\alpha\beta - \beta}\right)^{1-1/\alpha}.$$

и

$$(1 - 2\varepsilon)^{1/\beta} \int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx = \int_{2\varepsilon}^1 y(x)^2 dx \leq \varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha} \int_{2\varepsilon}^1 P(x)y'(x)^2 dx.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 \geq \varepsilon^{1/\alpha}/2$, и потому $M_{\alpha,\beta} = \infty$.

с. Пусть теперь $\alpha < 0$, $\beta < 0$ и $\beta - \alpha + 2\alpha\beta > 0$.

Положим

$$P(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha} & \text{для } 0 < x < \varepsilon, \\ \varepsilon^{1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{-1/\alpha} & \text{для } \varepsilon < x < 1; \end{cases}$$

$$Q(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\beta}(1 - \rho)^{1/\beta} & \text{для } 0 < x < \varepsilon, \\ \rho^{1/\beta}(1 - \varepsilon)^{-1/\beta} & \text{для } \varepsilon < x < 1; \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$, $0 < \rho < \frac{1}{8}$. Ясно, что

$$\int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1, \quad \int_0^1 Q(x)^\beta dx = 1,$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx &= \varepsilon^{-1/\beta}(1 - \rho)^{1/\beta} \int_0^\varepsilon y(x)^2 dx + \rho^{1/\beta}(1 - \varepsilon)^{-1/\beta} \int_\varepsilon^1 y(x)^2 dx \\ &\leq \varepsilon^{2-1/\beta+1/\alpha}(1 - \rho)^{1/\beta}(1 - \varepsilon)^{-1/\alpha} \int_0^\varepsilon P(x)y'(x)^2 dx \\ &\quad + \rho^{1/\beta}\varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha-1/\beta+2} \int_\varepsilon^1 P(x)y'(x)^2 dx \\ &\leq C_1 \int_0^1 P(x)y'(x)^2 dx, \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \max(\varepsilon^{2-1/\beta+1/\alpha}(1 - \rho)^{1/\beta}(1 - \varepsilon)^{-1/\alpha}, \rho^{1/\beta}\varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha-1/\beta+2}).$$

Если положить $\rho = \varepsilon^{\beta/2\alpha}$, тогда для малых ε мы имеем $C_1 \leq 2\varepsilon^\gamma$, где

$$\gamma = \min\left(2 - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha}\right) > 0.$$

Поскольку $\lambda_1 \geq C_1^{-1}$, мы видим, что в этом случае $M_{\alpha,\beta} = \infty$.

d. Покажем, что $M_{\alpha,\beta} = \infty$, если

$$\beta - \alpha + 2\alpha\beta = 0, \quad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Заметим, что α и β имеют одинаковые знаки для $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\beta - \alpha + 2\alpha\beta = 0$, $\alpha > -\frac{1}{2}$. Пусть

$$P(x) = C_1 x^{\varepsilon-1/\alpha}, \quad Q(x) = C_2 x^{\varepsilon-1/\beta}; \quad \varepsilon > 0.$$

Постоянные C_1, C_2 выбираются так, что

$$\int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1, \quad \int_0^1 Q(x)^\beta dx = 1,$$

т.е. $C_1 = |\alpha\varepsilon|^{1/\alpha}$, $C_2 = |\beta\varepsilon|^{1/\beta}$. Из неравенства Харди

$$\int_0^1 x^{\varepsilon-1/\beta} y(x)^2 dx \leq C_0 \int_0^1 x^{\varepsilon-1/\beta+2} y'(x)^2 dx; \quad y(x) \in C^1(0, 1),$$

где $C_0 = 4/[1 + (\varepsilon - 1/\beta)^2]$, следует, что

$$\int_0^1 Q(x) y(x)^2 dx \leq \frac{C_0 C_2}{C_1} \int_0^1 P(x) y'(x)^2 dx.$$

Остается заметить, что

$$\frac{C_2}{C_1} = |\alpha\varepsilon|^{-1/\alpha} |\beta\varepsilon|^{1/\beta} = |\alpha|^{-1/\alpha} |\beta|^{1/\beta} \varepsilon^2 \rightarrow 0,$$

когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает, что

$$\lambda_1 \geq |\alpha|^{1/\alpha} |\beta|^{-1/\beta} \varepsilon^{-2},$$

т.е. $M_{\alpha,\beta} = \infty$.

е. Покажем теперь, что $M_{\alpha,\beta} < \infty$, если

$$-\frac{1}{2} < \alpha < 0, \quad \beta - \alpha + 2\alpha\beta < 0.$$

Положим $u'(x)^2 = P(x)^{\alpha-1}$ и определим функцию $u(x)$ так, что она возрастает на отрезке $[0, x_0]$ от 0 до некоторого $m > 0$ и убывает на $[x_0, 1]$ от m до 0. В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^1 |u'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \leq \left(\int_0^1 |u'| dx \right)^{2\alpha/(\alpha-1)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 |u'(x)| dx \geq 1,$$

и потому $m \geq \frac{1}{2}$. Пусть для определенности

$$\int_0^{x_0} |u'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \geq \frac{1}{2}.$$

Пусть $x_1 \in (0, x_0)$ – такая точка, что $u(x_1)^{2\alpha} = 4^{1-\alpha}$. Тогда

$$\int_0^{x_1} u'(x)^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \leq \left(\int_0^{x_1} u'(x) dx \right)^{2\alpha/(\alpha-1)} = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\int_{x_1}^{x_0} u'(x)^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \geq \frac{1}{4}.$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_0} u(x)^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \\ \leq \left(\int_{x_1}^{x_0} u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \left(\int_{x_1}^{x_0} u' u^{\beta(1+\alpha)/\alpha(\beta-1)} dx \right)^{2\alpha/(\alpha-1)}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &\leq \int_{x_1}^{x_0} u'(x)^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \\ &\leq \left(\int_{x_1}^{x_0} u^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(1+\alpha)/(1-\alpha)} \cdot [(m^{s+1} - 4^{-s-1})/s]^{2\alpha/(\alpha-1)}, \end{aligned}$$

где

$$1 + s = \frac{\beta(1+\alpha)}{\alpha(\beta-1)} + 1 = \frac{2\alpha\beta - \alpha + \beta}{\alpha(\beta-1)} < 0.$$

Если $\beta < 0$, тогда

$$\int_0^1 |y(x)|^{2\beta/(\beta-1)} dx \leq \left(\int_0^1 Q(x) y^2(x) dx \right)^{\beta/(\beta-1)} \left(\int_0^1 Q(x)^\beta dx \right)^{1/(1-\beta)},$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 Q(x) y(x)^2 dx \geq \left(\int_0^1 |y(x)|^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}.$$

Итак, полученная оценка

$$\int_0^{x_1} |u(x)|^{2\beta/(\beta-1)} dx \geq C_1 > 0$$

означает, что

$$\lambda_1 \leq C_1^{(1-\beta)/\beta}.$$

f. Пусть теперь $0 < \alpha \leq 1$, $\beta - \alpha + 2\alpha\beta < 0$. Мы получим оценку для λ_1 , как и выше.

Функция $P(x)$ неотрицательна и $\int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1$. Достаточно получить равномерную оценку сверху для функции $P(x)$, принимающей только положительные значения. Положим $u'(x)^2 = P(x)^{\alpha-1}$ и определим функцию $u(x)$ так, что она возрастает на отрезке $[0, x_0]$ от 0 до некоторого $m > 0$ и убывает на отрезке $[x_0, 1]$ от m до 0. Мы имеем для $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^1 P(x) u'(x)^2 dx = \int_0^1 |u'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx = \int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1.$$

Если $\alpha = 1$, то $u(x) = |x - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2}$ и $\int_0^1 P(x) u'(x)^2 dx = 1$.

В силу неравенства Гёльдера, мы имеем для $0 < \beta < 1$ оценку

$$\int_0^1 Q(x)^\beta dx \leq \left(\int_0^1 Q(x) u^2(x) dx \right)^\beta \left(\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{1-\beta},$$

так что

$$\int_0^1 Q(x) u(x)^2 dx \geq \left(\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}.$$

Итак, оценка сверху следует из неравенства

$$\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \leq C_1,$$

которую мы сейчас докажем.

Ясно, что для $0 < x < x_0$ мы имеем

$$\begin{aligned} x &= \int_0^x dt = \int_0^x u'(x)^s u'(x)^{-s} dt \\ &\leq \left(\int_0^1 u'(x)^{sp_1} dt \right)^{1/p_1} \cdot \left(\int_0^1 u'(x)^{-sp_2} dt \right)^{1/p_2} \cdot x^{1/p_3}, \end{aligned}$$

где

$$1 > s > 0, \quad p_1 = \frac{1}{s}, \quad p_2 = \frac{2\alpha}{s(1-\alpha)}, \quad p_3 = \frac{1}{1-s/2-s/2\alpha}.$$

Поскольку $\int_0^1 u'(x)^{-sp_2} dt = 1$, отсюда следует, что

$$x^{s/2+s/2\alpha} \leq u(x)^{1/p_1},$$

т.е. $u(x) \geq x^{1/2+1/2\alpha}$. Следовательно,

$$\int_0^{x_0} u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \leq \int_0^{x_0} x^{(\alpha+1)\beta/\alpha(\beta-1)} dx = C_1,$$

так как

$$\frac{(\alpha + 1)\beta}{\alpha(\beta - 1)} > -1.$$

Аналогично можно показать, что $u(x) \geq (1 - x)^{1/2+1/2\alpha}$ для $x_0 < x < 1$, и потому

$$\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \leq 2C_1.$$

Если $\beta < 0$, тогда

$$\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \leq \left(\int_0^1 Q(x)u^2(x) dx \right)^{\beta/(\beta-1)} \left(\int_0^1 Q(x)^\beta dx \right)^{1/(1-\beta)},$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 Q(x)u(x)^2 dx \geq \left(\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}.$$

Итак, в этом случае достаточно доказать, что

$$\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \geq C > 0.$$

Как и выше, мы имеем оценки

$$\begin{aligned} u(x) &\geq x^{1/2+1/2\alpha} && \text{для } 0 < x < x_0, \\ u(x) &\geq (1 - x)^{1/2+1/2\alpha} && \text{для } x_0 < x < 1, \end{aligned}$$

и потому

$$\int_0^1 u(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \geq \int_0^{x_0} x^{(\alpha+1)\beta/\alpha(\beta-1)} dx + \int_{x_0}^1 (1 - x)^{(\alpha+1)\beta/\alpha(\beta-1)} dx = C > 0.$$

г. Пусть $\alpha > 1$, $\beta - \alpha + 2\alpha\beta < 0$. Покажем, что $\lambda_1 \leq C(\alpha, \beta)$. Мы имеем

$$\int_0^1 P(x)y'(x)^2 dx \leq \left(\int_0^1 |y'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_0^1 P(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha}$$

и

$$\int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx \geq \left(\int_0^1 |y(x)|^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \leq \inf_y \frac{\left(\int_0^1 |y'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha}}{\left(\int_0^1 y(x)^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}} \leq C,$$

так как в качестве y можно взять такую функцию, что $y(x) = x^\rho$ для $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ и $y(x) = (1-x)^\rho$ для $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Число ρ должно быть таким, что $2\beta/(\beta-1)\rho > -1$ и $2\alpha(\rho-1)/(\alpha-1) > -1$.

Если $\alpha > 1$, $0 < \beta < 1$, то такое ρ существует, если $(1+\alpha)/\alpha < (1-\beta)/\beta$, т.е. для $\beta - \alpha + 2\alpha\beta < 0$. Если $\alpha > 1$, но $\beta < 0$, тогда в качестве ρ можно взять любое число, большее, чем $(1+\alpha)/2\alpha$, так как первое условие удовлетворяется для любого $\rho > 0$.

II. Оценки $m_{\alpha,\beta}$.

а. Покажем, что $m_{\alpha,\beta} = 0$ для $\beta < 1$. Для этого положим $P(x) = 1$. Если $\beta < 0$, положим $Q(x) = \varepsilon^{-1/\beta}(1-\varepsilon)$ для $x - \frac{1}{2} < \varepsilon/2$ и $Q(x) = N$ для $0 < x < \frac{1}{2} - \varepsilon/2$ и для $\frac{1}{2} + \varepsilon/2 < x < 1$, предполагая, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ и N — такая постоянная, что

$$N^\beta(1-\varepsilon) + \varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)^\beta \varepsilon = 1,$$

так что $N \rightarrow \infty$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы видим, что $b_\varepsilon = \int_0^1 Q(x)^{1/4} dx \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $q_\varepsilon(x) = Q_\varepsilon(x)b_\varepsilon^{-4}$. Тогда из уравнения

$$y'' + \lambda_1 Q_\varepsilon(x)y = 0$$

следует, что

$$y'' + m q_\varepsilon(x)y = 0, \quad \text{где } m = \lambda_1 b_\varepsilon^4,$$

и

$$\int_0^1 q_\varepsilon^{1/4} dx = 1.$$

В силу первой части нашей теоремы, если $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{4}$, то первое собственное значение ограничено сверху, т.е. $m \leq C$ и C не зависит от ε . Но тогда $\lambda_1 \leq C b_\varepsilon^{-4}$, так что λ_1 может принимать произвольно малые значения.

Если $0 < \beta < 1$, то мы положим $P(x) = 1$ и $Q(x) = \varepsilon^{-1/\beta}(1-\varepsilon)$ для $x - \frac{1}{2} < \varepsilon/2$ и $Q(x) = 0$ для $0 < x < \frac{1}{2} - \varepsilon/2$ и для $x > \frac{1}{2} + \varepsilon/2$, предполагая, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Пусть $y_0 \in C_0^\infty(0,1)$ и $y_0(x) = 1$ для $\frac{1}{2} - x < \varepsilon$. Тогда

$$\lambda_1 = \inf_y \frac{\int_0^1 P(x)y'(x)^2 dx}{\int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx} \leq \frac{\int_0^1 y_0'(x)^2 dx}{\int_0^1 Q(x)y_0(x)^2 dx} = C\varepsilon^{1/\beta-1}.$$

Следовательно, $\lambda_1 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

б. Покажем, что $m_{\alpha,\beta} = 0$ для $\alpha > 0$. Для этого положим $Q(x) \equiv 1$. Поскольку $\alpha > 0$, функция $P(x)$ может принимать нулевое значение на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, в то время как $y(x) = 0$ на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$, так что $\lambda_1 = 0$.

с. Пусть $0 > \alpha > -1$. Пусть $Q(x) \equiv 1$. Положим

$$P(x) = \begin{cases} \delta & \text{для } 0 < x < \varepsilon, \\ \varepsilon^{-1} & \text{для } \varepsilon < x < 1 - \varepsilon, \\ \delta & \text{для } 1 - \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

и

$$y(x) = \begin{cases} x/\varepsilon & \text{для } 0 < x < \varepsilon, \\ 1 & \text{для } \varepsilon < x < 1 - \varepsilon, \\ (1-x)/\varepsilon & \text{для } 1 - \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где δ – такое число, что

$$\int_0^1 P(x)^\alpha dx = 2\varepsilon\delta^\alpha + (1-2\varepsilon)\varepsilon^{-\alpha} = 1,$$

т.е. $\delta \approx \varepsilon^{-1/\alpha}$. Очевидно, что

$$\int_0^1 y^2(x) dx = 1 - 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{3} = 1 - \frac{4\varepsilon}{3}.$$

С другой стороны,

$$\int_0^1 P(x)y'_0(x)^2 dx = \frac{2\delta}{\varepsilon} \approx 2^{1-1/\alpha}\varepsilon^{-1-1/\alpha}.$$

Следовательно,

$$\lambda_1 \leq C\varepsilon^{-1-1/\alpha}$$

и, поскольку $-1 - 1/\alpha > 0$ для $0 > \alpha > -1$, значение λ_1 может быть произвольно мало.

d. Пусть теперь $\alpha \leq -1$, $\beta \geq 1$. Используя неравенство Гёльдера, мы получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx &\leq \left(\int_0^1 |y(x)|^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}, \\ \int_0^1 |y'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx &\leq \left(\int_0^1 P(x)y'(x)^2 dx \right)^{\alpha/(\alpha-1)}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\lambda_1 \geq \inf_y \frac{\left(\int_0^1 |y'(x)|^{2\alpha/(\alpha-1)} dx \right)^{(\alpha-1)/\alpha}}{\left(\int_0^1 |y(x)|^{2\beta/(\beta-1)} dx \right)^{(\beta-1)/\beta}} \geq 1.$$

Последнее неравенство вытекает из оценки

$$\left(\int_0^1 |y(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \left(\int_0^1 |y'(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

где

$$2 < q = \frac{2\beta}{\beta-1} < \infty, \quad 1 \leq p = \frac{2\alpha}{\alpha-1} < 2.$$

Это следует, в свою очередь, из неравенства

$$\max |y(x)| \leq \int_0^1 |y'(x)| dx,$$

вытекающего из формулы $y(x) = \int_0^x y'(t) dt$. Если $\alpha \leq -1$, $\beta = 1$, то мы можем использовать вместо неравенства Гёльдера оценку

$$\int_0^1 Q(x)y(x)^2 dx \leq \max y(x)^2,$$

и поскольку

$$\max y(x)^2 \leq \left(\int_0^1 |y'(x)|^p dx \right)^{2/p} \quad \text{для } 1 \leq p < 2,$$

мы видим, что $\lambda_1 \geq 1$.

Доказательство завершено.

Доказанные оценки могут быть переформулированы в следующей форме:

ТЕОРЕМА 5. Пусть λ_1 – первое собственное значение задачи (1)–(2). Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta - \alpha + 2\alpha\beta < 0$, тогда

$$\lambda_1 \leq C(\alpha, \beta) \frac{\left(\int_0^1 P(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha}}{\left(\int_0^1 Q(x)^\beta dx \right)^{1/\beta}};$$

если $\alpha \leq -1$, $\beta \geq 1$, тогда

$$\lambda_1 \geq C(\alpha, \beta) \frac{\left(\int_0^1 P(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha}}{\left(\int_0^1 Q(x)^\beta dx \right)^{1/\beta}},$$

где $C(\alpha, \beta)$ – положительное число, зависящее только от α и β .

§4. Об оценках всех собственных значений

Снова рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля:

$$y'' + \lambda Q(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

при условии, что

$$\int_0^1 Q(x)^\beta dx = 1,$$

и оценим k -е собственное значение λ_k . Наш главный результат состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 6. Если $\beta \geq 1$, тогда $\lambda_k \geq C_0(\beta)k^2$. Если $\beta < \frac{1}{2}$, $\beta \neq 0$, тогда $\lambda_k \leq C_0(\beta)k^2$. Постоянная $C_0(\beta)$ здесь не зависит от k .³

³Можно показать, что $C_0(\beta) = m_\beta$ или $C_0(\beta) = M_\beta$, где значения постоянных m_β и M_β указаны в теореме 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta \geq 1$ и y_k — собственная функция задачи Штурма–Лиувилля с номером k . Эта функция имеет $k-1$ нулей в интервале $(0, 1)$: $\nu_1, \dots, \nu_{k-1}$. Пусть $\nu_0 = 0 < \nu_1 < \dots < \nu_k = 1$ и I — один из интервалов (ν_j, ν_{j+1}) , где $j = 0, 1, \dots, k-1$. Рассмотрим функцию $y_k(x)$ на интервале I . Если $\max_I y'_k(x) = y'_k(\xi_1) = 1$ и $y'_k(\xi) = 0$, $\xi \in I$, тогда

$$\int_{\xi}^{\xi_1} y''_k(x) dx = \lambda_k \int_{\xi}^{\xi_1} Q(x) y_k(x) dx.$$

Заметим, что $|y_k(x)| \leq C(\nu_{j+1} - \nu_j)$, и мы можем предположить, что $y_k(x) \geq 0$ в I . Следовательно,

$$\int_I Q(x) dx \geq (\nu_{j+1} - \nu_j)^{-1} \lambda_k^{-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 Q(x) dx = \sum \int_{I'_j} Q dx \geq \lambda_k^{-1} \sum_1^N (\nu_{j+1} - \nu_j)^{-1} \geq \lambda_k^{-1} k^2,$$

и потому

$$\lambda_k \geq k^2 \left(\int_0^1 Q dx \right)^{-1} \geq k^2 \left(\int_0^1 Q^\beta dx \right)^{-1/\beta} \quad \text{для } \beta \geq 1.$$

Следовательно,

$$\int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} Q(x)^\beta dx \geq C_0(\beta)^\beta (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1-2\beta} \lambda_k^{-\beta}.$$

Суммируя эти неравенства по j , мы получаем, что

$$1 \geq C_0(\beta)^\beta \lambda_k^{-\beta} \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1-2\beta}.$$

Заметим, что $1 - 2\beta \leq -1$ и по лемме A11

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1-2\beta} \geq k \cdot \left(\frac{1}{k} \right)^{1-2\beta} = k^{2\beta}.$$

Следовательно,

$$1 \geq C_0(\beta)^\beta \lambda_k^{-\beta} k^{2\beta}$$

и

$$\lambda_k \geq C_0(\beta) k^2.$$

Аналогично, если $0 < \beta < 1/2$, то мы получаем неравенство

$$1 \leq C_0(\beta)^\beta \lambda_k^{-\beta} \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1-2\beta}.$$

Поскольку $1 - 2\beta < 1$, мы имеем по лемме A11, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1-2\beta} \leq k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^{1-2\beta} = k^{2\beta}.$$

Итак,

$$1 \leq C_0(\beta)^\beta \lambda_k^{-\beta} k^{2\beta},$$

т.е.

$$\lambda_k \leq C_0(\beta) k^2.$$

Если $\beta < 0$, тогда неравенство принимает вид

$$1 \geq C_0(\beta)^\beta \lambda_k^{-\beta} \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1-2\beta},$$

и так как $1 - 2\beta > 1$, мы видим, что

$$1 \geq C_0(\beta)^\beta \lambda_k^{-\beta} k^{2\beta},$$

что дает нам неравенство

$$\lambda_k \leq C_0(\beta) k^2.$$

Рассмотрим теперь другую задачу Штурма–Лиувилля:

$$(P(x)y')' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

при условии, что

$$\int_0^1 P(x)^\alpha dx = 1.$$

ТЕОРЕМА 7. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$, тогда $\lambda_k \leq C_0(\alpha) k^2$. Если $\alpha \leq -1$, тогда $\lambda_k \geq C_0(\alpha) k^2$. Здесь $C_0(\alpha)$ – положительная постоянная, не зависящая от k .⁴

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$. Рассмотрим, как и выше, k -ю собственную функцию $y_k(x)$, соответствующую собственному значению λ_k . Пусть $\nu_0, \dots, \nu_k$ – нули $y_k(x)$ и $\nu_0 = 0 < \nu_1 < \dots < \nu_k = 1$. Пусть I – один из интервалов (ν_j, ν_{j+1}) , где $j = 0, 1, \dots, k-1$, пусть

$$l = \nu_{j+1} - \nu_j, \quad \rho = \int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} P(x)^\alpha dx.$$

⁴Можно показать, что $C_0(\beta) = m_\beta$ или $C_0(\alpha) = C(r)$, где $r = 2\alpha/(\alpha - 1)$ и значение постоянной $C(r)$ указано в теореме 2.

Заменяя x на $\nu_j + tl$, $P(x)$ на $p(t)(\rho/l)^{1/\alpha}$ и λ_k на $\rho^{1/\alpha}l^{-2-1/\alpha}m$, мы получаем, что

$$(p(t)y'_t)'_t + my = 0, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0;$$

$$\int_0^1 p(t)^\alpha dt = 1.$$

Теорема 2 утверждает, что $m \leq C_0(\alpha) = C(r)$, так что

$$\lambda_k \leq C_0(\alpha)l^{-2-1/\alpha}\rho^{1/\alpha}.$$

Если $\alpha > 0$, тогда

$$\lambda_k^\alpha \leq C_0(\alpha)^\alpha l^{-2\alpha-1}\rho$$

или

$$\lambda_k^\alpha (\nu_{j+1} - \nu_j)^{2\alpha+1} \leq C_0(\alpha)^\alpha \int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} P(x)^\alpha dx.$$

Суммируя по j от 0 до $k-1$, мы получаем, что

$$\lambda_k^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{2\alpha+1} \leq C_0(\alpha)^\alpha.$$

Поскольку $1 + 2\alpha > 1$, мы имеем по лемме A11 неравенство

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{2\alpha+1} \geq k \frac{1}{k^{2\alpha+1}} = k^{-2\alpha},$$

так что

$$\lambda_k \leq C_0 k^2.$$

Если $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, тогда, как и выше,

$$\lambda_k^\alpha \geq C_0(\alpha)^\alpha l^{-2\alpha-1}\rho^2$$

или

$$\lambda_k^\alpha (\nu_{j+1} - \nu_j)^{2\alpha+1} \geq C_0(\alpha)^\alpha \int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} P(x)^\alpha dx.$$

Суммируя по j между 0 и $k-1$, мы видим, что

$$\lambda_k^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1+2\alpha} \geq C_0(\alpha)^\alpha.$$

Поскольку $1 + 2\alpha > 0$, из леммы A11 следует, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1+2\alpha} \leq k \frac{1}{k^{1+2\alpha}} = k^{-2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\lambda_k^\alpha k^{-2\alpha} \geq C_0(\alpha)^\alpha,$$

и так как $\alpha < 0$, мы видим, что

$$\lambda_k \leq C_0(\alpha)k^2.$$

Для $\alpha \leq -1$ те же аргументы приводят к оценке

$$\lambda_k \geq C_0(\alpha)l^{-2-1/\alpha}\rho^{1/\alpha},$$

т.е.

$$(\nu_{j+1} - \nu_j)^{1+2\alpha} \lambda_k^\alpha \leq C_0(\alpha)^\alpha \int_{\nu_j}^{\nu_{j+1}} P(x)^\alpha dx.$$

Суммируя по j от 0 до $k-1$, получаем оценку

$$\lambda_k^\alpha \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1+2\alpha} \leq C_0(\alpha)^\alpha.$$

Поскольку $2\alpha + 1 \leq -1$, из леммы A11 следует, что

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j)^{1+2\alpha} \leq k \frac{1}{k^{1+2\alpha}} = k^{-2\alpha},$$

и потому

$$\lambda_k^\alpha k^{-2\alpha} \leq C_0(\alpha)^\alpha,$$

так что

$$\lambda_k \geq C_0(\alpha)k^2.$$

Доказанные теоремы могут быть переформулированы следующим образом.

ТЕОРЕМА 8. Пусть λ_k — это k -е собственное значение задачи Штурма–Лиувилля, рассмотренной в теореме 6. Если $\beta \geq 1$, то

$$\lambda_k \geq C_0(\beta)k^2 \left(\int_0^1 Q(x)^\beta dx \right)^{-1/\beta}.$$

Если $\beta < \frac{1}{2}$, $\beta \neq 0$, то

$$\lambda_k \leq C_0(\beta)k^2 \left(\int_0^1 Q(x)^\beta dx \right)^{-1/\beta}.$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть λ_k — k -е собственное значение задачи Штурма–Лиувилля, рассмотренной в теореме 7. Если $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$, тогда

$$\lambda_k \geq C_0(\alpha)k^2 \left(\int_0^1 P(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha}.$$

Если $\alpha \leq -1$, тогда

$$\lambda_k \leq C_0(\alpha)k^2 \left(\int_0^1 P(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha}.$$

§ 5. Об оценке первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля для оператора высокого порядка

Рассмотрим зависимость первого собственного значения λ_1 задачи Штурма–Лиувилля

$$(4) \quad (-1)^{n+1} y^{(2n)}(x) + \lambda q(x) y(x) = 0$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$, с краевыми условиями

$$(5) \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = y(1) = y'(1) = \dots = y^{(n-1)}(1) = 0,$$

от потенциала q . Обозначим R_β множество вещественнозначных измеримых на $(0, 1)$ функций q с положительными значениями и таких, что

$$\int_0^1 q(x)^\beta dx = 1,$$

где β – вещественное число, $\beta \neq 0$. Задача (4), (5) имеет дискретный спектр. Из вариационного принципа следует, что первое собственное значение λ_1 может быть найдено как

$$\lambda_1 = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 y^{(n)}(x)^2 dx}{\int_0^1 q(x) y(x)^2 dx}.$$

Легко видеть, что все собственные значения задачи (4), (5) вещественны и положительны. Наша цель – получить оценку значений

$$m_\beta = \inf_{q \in R_\beta} \lambda_1, \quad M_\beta = \sup_{q \in R_\beta} \lambda_1.$$

Положим

$$L[q, y] = \frac{\int_0^1 y^{(n)}(x)^2 dx}{\int_0^1 q(x) y(x)^2 dx}.$$

ТЕОРЕМА 10. Если $\beta \geq 1$, тогда $m_\beta \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y(x)$ – собственная функция, соответствующая λ_1 , тогда по теореме Ролля каждая функция $y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ имеет по меньшей мере один нуль на $(0, 1)$. Следовательно,

$$y^{(n-1)}(x) = \int_\xi^x y^{(n)}(t) dt,$$

где ξ — это нуль функции $y^{(n-1)}(x)$. Поэтому

$$|y^{(n-1)}(x)| \leq \int_0^1 |y^{(n)}(t)| dt.$$

Аналогично,

$$|y^{(n-i)}(x)| \leq \int_0^1 |y^{(n-i+1)}(t)| dt.$$

По индукции можно доказать неравенство

$$|y(x)|^2 \leq \left(\int_0^1 |y^{(n)}(t)| dt \right)^2 \leq \int_0^1 |y^{(n)}(t)|^2 dt.$$

Отсюда

$$\frac{\int_0^1 |y^{(n)}(t)|^2 dt}{\int_0^1 q(t)y(t)^2 dt} \geq \frac{1}{\int_0^1 q(t) dt} \geq \frac{1}{\left(\int_0^1 q(t)^\alpha dt \right)^{1/\alpha}} \geq 1.$$

ТЕОРЕМА 11. Если $\beta \geq 1/2n$, тогда $M_\beta = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $q_\varepsilon(x) = C_\varepsilon(x+\varepsilon)^{-2n}$, где C_ε таково, что $\int_0^1 q_\varepsilon(x)^\beta dx = 1$. Легко видеть, что $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть $y \in W_2^n(0, 1)$ и y удовлетворяет условиям (5). Положим $y(x) = 0$ вне $(0, 1)$. В силу неравенства Харди

$$\int_0^1 y(x)^2 (x+\varepsilon)^{-2n} dx \leq C_1 \int_0^1 |y^{(n)}(t)|^2 dt,$$

мы получаем неравенство

$$\int_0^1 q_\varepsilon(t)y(t)^2 dt \leq C_\varepsilon C_1 \int_0^1 |y^{(n)}(t)|^2 dt.$$

Следовательно,

$$L[q_\varepsilon, y] = \frac{\int_0^1 y^{(n)}(t)^2 dt}{\int_0^1 q_\varepsilon(t)y(t)^2 dt} \geq \frac{1}{C_\varepsilon C_1} \rightarrow \infty, \quad \text{когда } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Итак, $M_\beta = \infty$.

ТЕОРЕМА 12. Если $\beta < 1/2n$, то $M_\beta = C(\beta) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $0 < \beta < 1/2n$. Используя неравенство Гёльдера, мы получаем

$$1 = \int_0^1 q(x)^\beta dx \leq \left(\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \right)^\beta \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{1-\beta},$$

где $p = 2\beta/(\beta - 1)$, так что $0 > p > -2(n - 1)$. Следовательно,

$$L[q, y] \leq \frac{\int_0^1 y^{(n)}(x)^2 dx}{\left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p}}.$$

Положим $y_0(x) = x^{n+\delta-1}(1-x)^{n+\delta-1}$. Тогда $\int_0^1 y^{(n)}(x)^2 dx = c_1 < \infty$, если $\delta > \frac{1}{2}$.

Далее, $\int_0^1 |y(x)|^p dx = c_2 < \infty$ при $p(n + \delta - 1) + 1 > 0$, т.е. если

$$\delta < \frac{1 + \beta - 2\beta n}{2\beta}.$$

Поскольку $(1 + \beta - 2\beta n)/(2\beta) > \frac{1}{2}$, существует δ , удовлетворяющее всем условиям. Итак, $\lambda_1 \leq L[q, y_0] < c_3$.

Пусть теперь $\beta < 0$. Используя неравенство Гёльдера, мы получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |y(x)|^p dx &= \int_0^1 q(x)^{p/2} |y(x)|^p q(x)^{-p/2} dx \\ &\leq \left(\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \right)^{p/2} \left(\int_0^1 q(x)^\beta dx \right)^{1/(1-\beta)} \\ &= \left(\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_0^1 q(x)y(x)^2 dx \geq \left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p}.$$

Отсюда выводим, что

$$L[q, y] \leq \frac{\int_0^1 y^{(n)}(x)^2 dx}{\left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p}}.$$

Полагая $y_0(x) = x^n(1-x)^n$, мы видим, что $L[q, y] \leq c$.

ТЕОРЕМА 13. Если $\beta < 1$, тогда $m_\beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $\beta < 0$. Положим

$$q(x) = \begin{cases} (1-\varepsilon)^{1/\beta} \varepsilon^{-1/\beta}, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ (1-\varepsilon)^{-1/\beta} \varepsilon^{1/\beta}, & \text{если } \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число. Пусть $y_0(x) = x^n(1-x)^n$. Тогда

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 y_0^{(n)}(x)^2 dx}{\int_0^1 q(x) y_0(x)^2 dx} \leq C \varepsilon^{-1/\beta}.$$

Следовательно, λ_1 может быть произвольно мало.

Пусть $0 < \beta < 1$. Положим

$$q(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1/\beta}, & \text{если } |x - \frac{1}{2}| > \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x - \frac{1}{2}| < \varepsilon, \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$ – малое число. Пусть y_0 – гладкая функция, равная нулю в точках $x = 0$ и $x = 1$ и равная 1 в $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Тогда

$$\lambda_1 \leq \frac{C}{\int_{1/2-\varepsilon}^{1/2+\varepsilon} (2\varepsilon)^{-1/\beta} dx} = C_1 \varepsilon^{1/\beta-1} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, λ_1 может быть произвольно мало.

При изучении задачи Штурма–Лиувилля для уравнения второго порядка мы нашли точное экстремальное первое собственное значение для оператора $y''(x) + \lambda q(x)y = 0$ при условии $\int_0^1 q(x)^\beta dx = 1$. Мы нашли также потенциалы q , для которых реализуется это точное значение. В случае оператора высокого порядка можно выписать дифференциальное уравнение для функции q . Однако, это уравнение имеет порядок n и мы не можем найти точное решение.

Рассмотрим подробнее следующую задачу:

$$\begin{aligned} -y^{(4)} + \lambda q(x)y &= 0, \\ y(0) = y'(0) &= 0, \quad y(1) = y'(1) = 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \int_0^1 q(x)^\beta dx = 1, \quad \beta > 1, \end{aligned}$$

где q – ограниченная измеримая функция. Как мы доказали выше, первое собственное значение этой задачи больше положительной постоянной, не зависящей от q . А именно,

$$\lambda_1 = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 y''(x)^2 dx}{\int_0^1 q(x) y(x)^2 dx} \geq \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} \frac{\int_0^1 y''(x)^2 dx}{\left(\int_0^1 |y(x)|^p dx \right)^{2/p}}.$$

Пусть

$$G[y] = \frac{\int_0^1 y''(x)^2 dx}{\left(\int_0^1 |y(x)|^p dx\right)^{2/p}}$$

и $m = \inf_{y \in C_0^\infty(0,1)} G[y]$. Пусть $\{y_k\}$ – минимизирующая последовательность. По однородности можно предположить, что

$$\int_0^1 y''(x)^2 dx = 1.$$

Последовательность $\{y_k\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к y_0 равномерно на $[0, 1]$ и слабо в $W_{2,0}^2(0, 1)$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала L имеет вид

$$\begin{aligned} y^{(4)} - m|y|^{(\beta+1)/(\beta-1)} \operatorname{sgn} y &= 0, \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0, \quad \int_0^1 y''(x)^2 dx &= 1. \end{aligned}$$

Положим

$$q(x) = \lambda |y_0|^{2/(\beta-1)},$$

где λ таково, что $\int_0^1 q(x)^\beta dx = 1$. Тогда задача

$$\begin{aligned} -y^{(4)} + \lambda q(x)y &= 0, \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

имеет собственное значение m , которому соответствует собственная функция y . Это собственное значение минимально в рассматриваемом классе функций q . Поэтому нахождение экстремальных q и λ_1 сводится к краевой задаче для уравнения четвертого порядка. Аналогично можно рассмотреть задачи для других значений β и для уравнений порядков $n > 4$.

Рассмотрим краевую задачу

$$(-1)^{k_s} y^{(2n)}(x) + \lambda q(x)y(x) = 0$$

на отрезке $0 \leq x \leq 1$, с краевыми условиями

$$y^{(i)}(x_j) = 0, \quad i = 0, \dots, k_j, \quad 0 = x_1 < x_2 < \dots < x_s = 1,$$

где

$$s \leq 2n - 1, \quad k_1 + \dots + k_s = 2n - s.$$

Мы предполагаем, что

$$q(x) \geq 0, \quad \int_0^1 q(x)^\beta dx = 1.$$

Можно доказать, что эта задача имеет положительные собственные значения. Пусть λ_1 — наименьшее из них. Покажем, что $\lambda_1 \geq 1$. В самом деле, соответствующая собственная функция y_1 имеет по крайней мере $2n$ нулей (с учетом их кратности). Функция $y^{(2n-1)}$ имеет по крайней мере один нуль ξ . Отсюда

$$y^{(2n-1)}(x) = \int_\xi^1 y^{(2n)}(x) dx,$$

и, следовательно,

$$|y^{(2n-1)}(x)| \leq \lambda_1 \int_0^1 q(x) dx \cdot \max |y(x)| \leq \lambda_1 \max |y(x)|.$$

Поскольку каждая функция $y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ имеет по крайней мере один нуль на $(0, 1)$, мы имеем

$$y^{(2n-i)}(x) = \int_{\xi_i}^x y^{(2n-i+1)}(t) dt,$$

где ξ_i — это нуль $y^{(2n-i)}(x)$. Отсюда

$$|y^{(2n-i)}(x)| \leq \max_t |y^{(2n-i+1)}(t)|.$$

В частности,

$$|y(x)| \leq \max_t |y^{(2n-1)}(t)| \leq \lambda_1 \max |y(x)|,$$

и потому $\lambda_1 \geq 1$.

§6. О задаче Лагранжа

6.1. Введение. Рассматриваемая задача Лагранжа состоит в том, чтобы найти экстремальные значения следующего функционала:

$$L[Q, y] = \frac{\int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx}{\int_0^1 y'(x)^2 dx},$$

при условиях, что $y \in H^2(0, 1)$, $Q(x)$ — ограниченная измеримая функция,

$$(6) \quad \int_0^1 Q(x)^\alpha dx = 1, \quad Q(x) \geq 0,$$

$$(7) \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

где $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Легко видеть, что эта задача эквивалентна вариационной задаче об экстремуме функционала

$$F[Q, y] = \frac{\int_0^1 Q(x) y'(x)^2 dx}{\int_0^1 y(x)^2 dx}$$

при условиях (6) и

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 0.$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала L имеет вид

$$(8) \quad (Q(x)y'')'' + \lambda y'' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Важную роль в дальнейшем изложении играет функционал

$$G[y] = \frac{\left(\int_0^1 |y'(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 y(x)^2 dx}, \quad \text{где } p = \frac{2\alpha}{\alpha - 1}.$$

Пусть R_α – множество ограниченных измеримых функций Q , определенных на $[0, 1]$ и удовлетворяющих условиям (6).

Пусть $K_p(a, b)$ для вещественного $p \neq 0$ – множество неубывающих вещественных функций y , определенных на $[a, b]$, абсолютно непрерывных на $[a, b - \varepsilon]$ для каждого $\varepsilon > 0$ и таких, что $y(a) \geq 0$,

$$\int_a^b y'(x)^p dx < \infty, \quad \int_a^b y(x)^2 dx < \infty.$$

Пусть $K_p(a, b, c)$ – множество вещественных функций y , определенных на $[a, c]$ и таких, что $y \in K_p(a, b)$, $y(-x) \in K_p(-c, -b)$, $\int_a^b |y'(x)|^p dx < \infty$ и $\int_b^c |y'(x)|^p dx < \infty$.

Пусть H – множество функций y , принадлежащих $H^2(0, 1)$ и удовлетворяющих условиям (7).

Положим, наконец,

$$m_\alpha = \inf_{Q \in R_\alpha} \inf_{y \in H} L[Q, y], \quad M_\alpha = \sup_{Q \in R_\alpha} \inf_{y \in H} L[Q, y].$$

Мы хотим найти значения m_α , M_α и функции Q , y , на которых эти экстремальные значения достигаются.

6.2. Предварительные оценки.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\alpha \in \mathbb{R} \setminus 0$. Тогда

- 1) M_α конечно для $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\alpha \neq 0$ и $M_\alpha = \infty$ для $\alpha \leq -\frac{1}{2}$;
- 2) $m_\alpha > 0$ для $\alpha \leq -1$ и $m_\alpha = 0$ для $\alpha > -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Если $\alpha > 1$, то по неравенству Гёльдера

$$\int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx \leq \left(\int_0^1 Q(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \left(\int_0^1 |y''(x)|^p dx \right)^{2/p},$$

где $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Положим $y_0(x) = x^2(1 - x)^2$. Тогда

$$\inf_{y \in H} L[Q, y] \leq \frac{\left(\int_0^1 |y_0''(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^1 y_0'(x)^2 dx} = C.$$

Следовательно, $M_\alpha \leq C$. Аналогично, для $\alpha = 1$ мы имеем

$$\inf_{y \in H} L[Q, y] \leq \frac{\max y_0''(x)^2}{\int_0^1 y_0'(x)^2 dx} = C.$$

2. Пусть $0 < \alpha < 1$ и Q — функция из класса R_α . По лемме A12, мы можем построить функцию $y(x)$ такую, что

$$y''(x)^2 = [Q(x) + 1]^{\alpha-1}, \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

По построению

$$\int_0^1 |y''(x)|^p dx = \int_0^1 [Q(x) + 1]^\alpha dx,$$

где $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Пусть r — точка максимума функции $y(x)$. Функция y' удовлетворяет условиям леммы A6 на интервалах $[0, r]$ и $[r, 1]$. Следовательно, $L[Q, y] \leq L[Q + 1, y] \leq C_1 G[y'] \leq C$, и потому $M_\alpha \leq C$.

3. Пусть теперь $0 > \alpha > -\frac{1}{2}$. Рассмотрим ту же функцию $y(x)$, что и выше, в п. 2. Пусть $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Тогда $0 < p < \frac{2}{3}$. Используя лемму A6, как и выше, мы получаем, что

$$\int_0^1 y'(x)^2 dx \geq C > 0,$$

и, следовательно, $M_\alpha \leq C^{-1}$.

4. Пусть $\alpha < -\frac{1}{2}$ и $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10})$. Пусть

$$Q(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha}, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ (1 - \varepsilon)^{-1/\alpha}\varepsilon^{1/\alpha}, & \text{если } \varepsilon < x < 1, \end{cases}$$

так что

$$\int_0^1 Q(x)^\alpha dx = 1.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^1 y'(x)^2 dx &\leq \varepsilon^2 \int_0^\varepsilon y''(x)^2 dx + (1-\varepsilon)^2 \int_\varepsilon^1 y''(x)^2 dx \\ &= (1-\varepsilon)^{-1/\alpha} \varepsilon^{2+1/\alpha} \int_0^\varepsilon Q(x) y''(x)^2 dx \\ &\quad + (1-\varepsilon)^{2+1/\alpha} \varepsilon^{-1/\alpha} \int_\varepsilon^1 Q(x) y''(x)^2 dx \\ &\leq 2\varepsilon^\gamma \int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx, \end{aligned}$$

где $\gamma = \min(2 + 1/\alpha, -1/\alpha) > 0$, мы получаем, что

$$M_\alpha \geq \varepsilon^{-\gamma}/2,$$

и, следовательно, $M_\alpha = \infty$.

5. Рассмотрим теперь случай $\alpha = -\frac{1}{2}$. Положим

$$Q(x) = \max\left(\frac{x^2}{\varepsilon^2}, \frac{\delta^2}{\varepsilon^2}\right),$$

где $\delta = \exp(1 - 1/\varepsilon)$. Заметим, что

$$\int_0^1 Q(x)^{-1/2} dx = \delta \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} + \int_\delta^1 \frac{\varepsilon}{x} dx = \varepsilon - \varepsilon \ln \delta = 1.$$

С другой стороны, из хорошо известной оценки

$$\int_0^1 y'(x)^2 dx \leq 4 \int_0^1 x^2 y''(x)^2 dx,$$

верной для всех функций $y' \in W_2^1(0, 1)$, равных нулю в 1, следует, что

$$\int_0^1 y'(x)^2 dx \leq 4\delta^2 \int_0^\delta y''(x)^2 dx + 4 \int_\delta^1 x^2 y''(x)^2 dx \leq 4\varepsilon^2 \int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx.$$

Это означает, что

$$\inf_{y \in H} \frac{\int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx}{\int_0^1 y'(x)^2 dx} \geq \frac{1}{4\varepsilon^2},$$

так что $M_\alpha = \infty$.

6. Пусть $\alpha \leq -1$. В силу неравенства Гёльдера,

$$\int_0^1 |y''(x)|^p dx \leq \left(\int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx \right)^{p/2} \left(\int_0^1 Q(x)^\alpha dx \right)^{1/(1-\alpha)},$$

где $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Поскольку $p \geq 1$, неравенства

$$\int_0^1 y'(x)^2 dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^x |y''(t)| dt \right)^2 dx \leq \left(\int_0^1 |y''(t)| dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 |y''(t)|^p dt \right)^{2/p}$$

справедливы для всех функций $y \in H$, и потому $m_\alpha \geq 1$.

7. Если $\alpha > 0$, то мы можем взять функцию y , равную 0 в $[0, \frac{1}{2}]$ и такую, что $\int_0^1 y'^2 dx = 1$. Поскольку функция Q может иметь произвольно малые значения в $[\frac{1}{2}, 1]$, значение m_α равно 0.

8. Пусть $0 > \alpha > -1$. Покажем, что в этом случае $m_\alpha = 0$. Положим

$$y'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } 0 < x < \varepsilon, \\ 2\varepsilon, & \text{если } \varepsilon < x < \frac{1}{2} - \varepsilon, \\ 1 - 2x, & \text{если } \frac{1}{2} - \varepsilon < x < \frac{1}{2}, \\ Q(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha}, & \text{если } |x - \frac{1}{2}| < \frac{\varepsilon}{4} \\ \text{или } |x - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4}, \\ (1 - \varepsilon)^{-1/\alpha}\varepsilon^{1/\alpha} & \text{для других } x. \end{cases} \end{cases}$$

Если $y(0) = 0$, то функция y определена для $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Положим $y(x) = -y(1 - x)$ для $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(x)^\alpha dx &= 1; & \int_0^1 Q(x)y''(x)^2 dx &= 4\varepsilon^{1-1/\alpha}(1 - \varepsilon)^{1/\alpha}, \\ \int_0^1 y'(x) dx &= 0, & \int_0^1 y'(x)^2 dx &= \frac{16\varepsilon^3}{3} + 4\varepsilon^2(1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$m_\alpha \leq \frac{\int_0^1 Q(x)y''(x)^2 dx}{\int_0^1 y'(x)^2 dx} \leq \varepsilon^{-1-1/\alpha},$$

и, так как $-1 - 1/\alpha > 0$, значение m_α равно нулю.

6.3. Точные результаты. Рассмотрим теперь вопрос о достижимости экстремальных значений функционала L .

ТЕОРЕМА 15. Если $\alpha < -1$, то

$$Lm_\alpha \geq \frac{4(2\alpha + 1)}{\alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{2\alpha + 1} \right)^{1-1/\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right)^2,$$

где B — бета-функция Эйлера.

Если $0 < \alpha < 1$, то существуют функция $y_0 \in H$ и функция Q , удовлетворяющая (6), такие, что

$$\inf_y L[Q, y] = L[Q, y_0] = M_\alpha.$$

Если $\alpha \geq 1$, то

$$M_\alpha \leq \frac{4(2\alpha+1)}{\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{1+2\alpha} \right)^{1-1/\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right)^2.$$

Если $0 < \alpha < 1$, то

$$M_\alpha = \frac{4(2\alpha+1)}{\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{1+2\alpha} \right)^{1-1/\alpha} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right)^2.$$

Если $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, то

$$M_\alpha \leq -\frac{4(2\alpha+1)}{\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{1+2\alpha} \right)^{1-1/\alpha} \left(\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/2-1/2\alpha}} \right)^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 16. В частности, в классической задаче Лагранжа с $\alpha = \frac{1}{2}$ оптимальная функция $Q(x)$ определяется на $(0, 1)$ в параметрической форме следующим образом:

$$x = \frac{2t + \sin 2t}{4\pi}, \quad Q(x) = \frac{16 \cos^4 t}{9}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Оптимальное значение $M = 16\pi^2/3$ было найдено Келлером и Таджбахшем в [3]. Оптимальная колонна имеет две точки, в которых $Q(x)$ обращается в нуль.

Заметим также, что мы пока не знаем точного значения M_α при $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ и при $\alpha > 1$ и не можем доказать, что оптимальные функции $Q(x)$, $z(x)$ существуют в этом случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Пусть $-\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $\alpha \neq 0$ и $z(x) = y_0(x)$ для $0 < x < \frac{1}{2}$, $z(x) = -y_0(x - \frac{1}{2})$ для $\frac{1}{2} < x < 1$, где y_0 — функция, найденная в леммах А5 и А6 для $r = \frac{1}{2}$ и $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$. Положим $Q(x) = |z'(x)|^{2/(\alpha-1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(1-x) \quad \text{для } 0 < x < 1, & Q(x) &= Q(\tfrac{1}{2} - x) \quad \text{для } 0 < x < \tfrac{1}{2}, \\ Q(x) &= c|x - \tfrac{1}{4}|^\gamma [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow \tfrac{1}{4}, \\ Q(x) &= c|x - \tfrac{3}{4}|^\gamma [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

где $\gamma = 2/(\alpha + 1) \in]1, 2[$, если $\alpha > 0$, и $\gamma = 2$, если $\alpha < 0$.

ЛЕММА 18. Пусть $0 < \alpha < 1$ и $Q(x)$, $z(x)$ — функции, определенные в замечании 17. Пусть

$$m_1 = \inf_{y \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx}{\int_0^1 y'(x)^2 dx}.$$

Тогда $m_1 = M_\alpha$, где M_α было указано в теореме 15. Минимальное значение достигается на функции w , равной $\int_0^x z(t) dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{y_k(x)\}$ такую, что $\int_0^1 y'_k(x)^2 dx = 1$. Так как интегралы

$$\int_0^{1/4-\varepsilon} y''_k(x)^2 dx, \quad \int_{1/4+\varepsilon}^{3/4-\varepsilon} y''_k(x)^2 dx, \quad \int_{3/4+\varepsilon}^1 y''_k(x)^2 dx$$

ограничены, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду, в $H^1(0, \frac{1}{4} - \varepsilon)$, $H^1(\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{3}{4} - \varepsilon)$ и $H^1(\frac{3}{4} + \varepsilon, 1)$, и слабо в $H^2(0, \frac{1}{4} - \varepsilon)$, $H^2(\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{3}{4} - \varepsilon)$ и $H^2(\frac{3}{4} + \varepsilon, 1)$. Используя диагонализацию, можно найти подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на $(0, 1)$ к $Y(x)$.

Покажем, что

$$(9) \quad \int_{1/4-\varepsilon}^{1/4+\varepsilon} y'_k(x)^2 dx + \int_{3/4-\varepsilon}^{3/4+\varepsilon} y'_k(x)^2 dx \leq C\varepsilon^{2-\gamma}$$

с постоянной C , не зависящей от ε и k . Действительно, используя равенство

$$y'_k(\tfrac{1}{4} - \varepsilon) = \int_0^{1/4-\varepsilon} y''_k(x) dx,$$

мы видим, что

$$y'_k(\tfrac{1}{4} - \varepsilon)^2 \leq \int_0^{1/4-\varepsilon} Q(x) y''_k(x)^2 dx \int_0^{1/4-\varepsilon} Q(x)^{-1} dx \leq C_1 \varepsilon^{1-\gamma},$$

где $\gamma = 2/(\alpha + 1) > 1$. Поскольку $\int_{1/4+\varepsilon}^{3/4-\varepsilon} y'_k(x)^2 dx < 1$, существует такая точка $\theta_k \in]\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{3}{4} - \varepsilon[$, что $y'_k(\theta_k)^2 \leq 2$ и

$$y'_k(\tfrac{1}{4} + \varepsilon)^2 \leq 4 + 2 \int_{\theta_k}^{1/4+\varepsilon} Q(x) y''_k(x)^2 dx \int_{\theta_k}^{1/4+\varepsilon} Q(x)^{-1} dx \leq C_2 \varepsilon^{1-\gamma}.$$

Аналогично, имеем

$$y'_k(\tfrac{3}{4} - \varepsilon)^2 \leq C_2 \varepsilon^{1-\gamma}, \quad y'_k(\tfrac{3}{4} + \varepsilon)^2 \leq C_1 \varepsilon^{1-\gamma}.$$

Если $\frac{1}{4} - \varepsilon < x < \frac{1}{4}$, то

$$y'_k(x)^2 \leq 2y'_k(\tfrac{1}{4} - \varepsilon)^2 + 2 \int_{1/4-\varepsilon}^x Q(x) y''_k(x)^2 dx \int_{1/4-\varepsilon}^x Q(x)^{-1} dx \leq C_3 (1/4 - x)^{1-\gamma},$$

и, следовательно,

$$\int_{1/4-\varepsilon}^{1/4} y'_k(x)^2 dx \leq C_3 \varepsilon^{2-\gamma},$$

так что верно (9). Поскольку мы можем предположить, что последовательность $y'_k(x)$ сходится равномерно к $Y'(x)$ вне ε -окрестности точек $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$, мы видим, что

$$\int_0^1 Y'(x)^2 dx = 1, \quad \int_0^1 Q(x)Y''(x)^2 dx \leq m_1.$$

Однако, m_1 — это наименьшее возможное значение последнего интеграла. Следовательно, $\int_0^1 Q(x)Y''(x)^2 dx = m_1$. Функция Y удовлетворяет уравнению

$$(Q(x)Y''(x))'' + m_1Y''(x) = 0,$$

$Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y(1) = 0, Y'(1) = 0$. Функция $z_1(x) = Y(x) + Y(1-x)$ также минимизирующая, если она не равна тождественно нулю.

Если $z_1(x)$ не равна тождественно 0, то она четна и

$$Q(x)z_1''(x) + m_1z_1 = C.$$

Используя лемму А9, мы видим, что $C = m_1z_1(\frac{1}{4}) = m_1z_1(\frac{3}{4})$. Положим $u(x) = z_1(x) - z_1(\frac{1}{4})$. Тогда

$$Q(x)u'' + m_1u = 0, \quad u(\frac{1}{4}) = u(\frac{3}{4}) = 0.$$

С другой стороны, если $v(x) = w(x) - w(\frac{1}{4})$, где $w(x) = \int_0^x z(t) dt$ и z — функция, указанная в следствии 17, то

$$Q(x)v'' + mv = 0, \quad v(\frac{1}{4}) = v(\frac{3}{4}) = 0$$

и $v > 0$ в $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Если u обращается в нуль в $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, то по теореме Штурма $m_1 > m$, что невозможно. Если u не обращается в нуль в $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, то мы получаем, используя лемму А9, что

$$(m_1 - m) \int_{1/4}^{3/4} \frac{uv}{Q} dx = (u'v - uv') \Big|_{x=\frac{1}{4}}^{x=\frac{3}{4}} = 0$$

и $m_1 = m$.

Если $z_1(x) \equiv 0$, то функция Y нечетна и

$$Q(x)Y''(x) + m_1Y = A(x - 1/2),$$

где A — постоянная. Применяя лемму А9, мы видим, что $A = -4m_1Y(\frac{1}{4})$. Полагая $u(x) = Y(x) - A(x - \frac{1}{2})/m_1$, мы получаем, что

$$Qu'' + m_1u = 0.$$

Кроме того, $u(\frac{1}{4}) = u(\frac{1}{2}) = u(\frac{3}{4}) = 0$. Снова применяя теорему Штурма, мы видим, что $m_1 > m$, а это невозможно.

ЛЕММА 19. Пусть $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, $z(x)$ и $Q(x)$ — функции, найденные в следствии 17. Пусть

$$m_1 = \inf_{y \in H_0^2(0,1)} \frac{\int_0^1 Q(x) y''(x)^2 dx}{\int_0^1 y'(x)^2 dx}.$$

Тогда $m_1 = M_\alpha$, где M_α было указано в теореме 15. Минимальное значение достигается на функции $y_0(x) = \int_0^x z(t) dt$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим H пространство функций y , абсолютно непрерывных в $[0, \frac{1}{4} - \varepsilon, \frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{3}{4} - \varepsilon, \frac{3}{4} + \varepsilon, 1]$ для любого $\varepsilon > 0$ и таких, что $y \in L_2(0, 1)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} Q(x) y'(x)^2 dx + \int_{1/4}^{3/4} Q(x) y'(x)^2 dx + \int_{3/4}^1 Q(x) y'(x)^2 dx < \infty, \\ \int_0^1 y(x) dx = 0, \quad y(0) = y(1) = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что H является гильбертовым пространством.

Покажем, что для $y \in H$ существует последовательность $x_k \rightarrow \frac{1}{4}$ такая, что $Q y y'(x_k) \rightarrow 0$. Если это не так, то существует постоянная $c > 0$ такая, что $Q y y'(x) \geq c$ для $\frac{1}{4} - \varepsilon < x < \frac{1}{4}$. Тогда $|y y'(x)| \geq c_1 (\frac{1}{4} - x)^{-2}$ и, следовательно, $|y(x)| \geq c_2 (\frac{1}{4} - x)^{-1}$, $c_2 > 0$. Однако, это противоречит тому условию, что $y \in L_2(0, 1)$. Можно также найти аналогичные последовательности, сходящиеся к $\frac{1}{4} + 0, \frac{3}{4} - 0, \frac{3}{4} + 0$.

Норма в пространстве H может быть определена как

$$\|y\|_H^2 = \int_0^{1/4} Q(x) y'(x)^2 dx + \int_{1/4}^{3/4} Q(x) y'(x)^2 dx + \int_{3/4}^1 Q(x) y'(x)^2 dx.$$

В самом деле, если $\|y\|_H = 0$, то $y'(x) = 0$ и $y = C$ на каждом интервале $(0, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ и $(\frac{3}{4}, 1)$. Поскольку $y(0) = y(1) = 0$, мы видим, что $y(x) = 0$ в $(0, \frac{1}{4})$ и $(\frac{3}{4}, 1)$. Поскольку $\int_0^1 y(x) dx = 0$, существует $\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ такое, что $y(\theta) = 0$, так что $y(x) = 0$ в $(0, 1)$.

Проверим, что

$$(10) \quad \|y\|_{L_2} \leq C \|y\|_H.$$

Действительно, в силу неравенства Харди,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/4} y(x)^2 dx &\leq 4 \int_0^{1/4} \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 y'(x)^2 dx \leq C \int_0^{1/4} Q(x) y'(x)^2 dx, \\ \int_{3/4}^1 y(x)^2 dx &\leq 4 \int_{3/4}^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 y'(x)^2 dx \leq C \int_{3/4}^1 Q(x) y'(x)^2 dx. \end{aligned}$$

Если y обращается в нуль в точке $\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, то те же неравенства верны в интервалах $(\frac{1}{4}, \theta)$ и $(\theta, \frac{3}{4})$. Если это условие не выполнено, то

$$\begin{aligned} \int_{1/4}^{3/4} |y(x)| dx &\leq \int_0^{1/4} |y(x)| dx + \int_{3/4}^1 |y(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^{1/4} |y(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{3/4}^1 |y(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \frac{\sqrt{C}}{2} \left[\left(\int_0^{1/4} Q(x) |y'(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_{3/4}^1 Q(x) |y'(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

и существует точка $\theta \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ такая, что

$$|y(\theta)|^2 \leq 2C \left(\int_0^{1/4} Q(x) |y'(x)|^2 dx + \int_{3/4}^1 Q(x) |y'(x)|^2 dx \right).$$

Поскольку

$$\int_{1/4}^{3/4} |y(x) - y(\theta)|^2 dx \leq C \int_{1/4}^{3/4} Q(x) y'(x)^2 dx,$$

мы получаем, что

$$\int_{1/4}^{3/4} |y(x)|^2 dx \leq C_1 \int_0^{1/4} Q(x) y'(x)^2 dx$$

и (10) доказано.

Покажем, что оператор A , определенный в $H \cap H^2(0, 1)$ формулой $Ay = -(Q(x)y')'$ замкнут в $L_2(0, 1)$. Пусть $y_k \rightarrow y$, $Ay_k \rightarrow v$ в $L_2(0, 1)$. Уравнение $Au = v$ имеет решение $u \in H$, если $v \in L_2(0, 1)$. Это следует из теоремы Рисса и (10).

Применяя (10), мы видим, что

$$\|y_k - u\|_{L_2(0,1)} \leq C \|y_k - u\|_H = C \|A(y_k - u)\|_{L_2(0,1)} = C \|Ay_k - v\|_{L_2(0,1)},$$

и, следовательно, $\|y_k - u\|_{L_2(0,1)} \rightarrow 0$, так что $u = y$.

С другой стороны, если $Au = 0$, $u \in H$, то из (10) следует, что $u = 0$. Значит, оператор A самосопряжен.

Если $m_1 < M_\alpha$, то существует функция $v \in H$ такая, что $(Av, v) < M_\alpha(v, v)$. Однако, тогда существует собственная функция u такая, что

$$Au = \lambda u, \quad u \in H, \quad \lambda < M_\alpha.$$

Следовательно, мы получаем, что

$$(Q(x)u')' + \lambda u = 0, \quad (Q(x)z')' + M_\alpha z = 0.$$

Поскольку среднее значение u обращается в нуль, существует точка $x_0 \in]0, 1[$ такая, что $u(x_0) = 0$. Мы можем предположить, что $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$ и $u(x) > 0$ на $]0, x_0[$. Умножая первое уравнение на z , второе на y и интегрируя разность по $]0, x_0[$, мы получаем, что

$$(Q(x)u'(x)z(x) - Q(x)u(x)z'(x))\Big|_{x=0}^{x=x_0} + (\lambda - M_\alpha) \int_0^{x_0} u(x)z(x) dx = 0.$$

Если $x_0 > \frac{1}{4}$, то мы должны использовать здесь тот факт, что функции $Qu'z$ и Quz' обращаются в нуль при $x = \frac{1}{4}$. С другой стороны,

$$z(0) = u(0) = u(x_0) = 0, \quad u'(x_0) < 0, \quad z(x_0) \geq 0,$$

так что

$$(\lambda - M_\alpha) \int_0^{x_0} u(x)z(x) dx \geq 0.$$

Поскольку $u(x)z(x) > 0$ на $]0, x_0[$, мы получаем, что $\lambda \geq M_\alpha$, а это противоречит условию. Следовательно, $m_1 = M_\alpha$, что и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15. Пусть Q – произвольная положительная функция, удовлетворяющая (6).

Пусть вначале $\alpha \leq -1$. Тогда, в силу неравенства Гёльдера,

$$\int_0^1 Q(x)|y''(x)|^2 dx \geq \left(\int_0^1 |y''(x)|^p dx \right)^{2/p} \left(\int_0^1 Q(x)^\alpha dx \right)^{1/\alpha},$$

где $p = 2\alpha/(\alpha - 1)$, $2 > p \geq 1$. Следовательно, $L[Q, y] \geq G[y']$. Из леммы A13 вытекает существование функции $y_0 \in W_{p,0}^2(0, 1)$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^1 |y_0''(x)|^p dx = 1, \quad G[y_0'] \leq G[y']$$

для всех $y \in W_{2,0}^2(0, 1)$ таких, что $\int_0^1 |y''(x)|^p dx = 1$, и значение m указано в лемме A13. Следовательно, мы имеем $m = m_\alpha = L[Q, y_0]$, если $Q(x) = |y_0''|^{2/(\alpha-1)}$. Если же $p = 1$, то оптимальных функций Q и y не существует, но значение m указано в следствии A14.

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$. Тогда, по лемме A12, существует функция $y_Q(x)$ такая, что $Q(x) = |y_Q''|^{2/(\alpha-1)}$, так что $L[Q, y_Q] = G[y_Q']$ и, следовательно, $M_\alpha \leq m$. С другой стороны, мы имеем равенство $L[Q_0, y_0] = G[y_0']$, если $Q_0(x) = |y_0''(x)|^{2/(\alpha-1)}$ и y_0 равно $\int_0^x z(t) dt$, где z – функция, указанная в следствии 17. Если $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$ или $0 < \alpha < 1$, то в силу леммы 18 мы имеем равенство

$$m = \inf_{y \in H_0^2} \frac{\int_0^1 Q_0(x)y''(x)^2 dx}{\int_0^1 y'(x)^2 dx} = L[Q_0, y_0].$$

Доказательство окончено.

§ 7. Приложение. Технические леммы

ЛЕММА А1. Пусть p – вещественное число, $p < \frac{2}{3}$, $p \neq 0$. Тогда функция

$$F(x, y) = x^{2/p} y^{3-2/p} + (1-x)^{2/p} (1-y)^{3-2/p}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

имеет минимальное значение $F_{\min} = \frac{1}{4}$ при $x = y = \frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что из двух показателей степени $2/p$ и $3-2/p$ один всегда положителен и другой отрицателен. Пусть для определенности, $p < 0$. Тогда для $y \neq 0, 1$

$$\lim_{x \rightarrow +0} F(x, y) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} F(x, y) = +\infty.$$

Если $y = 0$, то $F(x, 0) = (1-x)^{2/p} \geq 1$ и для $y = 1$ мы имеем $F(x, 1) = x^{2/p} \geq 1$. Следовательно, значения F на границе квадрата ≥ 1 .

Если $x < \delta$, $y < \delta$, то

$$\begin{aligned} F(x, y) &\geq (1-x)^{2/p} (1-y)^{3-2/p} \geq (1-x)^{2/p} \geq (1-\delta)^{2/p} && \text{для } p > 0, \\ F(x, y) &\geq (1-x)^{2/p} (1-y)^{3-2/p} \geq (1-y)^{3-2/p} \geq (1-\delta)^{3-2/p} && \text{для } p < 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, $F(x, y) > \frac{3}{4}$, если δ достаточно мало. То же верно для малых окрестностей точек $(0, 1)$, $(1, 0)$ и $(1, 1)$.

С другой стороны, мы имеем $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Следовательно, функция F имеет внутреннюю точку минимума (x_0, y_0) . Мы имеем в этой точке

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{2}{p} [x_0^{2/p-1} y_0^{3-2/p} - (1-x_0)^{2/p-1} (1-y_0)^{3-2/p}] = 0, \\ \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} &= \left(3 - \frac{2}{p}\right) [x_0^{2/p} y_0^{2-2/p} - (1-x_0)^{2/p} (1-y_0)^{2-2/p}] = 0. \end{aligned}$$

Но тогда

$$(11) \quad \begin{aligned} x_0^{2/p-1} y_0^{3-2/p} &= (1-x_0)^{2/p-1} (1-y_0)^{3-2/p}, \\ x_0^{2/p} y_0^{2-2/p} &= (1-x_0)^{2/p} (1-y_0)^{2-2/p}. \end{aligned}$$

Почленно деля эти равенства, мы получаем, что

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{1-x_0}{1-y_0},$$

т.е. $x_0 = y_0$. Из (11) следует, что $x_0^2 = (1-x_0)^2$ и потому $x_0 = \frac{1}{2}$.

ЛЕММА А2. Пусть p – отрицательное число. Тогда для всех функций $y \in K_p(0, h)$ справедлива следующая оценка:

$$\left(\int_0^h y'(x)^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{h}{4} \right)^{1/p-3/2} \left(\int_0^h y(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $h = 1$, $\int_0^1 y'(x)^p dx = 1$. Тогда

$$\int_0^{1/2} y'(x)^p dx < 1.$$

Пусть E – подмножество точек x в $[0, \frac{1}{2}]$ таких, что $y'(x) > 4^{1/p}$, и μ – его мера. Тогда, очевидно, $1 > 4(\frac{1}{2} - \mu)$, т.е. $\mu > \frac{1}{4}$. Следовательно,

$$y\left(\frac{1}{2}\right) \geq \int_0^{1/2} y'(x) dx > \int_E y'(x) dx > 4^{1/p-1}.$$

Поскольку функции y возрастают, мы имеем $y(x) > 4^{1/p-1}$ для $x > \frac{1}{2}$. Тогда

$$\int_0^1 y(x) dx > \int_{1/2}^1 y(x) dx > 4^{1/p-3/2}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^1 y'(x)^p dx \right)^{1/p} \leq 4^{3/2-1/p} \int_0^1 y(x) dx \leq 4^{3/2-1/p} \left(\int_0^1 y^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Пусть $h \neq 1$ и $y \in K_p(0, h)$. Тогда функция $z(x) = y(hx)$ принадлежит $K_p(0, h)$ и мы можем применить доказанную оценку к функции z , так что

$$\left(\int_0^1 z'(x)^p dx \right)^{1/p} \leq 4^{3/2-1/p} \left(\int_0^1 z^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Итак,

$$\left(\int_0^h y'(x)^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\frac{4}{h} \right)^{3/2-1/p} \left(\int_0^h y^2(x) dx \right)^{1/2},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА А3. Пусть p – вещественное число, $0 < p < \frac{2}{3}$. Тогда существует постоянная $C = C(p)$, которая не зависит от y и h и такая, что

$$\left(\int_0^h y'(x)^p dx \right)^{1/p} \leq C(p) h^{1/p-3/2} \left(\int_0^h y(x)^2 dx \right)^{1/2}, \quad y \in K_p(0, h).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $h = 1$, $\int_0^1 y'(x)^p dx = 1$. Тогда существует точка $t_1 \in (0, 1)$ такая, что

$$\int_0^{t_1} y'(x)^p dx = \int_{t_1}^1 y'(x)^p dx = \frac{1}{2}.$$

В силу неравенства Гёльдера,

$$\frac{1}{2} \leq \left(\int_0^{t_1} y'(x) dx \right)^p \cdot t_1^{1-p}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \leq y(t_1)^p \cdot t_1^{1-p} \leq y(t_1)^p$$

и $y(x) \geq 2^{-1/p}$ для $x \geq t_1$. В силу неравенства Гёльдера,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \int_{t_1}^1 y'(x)^p y^{2p-2} y^{2-2p} dx \\ &\leq \left(\int_{t_1}^1 y'(x) y(x)^{2-2/p} dx \right)^p \left(\int_{t_1}^1 y(x)^2 dx \right)^{1-p} \leq C_p \left(\int_0^1 y(x)^2 dx \right)^{1-p}, \end{aligned}$$

где $C_p = p2^{(2-3p)/p}/(2-3p)$. Итак, для $p < \frac{2}{3}$ мы имеем

$$\int_0^1 y(x)^2 dx \geq (2C_p)^{1/(1-p)},$$

что дает результат с $C = (2C_p)^{1/(1-p)}$.

Если $\int_0^1 y'(x)^p dx = I \neq 1$, то можно взять вместо функции $y(x)$ функцию $y(x)I^{-1/p}$. Если $h \neq 1$, можно применить полученное неравенство к функции $y(xh)$.

Заметим, что постоянные в оценках лемм А2 и А3 не наилучшие. Точные постоянные будут указаны ниже, в леммах А5 и А6.

ЛЕММА А4. Пусть $p < \frac{2}{3}$, $p \neq 0$, $0 < r \leq 1$. Пусть

$$m_1 = \sup_{h \in (0, r)} \sup_{y \in K_p(0, h, r)} G[y],$$

где

$$G[y] = \frac{\left(\int_0^r |y'(x)|^p dx \right)^{2/p}}{\int_0^r y(x)^2 dx}.$$

Тогда существует постоянная C_1 , которая не зависит от r и такая, что $m_1 \leq C_1 r^{2/p-3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $r = 1$. В силу лемм А2 и А3 мы имеем для $y \in K_p(0, h, r)$ неравенства

$$\begin{aligned} h^{3-2/p} \left(\int_0^h |y'(x)|^p dx \right)^{2/p} &\leq C \int_0^h y(x)^2 dx, \\ (1-h)^{3-2/p} \left(\int_h^1 |y'(x)|^p dx \right)^{2/p} &\leq C \int_h^1 y(x)^2 dx, \end{aligned}$$

где значение C , соответствующее $h = 1$, было найдено в леммах А2 и А3. Пусть $\int_0^1 y'(x)^p dx = 1$ и $\int_0^h y'(x)^p dx = a$. Тогда

$$a^{2/p} h^{3-2/p} + (1-a)^{2/p} (1-h)^{3-2/p} \leq C \int_0^1 y(x)^2 dx.$$

По лемме А1 функция $F(a, h) = a^{2/p} h^{3-2/p} + (1-a)^{2/p} (1-h)^{3-2/p}$, определенная в квадрате $0 < a < 1, 0 < h < 1$, имеет минимальное значение $\frac{1}{4}$ в точке $a = h = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$C \int_0^1 y(x)^2 dx \geq \frac{1}{4},$$

т.е. $G[y] \leq 4C$ для всех допустимых y . Для того чтобы получить результат для произвольного r , достаточно заменить функцию $y(x)$ функцией $y(xr)$.

ЛЕММА А5. Пусть $0 < p < \frac{2}{3}$ и $m = \sup_{y \in K_p(0, h)} G[y]$. Тогда

$$m = \left(\frac{2-2p}{2-3p} \right)^{2/p} \left(\frac{2}{p} - 3 \right) h^{2/p-3} \left(\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/p}} \right)^2$$

и существует функция $y_0(x) \in K_p(0, h)$ такая, что $G[y_0] = m$. Кроме того, при $x \rightarrow h$ мы имеем

$$y_0(x) = c_1(h-x)^{p/(p-2)}[1+o(1)], \quad y_0'(x) = c_2(h-x)^{2/(p-2)}[1+o(1)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $h = 1$ и $\{y_k\}$ — такая последовательность функций из $K_p(0, 1)$, что $\int_0^1 y_k'(x)^p dx = 1$ и $G[y_k] \rightarrow m$.

Покажем, что можно предположить, что все функции y_k гладкие. Пусть $y \in K_p(0, 1)$. Определим y на всей прямой, полагая $y_1(x) = 0$ для $x < 0$, $y_1(x) = y(x)$ для $0 < x < 1-\varepsilon$ и $y_1(x) = y(1-\varepsilon)$ для $x > 1-\varepsilon$. Очевидно, $\int_0^1 |y_1(x) - y(x)|^2 dx \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\int_{1-\varepsilon}^1 |y'(x)|^p dx \rightarrow 0$, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Это позволяет предположить, что функции y_k ограничены.

Пусть теперь $y \in K_p(0, 1)$ и $0 \leq y(x) \leq C$. Тогда $\int_0^1 |y'(x)| dx = y(1) \leq C$. Положим $z_k(x) = y_k(x) - y_k(0)$, где y_k — усреднение y с положительным ядром $K(t)$, так что

$$y_k(x) = k \int K(k(x-t))y(t) dt, \quad \int K(t) dt = 1, \quad K(t) \geq 0, \quad K \in C_0^\infty(-1, 1).$$

Заметим, что $|y_k(0)| \leq \delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, так что z_k сходится к $y(x)$ равномерно, $z'_k(x) \geq 0$ и

$$\int_0^1 |z_k(x) - y(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_0^1 |z'_k(x) - y'(x)| dx \rightarrow 0.$$

Мы имеем

$$\int_0^1 |z'_k(x) - y'(x)|^p dx \leq \left(\int_0^1 |z'_k(x) - y'(x)| dx \right)^p.$$

Элементарное неравенство

$$|a^p - b^p| \leq |a - b|^p,$$

справедливое для всех a, b таких, что $a \geq 0, b \geq 0$, показывает, что

$$\int_0^1 z'_k(x)^p dx \rightarrow \int_0^1 y'(x)^p dx.$$

Это позволяет предположить, что все функции y_k гладкие.

Назовем функцию y *выпуклой*, если ее производная убывает, и *вогнутой*, если ее производная возрастает.

Покажем, что если y_k выпукла в интервале (x_1, x_2) , где $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$, то ее можно заменить линейной функцией

$$z(x) = y_k(x_1) + \gamma(x - x_1), \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{y_k(x_2) - y_k(x_1)}{x_2 - x_1},$$

и значение $G[z]$ станет больше, чем $G[y_k]$.

В самом деле, $y_k(x_1) = z(x_1), y_k(x_2) = z(x_2)$ и

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} y_k(x)^2 dx &\geq \int_{x_1}^{x_2} z(x)^2 dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} y'_k(x)^p dx &\leq \left(\int_{x_1}^{x_2} y'_k(x) dx \right)^p \left(\int_{x_1}^{x_2} dx \right)^{1-p} = \gamma^p (x_2 - x_1) = \int_{x_1}^{x_2} z'(x)^p dx. \end{aligned}$$

Если z совпадает с y_k вне интервала (x_1, x_2) , то $G[z] \geq G[y_k]$.

Мы можем сделать то же самое для всех других интервалов, на которых y_k выпукла. В результате мы получим функцию z_k , которую можно описать следующим образом. Рассмотрим множество точек (x, y) таких, что $0 < x < 1$ и $y > y_k(x)$, а также выпуклую оболочку этого множества. Нижняя граница этой оболочки служит графиком некоторой функции z_k . Покажем, что $z_k \in C^1(0, 1)$. В самом деле,

если точка x принадлежит интервалу прямой линии, являющемуся частью графика, то очевидно, что функция z_k гладкая в этой точке. То же верно и в том случае, когда точка $(x, z_k(x))$ принадлежит части графика функции y_k . Если z_k линейна по одну сторону от точки x и совпадает с y_k с другой стороны, то z_k регулярна в x , поскольку график y_k лежит по одну сторону от прямой линии, получаемой продолжением графика линейной функции. Наконец, если точка $(x, z_k(x))$ является предельной точкой для последовательности таких точек, то она является также предельной точкой для последовательности точек, принадлежащих графику y_k и производная $z'_k(x)$ существует.

Следовательно, если заменить каждую функцию y_k вогнутой функцией z_k указанным образом, то последовательность новых функций также будет максимизирующей. Это позволяет нам рассматривать только максимизирующие последовательности возрастающих вогнутых функций, т.е. предполагать, что функции $y_k(x)$ и их производные $y'_k(x)$ возрастают.

Для больших k мы имеем

$$\int_0^1 y_k(x)^2 dx \leq m^{-1} + 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Существует точка $\theta_k \in (1 - \varepsilon, 1)$ такая, что $|y_k(\theta_k)|^2 \leq (m^{-1} + 1)\varepsilon^{-1}$. Поскольку функции y_k монотонны, они равномерно ограничены при $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$.

Аналогично можно из равенства $\int_0^1 y'_k(x)^p dx = 1$ видеть, что последовательность $\{y'_k(x)\}$ равномерно ограничена в $[0, 1 - \varepsilon]$. По теореме Арцела можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}(x)\}$, и по теореме Хелли можно предполагать, что подпоследовательность $\{y'_{n_k}(x)\}$ сходится всюду в $[0, 1 - \varepsilon]$. Используя диагонализацию, можно найти подпоследовательность, сходящуюся к функции $y_0 \in K_p(0, h)$ и такую, что последовательность первых производных сходится почти всюду в $[0, 1)$. Функция y_0 удовлетворяет условию Липшица на интервале $[0, 1 - \varepsilon]$ для каждого $\varepsilon > 0$. Используя лемму А3, можно заключить, что

$$\left(\int_{1-\varepsilon}^1 y'_k(x)^p dx \right)^{1/p} \leq C\varepsilon^{1/p-3/2},$$

где C не зависит от k , и так как $1/p - 3/2 > 0$, мы получаем, что

$$\int_0^1 y'_0(x)^p dx \leq 1.$$

Кроме того, мы имеем

$$\int_0^1 y_0(x)^2 dx = m^{-1}.$$

Поскольку интеграл $\int_0^1 y'_0(x)^p dx$ не может быть меньше 1, мы видим, что он равен 1.

Если $y'_0(x_0) > 0$, то $y'_0(x) > 0, y_0(x) > 0$ для всех $x > x_0$. Предположим вначале, что $y'_0(x) > 0$ для $x > 0$. Тогда можно рассмотреть значения $G[y_0 + tz]$ для любых $z \in H_0^1(0, 1)$. Эти значения минимальны при $t = 0$ и потому

$$\frac{d}{dt}G[y_0 + tz] = 0, \quad \text{если } t = 0.$$

Это приводит к уравнению Эйлера–Лагранжа

$$(y_0'^{p-1})' + my_0 = 0,$$

так что

$$(p-1)y_0'^{p-1}y_0'' + my_0y_0' = 0$$

или

$$y_0'^p - m_1y_0^2 = C,$$

где $m_1 = -mp/[2(p-1)] > 0$. Интегрируя это равенство по отрезку $(0, 1)$, мы получаем, что

$$C = 1 - m_1m^{-1} = 1 + \frac{p}{2(p-1)} > 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^y \frac{dz}{(C + m_1z^2)^{1/p}} = x.$$

Мы имеем для любой функции $\varphi \in C^1(0, 1)$ такой, что $\varphi(0) = 0$, равенство

$$\int_0^1 (y_0'(x)^{p-1}\varphi'(x) - my_0(x)\varphi(x)) dx = 0.$$

Если $\varphi(x) = 1$ для $1 - \varepsilon < x < 1$, то интегрирование по частям дает равенство

$$y_0'(1 - \varepsilon)^{p-1}\varphi(1 - \varepsilon) - m \int_0^{1-\varepsilon} y_0(x)\varphi(x) dx = 0.$$

Устремляя ε к нулю, мы получаем, что $y_0'(1) = \infty$. Равенство $y_0'^p - m_1y_0^2 = C$ означает также, что $y_0(1) = \infty$.

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(C + m_1z^2)^{1/p}} = 1.$$

Пусть $z = (C/m_1)^{1/2}t$, так что

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/p}} = C^{1/p-1/2}m_1^{1/2} = \frac{(2-3p)^{1/p-1/2}p^{1/2}m^{1/2}}{(2-2p)^{1/p}},$$

и, следовательно,

$$m^{1/2} = \frac{(2-2p)^{1/p}}{p^{1/2}(2-3p)^{1/p-1/2}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{1/p}}.$$

Если $y_0(x) \equiv 0$ для $0 < x < x_0$ и $y'_0(x) > 0$ для $x > x_0$, то $m = C_1(1 - x_0)^{1/p-3/2}$, где C_1 не зависит от x_0 и, следовательно, оптимальное значение x_0 равно 0. Заметим, что

$$\int_{y_0}^{\infty} \frac{dz}{(C + m_1 z^2)^{1/p}} = 1 - x.$$

Следовательно, для больших значений y_0

$$y_0^{1-2/p}(1 + o(1)) = C_1(1 - x),$$

что показывает, что $y_0(x) = A(1 - x)^\gamma[1 + o(1)]$ и $\gamma = p/(p - 2) < 0$.

Для того чтобы найти значение m при произвольном $h > 0$, достаточно подставить в полученную оценку функцию $y_0(xh)$.

ЛЕММА А6. Пусть $p < 0$ и $m = \sup_{y \in K_p(0, h)} G[y]$. Тогда

$$m = \frac{1}{4} \left(\frac{2 - 2p}{2 - 3p} \right)^{2/p} \left(3 - \frac{2}{p} \right) h^{2/p-3} B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}\right)^2$$

и существует функция $y_0 \in K_p(0, h)$ такая, что $G[y_0] = m$. Более того, при $x \rightarrow h$

$$y_0(x) = y_0(h) + c_1(h - x)^{p/(p-1)}[1 + o(1)], \quad y'_0(x) = c_2(h - x)^{1/(p-1)}[1 + o(1)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $h = 1$ и $\{y_k\}$ — такая последовательность функций в K , что $\int_0^1 y'_k(x)^p dx = 1$ и $G[y_k] \rightarrow m$. В силу леммы А2 значение m конечно и положительно.

Покажем, что можно предположить, что все функции y_k гладкие. Пусть $y \in K_p(0, 1)$. Определим y на всей прямой, полагая $y_1(x) = 0$ для $x < 0$, $y_1(x) = y(x)$ для $0 < x < 1 - \varepsilon$ и $y_1(x) = y(1 - \varepsilon) + \varepsilon^{-1/2p}(x - 1 + \varepsilon)$ для $x > 1 - \varepsilon$, и пусть $u_k(x) = y_1(x) + \varepsilon_k x$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно, $\int_0^1 |u_k(x) - y(x)|^2 dx \rightarrow 0$ и по теореме Лебега

$$\int_0^1 |u'_k(x)|^p dx \rightarrow \int_0^1 |y'(x)|^p dx.$$

Следовательно, мы можем предположить, что $y'_k(x) > \varepsilon_k > 0$.

Пусть теперь $y \in K_p(0, 1)$ и $y'(x) > \varepsilon > 0$. Положим $z_k(x) = y_k(x) - y_h(0)$, где y_k — усреднение y с положительным ядром K , так что

$$y_k(x) = k \int K(k(x - t))y(t) dt, \quad \int K(t) dt = 1, \quad K(t) \geq 0, \quad K \in C_0^\infty(-1, 1).$$

Заметим, что $|y_k(0)| \leq \delta_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, так что z_k сходится к $y(x)$ равномерно и

$$\int_0^1 |z_k(x) - y(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_0^1 |z'_k(x) - y'(x)| dx \rightarrow 0.$$

Следовательно, подпоследовательность z'_{n_k} сходится к y' и $z'^p_{n_k}$ сходится к y'^p почти всюду. Поскольку $0 \leq y(x) \leq C$ для $0 \leq x \leq 1$ и $y'(x) > 0$, мы видим, что $\int_0^1 |y'(x)| dx \leq C$. Поскольку $|z'_{n_k}|^p \leq \varepsilon^p$, мы имеем по теореме Лебега

$$\int_0^1 z'_{n_k}(x)^p dx \rightarrow \int_0^1 y'(x)^p dx.$$

Это позволяет предположить, что все y_k являются гладкими функциями.

Если функция y_k выпукла в интервале (x_1, x_2) , где $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, то можно заменить ее линейной функцией

$$z(x) = y_k(x_1) + \gamma(x - x_1), \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{y_k(x_2) - y_k(x_1)}{x_2 - x_1},$$

так что значение функционала G увеличится. Тогда $y_k(x_1) = z(x_1)$, $y_k(x_2) = z(x_2)$ и

$$\int_{x_1}^{x_2} y_k(x)^2 dx \geq \int_{x_1}^{x_2} z(x)^2 dx.$$

С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера,

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \int_{x_1}^{x_2} y'_k(x)^{p/(p-1)} y'_k(x)^{p/(1-p)} dx \\ &\leq \left(\int_{x_1}^{x_2} y'_k(x) dx \right)^{p/(p-1)} \left(\int_{x_1}^{x_2} y'_k(x)^p dx \right)^{1/(1-p)}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} y'_k(x)^p dx &\geq \left(\int_{x_1}^{x_2} y'_k(x) dx \right)^p (x_2 - x_1)^{1-p} \\ &= [y_k(x_2) - y_k(x_1)]^p (x_2 - x_1)^{1-p}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_{x_1}^{x_2} z'(x)^p dx = \gamma^p (x_2 - x_1) = [y_k(x_2) - y_k(x_1)]^p (x_2 - x_1)^{1-p},$$

мы видим, что $G[z] \geq G[y_k]$, если z совпадает с y_k вне интервала (x_1, x_2) .

Мы можем сделать то же самое для всех других интервалов, где y_k выпукла. В результате мы получим функцию z_k , которая может быть описана следующим образом. Рассмотрим множество точек (x, y) таких, что $0 < x < 1$ и $y > y_k(x)$, и возьмем выпуклую оболочку этого множества. Нижняя граница этой оболочки служит графиком функции z_k . Покажем, что $z_k \in C^1(0, 1)$. В самом деле, если точка x принадлежит отрезку прямой линии, то очевидно, что z_k гладкая в этой точке. То же верно

и в том случае, когда точка $(x, z_k(x))$ принадлежит части графика функции y_k . Если z_k линейна по одну сторону x и совпадает с y_k с другой стороны, тогда z_k регулярна в точке x , поскольку ее график лежит с одной стороны от прямой линии, получаемой продолжением линейной функции. Наконец, если точка $(x, z_k(x))$ является предельной точкой для последовательности таких точек, то она также служит предельной точкой для последовательности точек, принадлежащих графику y_k , и производная $z'_k(x)$ существует.

Следовательно, если заменить указанным способом каждую функцию y_k вогнутой функцией z_k , то последовательность этих новых функций z_k также будет максимизирующей. Это позволяет нам рассматривать максимизирующую последовательность как последовательность монотонных вогнутых функций, т.е. предполагать, что функции $y_k(x)$ и их производные $y'_k(x)$ возрастают.

Для больших k мы имеем

$$\int_0^1 y_k(x)^2 dx \leq m^{-1} + 1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Существует точка $\theta_k \in (1 - \varepsilon, 1)$ такая, что $|y_k(\theta_k)|^2 \leq (m^{-1} + 1)\varepsilon^{-1}$. Поскольку функции y_k монотонны, они равномерно ограничены для $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$. Поэтому

$$\int_{1-2\varepsilon}^{1-\varepsilon} y'_k(x) dx \leq C$$

с постоянной C , которая не зависит от k . Следовательно, существует $\tilde{\theta}_k$ такое, что $1 - 2\varepsilon < \tilde{\theta}_k < 1 - \varepsilon$ и $y'_k(\tilde{\theta}_k) \leq C/\varepsilon$. Значит, последовательность $\{y'_k(x)\}$ равномерно ограничена в $[0, 1 - 2\varepsilon]$. Поскольку $\int_0^1 y'_k(x)^p dx = 1$, существует точка $\theta'_k \in (0, \varepsilon)$ такая, что $|y'_k(\theta'_k)|^p \leq 1/\varepsilon$ и, следовательно, $|y'_k(x)|^p \leq 1/\varepsilon$ для $\varepsilon \leq x \leq 1 - 2\varepsilon$.

По теореме Арцела можно выбрать равномерно в $[\varepsilon, 1 - 2\varepsilon]$ сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_k}(x)\}$, и по теореме Хелли можно предполагать, что последовательность $\{y'_{n_k}(x)\}$ сходится почти всюду в $[\varepsilon, 1 - 2\varepsilon]$. Используя диагонализацию, можно найти подпоследовательность, сходящуюся в $(0, 1)$ к функции $y_0 \in K_p(0, 1)$ и такую, что

$$y_{n_k} \rightarrow y_0, \quad y'_{n_k} \rightarrow y'_0$$

всюду в $(0, 1)$. По теореме Фату

$$\int_0^1 y_0(x)^2 dx \leq m^{-1}, \quad \int_0^1 y'_0(x)^p dx \leq 1.$$

Следовательно,

$$\left(\int_0^1 y'_0(x)^p dx \right)^{2/p} \geq 1,$$

так что $G[y_0] \geq m$. Однако, m — это максимально большое возможное значение G , так что $\int_0^1 y_0(x)^2 dx = m^{-1}$ и $\int_0^1 y'_0(x)^p dx = 1$.

Уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид

$$(y_0'^{p-1})' + my_0 = 0, \quad y_0(0) = 0,$$

так что

$$(p-1)y_0'^{p-1}y_0'' + my_0y_0' = 0$$

или

$$y_0'^p + m_1y_0^2 = C,$$

где $m_1 = mp/[2(p-1)] > 0$. Интегрируя это равенство по $(0, 1)$, мы получаем, что

$$C = 1 + m_1m^{-1} = 1 + \frac{p}{2(p-1)} > 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^{y_0} \frac{dz}{(C - m_1z^2)^{1/p}} = x.$$

Повторяя те же рассуждения, что и при доказательстве предыдущей леммы, мы получаем, что $y_0'(1) = \infty$. Пусть $M = \max y_0(x) = y_0(1)$. Тогда $M^2m_1 = C$, т.е.

$$M = \left(\frac{C}{m_1}\right)^{1/2} = \left(\frac{3p-2}{mp}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \int_0^M \frac{dz}{(C - m_1z^2)^{1/p}} = 1.$$

Пусть $z = (C/m_1)^{1/2}t$, так что

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/p}} = C^{1/p-1/2}m_1^{1/2} = \frac{(2-3p)^{1/p-1/2}(-pm)^{1/2}}{(2-2p)^{1/p}},$$

и, следовательно,

$$m^{1/2} = \frac{(2-2p)^{1/p}}{2(2-3p)^{1/p-1/2}(-p)^{1/2}} B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}\right).$$

Поскольку

$$\int_{y_0}^M \frac{dz}{(C - m_1z^2)^{1/p}} = 1 - x,$$

мы можем видеть, что при $x \rightarrow 1$ верно равенство $y_0(x) = M + c_1(x-1)^\gamma[1 + o(1)]$, где $\gamma = p/(p-1)$.

Для того чтобы найти значение m для любого $h > 0$, достаточно подставить в полученную оценку функцию $y_0(xh)$.

ЛЕММА А7. Пусть $p < \frac{2}{3}$, $p \neq 0$, $0 < r \leq 1$ и $m_1 = \sup_h \sup_y G[y]$. Тогда существует функция $y_0 \in K_p(0, h, r)$ такая, что $y_0(x) = y_0(r-x)$, $G[y_0] = m_1$ и $m_1 = 4mr^{2/p-3}$, где значение m было указано в леммах А4 и А6 для $h = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $r = 1$. Существование экстремальной функции для фиксированного $h \in [0, 1]$ следует из лемм А4 и А6. Более того, мы можем предполагать, что $y(x)$ монотонна и вогнута в $[0, h]$ и в $[h, 1]$.

В силу лемм А4 и А6, для $y \in K_p(0, h, 1)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} h^{3-2/p} \left(\int_0^h |y'(x)|^p dx \right)^{2/p} &\leq m \int_0^h y(x)^2 dx, \\ (1-h)^{3-2/p} \left(\int_h^1 |y'(x)|^p dx \right)^{2/p} &\leq m \int_h^1 y(x)^2 dx, \end{aligned}$$

где значение m , соответствующее $h = 1$, было найдено в леммах А4 и А6. Пусть $\int_0^1 |y'(x)|^p dx = 1$ и $\int_0^h |y'(x)|^p dx = a$. Тогда

$$a^{2/p} h^{3-2/p} + (1-a)^{2/p} (1-h)^{3-2/p} \leq m \int_0^1 y(x)^2 dx.$$

По лемме А1 функция $F(a, h) = a^{2/p} h^{3-2/p} + (1-a)^{2/p} (1-h)^{3-2/p}$, определенная в квадрате $0 < a < 1, 0 < h < 1$, имеет минимальное значение $\frac{1}{4}$ в точке $a = h = \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\int_0^1 y(x)^2 dx \geq \frac{1}{4m},$$

т.е. $G[y] \leq 4m$ для всех допустимых y . С другой стороны, если $a = h = \frac{1}{2}$, функция y совпадает на $(0, \frac{1}{2})$ с функцией y_0 , найденной в леммах А4 и А6 для $h = \frac{1}{2}$, и нечетна относительно точки $x = \frac{1}{2}$, тогда $G[y] = 4m$.

Для того чтобы получить результат для произвольного r , достаточно заменить функцию $y(x)$ функцией $y(xr)$.

ЛЕММА А8. Пусть $p(x)$ — гладкая положительная функция на $[0, d[$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow d} p(x)(d-x)^{-\gamma} = a, \quad p'(x) = O((d-x)^{\gamma-1}),$$

где $1 < \gamma \leq 2$. Пусть $y(x)$ — решение уравнения

$$(p(x)y')' + my(x) = 0, \quad 0 < x < d,$$

такое, что

$$\int_0^d p(x)y'(x)^2 dx < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow d} p(x)y(x)y'(x) = 0.$$

Более того, мы имеем при $x \rightarrow d$

$$\begin{aligned} y(x) &= C(1 + o(1)), \\ y(x) &= C(d-x)^{1-\gamma} \left(\frac{m}{a} + o(1) \right), \end{aligned}$$

если $1 < \gamma < 2$, и

$$\begin{aligned} y(x) &= (d-x)^\rho (C + o(1)), \\ y'(x) &= (d-x)^{\rho-1} (\rho C + o(1)), \end{aligned}$$

если $\gamma = 2$ с $\rho > -\frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I[y] = \int_0^d p(x)y'(x)^2 dx$.

Если $1 < \gamma < 2$, то, решая задачу Коши, мы можем найти два линейно независимых решения $y(x)$ и $z(x)$ такие, что при $x \rightarrow d$

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + c_1(d-x)^{2-\gamma} + \dots, \quad c_1 = \frac{m}{a(2-\gamma)}, \\ z(x) &= (d-x)^{1-\gamma} + c_2(d-x)^{3-2\gamma} + \dots, \quad c_2 = \frac{m}{a(3-2\gamma)(2-\gamma)}. \end{aligned}$$

Однако, $z'(x) = (d-x)^{-\gamma}(1-\gamma+o(1))$ и интеграл

$$I[z] = \int_0^d p(x)z'(x)^2 dx$$

расходится. Поэтому решение с конечным значением I пропорционально y и pyy' обращается в нуль при $x = d$.

Если $\gamma = 2$, то соответствующие решения имеют вид

$$y(x) = (d-x)^{\varkappa_1}(1+o(1)), \quad z(x) = (d-x)^{\varkappa_2}(1+o(1)),$$

где $\varkappa_j$ – различные корни характеристического уравнения

$$a\varkappa(\varkappa+1) + m = 0,$$

так что

$$\varkappa_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{a}}.$$

Если $4m > a$, то оба корня комплексны и $\operatorname{Re} \varkappa_{1,2} = -\frac{1}{2}$. Интегралы $I[y]$ и $I[z]$ расходятся. Если $4m < a$, то оба корня вещественны, интеграл $I[y]$ конечен, но $I[z]$ расходится. Следовательно, $pyy'(d) = 0$.

Наконец, если $\varkappa_1 = \varkappa_2$, т.е. $a = 4m$, то решения имеют вид

$$y(x) = (d-x)^{-1/2}[1+o(1)], \quad z(x) = (d-x)^{-1/2} \ln(d-x)[1+o(1)],$$

так что оба интеграла $I[y]$ и $I[z]$ расходятся.

Следовательно, если $\gamma = 2$ и $I[y]$ конечно, то $4m < a$ и функция pyy' обращается в нуль при $x = d$.

ЛЕММА А9. Пусть $Q(x)$ — гладкая положительная функция на $[0, d[$ такая, что

$$\lim_{x \rightarrow d} Q(x)(d-x)^{-\gamma} = a$$

конечен и $\neq 0$, где $1 < \gamma \leq 2$. Пусть $y(x)$ — решение уравнения

$$Q(x)y''(x) + my(x) = 0, \quad 0 < x < d,$$

такое, что

$$\int_0^d Q(x)y''(x)^2 dx < \infty.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow d} y(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow d} y(x)y'(x) = 0.$$

Кроме того, при $x \rightarrow d$

$$\begin{aligned} y(x) &= C[d-x + c_1(d-x)^{3-\gamma}(1+o(1))], \\ y'(x) &= -C[1 + c_1(3-\gamma)(d-x)^{2-\gamma}(1+o(1))], \\ y''(x) &= Cc_1(3-\gamma)(2-\gamma)(d-x)^{1-\gamma}(1+o(1)), \end{aligned}$$

если $1 < \gamma < 2$, и

$$\begin{aligned} y(x) &= (d-x)^\rho(C+o(1)), \\ y'(x) &= (d-x)^{\rho-1}(-\rho C+o(1)), \\ y''(x) &= (d-x)^{\rho-2}(\rho(\rho-1)C+o(1)), \end{aligned}$$

если $\gamma = 2$ и $\rho > \frac{1}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $I[y] = \int_0^d Q(x)y''(x)^2 dx$.

Если $1 < \gamma < 2$, то, решая задачу Коши, мы можем найти два линейно независимых решения $y(x)$ и $z(x)$ такие, что при $x \rightarrow d$

$$\begin{aligned} y(x) &= d-x + c_1(d-x)^{3-\gamma} + \dots, \quad c_1 = \frac{m}{a(3-\gamma)(2-\gamma)}, \\ z(x) &= 1 + c_2(d-x)^{2-\gamma} + \dots, \quad c_2 = \frac{m}{a(2-\gamma)(1-\gamma)}. \end{aligned}$$

Однако, $z''(x) = (d-x)^{-\gamma}(m/a + o(1))$ и интеграл $I[z] = \int_0^d Q(x)z''(x)^2 dx$ расходится. Поэтому решение с конечным значением I пропорционально y и обращается в нуль при $x = d$.

Если $\gamma = 2$, то соответствующие решения имеют вид

$$y(x) = (d-x)^{\varkappa_1}(1+o(1)), \quad z(x) = (d-x)^{\varkappa_2}(1+o(1)),$$

где $\varkappa_j$ — различные корни характеристического уравнения

$$a\varkappa(\varkappa - 1) + m = 0,$$

так что

$$\varkappa_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m}{a}}.$$

Если $4m > a$, то оба корня комплексны и $\operatorname{Re} \varkappa_{1,2} = \frac{1}{2}$. Интегралы $I[y]$ и $I[z]$ расходятся. Если $4m < a$, то оба корня вещественны, интеграл $I[y]$ конечен, но интеграл $I[z]$ расходится. Мы имеем $y(d) = 0$.

Наконец, если $\varkappa_1 = \varkappa_2$, т.е. $a = 4m$, то решения имеют вид

$$y(x) = (d - x)^{1/2}(1 + o(1)), \quad z(x) = (d - x)^{1/2} \ln(d - x)(1 + o(1)),$$

так что оба интеграла $I[y]$ и $I[z]$ расходятся.

Следовательно, если $\gamma = 2$ и $I[y]$ конечно, то $4m < a$ и решение обращается в нуль при $x = d$.

ЛЕММА А10. Если $y \in H_0^1(0, 1)$, то

$$\max_{x \in (0,1)} y(x)^2 \leq \frac{1}{4} \int_0^1 y'(x)^2 dx.$$

Равенство достигается на функции $y_0(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности, мы можем предположить, что $y(x) \geq 0$ для $0 < x < 1$. Пусть $M \equiv \max y(x)^2 = y(b)^2$. Тогда, в силу неравенства Гёльдера,

$$y(b)^2 \leq b \int_0^b y'(x)^2 dx, \quad y(b)^2 \leq (1 - b) \int_b^1 y'(x)^2 dx,$$

откуда получаем, что

$$\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{1 - b}\right) y(b)^2 \leq \int_0^1 y'(x)^2 dx.$$

Поскольку $1/b + 1/(1 - b) \geq 4$ для $0 < b < 1$, доказательство завершено.

ЛЕММА А11. Пусть $x_1, \dots, x_k$ — положительные числа и $x_1 + \dots + x_k = 1$. Тогда, если $0 \leq \gamma \leq 1$, то справедливо неравенство

$$x_1^\gamma + \dots + x_k^\gamma \leq k^{1-\gamma}.$$

Если $\gamma \geq 1$ или $\gamma \leq 0$, то

$$x_1^\gamma + \dots + x_k^\gamma \geq k^{1-\gamma},$$

т.е. экстремум функции $x_1^\gamma + \dots + x_k^\gamma$ достигается в точке $x_1 = \dots = x_k = 1/k$.

Доказательство вполне элементарно, и мы оставляем его читателю.

ЛЕММА А12. Пусть функция f суммируема на $(0, 1)$, $f(x) \geq 0$. Тогда существуют две точки a и b такие, что $0 < a < b < 1$, и функция $y \in C^1[0, 1]$ такая, что $y'(x)$ абсолютно непрерывна,

$$y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0,$$

$y''(x) = f(x)$, если $0 < x < a$ или $b < x < 1$, и $y''(x) = -f(x)$, если $a < x < b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $f(x) > 0$. Положим

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_0^x F(t) dt$$

и

$$y'(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } 0 < x < a, \\ 2F(a) - F(x), & \text{если } a < x < b, \\ F(x) - F(1), & \text{если } b < x < 1, \end{cases}$$

значения a и b будут указаны ниже. Эта функция непрерывна в точке $x = a$ и в точке $x = b$, если

$$(12) \quad 2F(a) + F(1) = 2F(b).$$

Пусть

$$y(x) = \begin{cases} G(x), & \text{если } 0 < x < a, \\ 2F(a)(x-a) - G(x) + 2G(a), & \text{если } a < x < b, \\ G(x) - G(1) - (x-1)F(1), & \text{если } b < x < 1. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точках $x = a$ и $x = b$, если

$$(13) \quad 2F(a)(b-a) - G(b) + 2G(a) = G(b) - G(1) - (b-1)F(1).$$

Пусть

$$H(x) = xF(x) - G(x).$$

Тогда

$$H'(x) = xf(x) \geq 0, \quad H(0) = 0,$$

и условия (12), (13) означают, что

$$2H(a) + H(1) = 2H(b).$$

Точки a и b могут быть найдены следующим образом. Положим

$$K(x) = F(x) - F(1) \frac{H(x)}{H(1)} = H(x) \left[\frac{F(x)}{H(x)} - \frac{F(1)}{H(1)} \right].$$

Поскольку

$$\left(\frac{F(x)}{H(x)}\right)' = -\frac{F'(x)G(x)}{H(x)^2},$$

мы видим, что $K(x) \geq 0$, $K(0) = 0$, $K(1) = 0$ и

$$K(a) - K(b) = -\frac{1}{2}K(1) = 0.$$

Пусть функция $\rho(t)$ определена равенством

$$F(\rho(t)) - \frac{1}{2}F(1) = F(t).$$

Тогда $\rho(0) = \xi$, где ξ — такая точка, что $F(\xi) = F(1)/2$, $0 < \xi < 1$ и $\rho(\xi) = 1$. Функция

$$S(t) = K(t) - K(\rho(t))$$

такова, что $S(0) = K(0) - K(\xi) \leq 0$ и $S(\xi) = K(\xi) - K(1) \geq 0$. Следовательно, существует точка $a \in (0, \xi)$ такая, что $S(a) = 0$. Если положить $b = \rho(a)$, то мы получаем (13) и равенство $K(a) = K(b)$ будет также выполнено.

Если $f(x) \geq 0$, то мы можем построить функцию y_ε , соответствующую функции $f(x) + \varepsilon$, и перейти к пределу, что несложно.

ЛЕММА A13. Пусть $p > 1$ и K — класс функций y из пространства $W_{p,0}^1(0,1)$ таких, что $\int_0^1 y(x) dx = 0$. Пусть

$$m = \inf_{y \in K} G[y],$$

где

$$G[y] = \frac{\left(\int_0^1 |y'(x)|^p dx\right)^{2/p}}{\int_0^1 y(x)^2 dx}.$$

Тогда

$$m = 4 \left(\frac{2p-2}{3p-2}\right)^{2/p} \left(3 - \frac{2}{p}\right) B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}\right)^2,$$

где B — функция Эйлера, и потому существует функция $y_0 \in K$ такая, что $G[y_0] = m$. Более того, $y_0(x) = -y_0(1-x)$ для $0 < x < 1$, $y_0(x) = y_0(x - \frac{1}{2})$ для $0 < x < \frac{1}{2}$ и при $x \rightarrow \frac{1}{4}$

$$y_0(x) = y_0\left(\frac{1}{4}\right) - c_1 \left|x - \frac{1}{4}\right|^{p/(p-1)} [1 + o(1)],$$

$$y_0'(x) = -\left(\frac{c_1 p}{p-1}\right) \left|x - \frac{1}{4}\right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{4}\right) [1 + o(1)],$$

где $c_1 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что число m конечно и не больше, чем, например, $G[y_1]$, где $y_1(x) = \frac{1}{4} - |x - \frac{1}{4}|$ для $x \in (0, \frac{1}{2})$ и $y_1(x) = |x - \frac{3}{4}| - \frac{1}{4}$ для $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Пусть $\{y_k\}$ – минимизирующая последовательность такая, что

$$\int_0^1 y_k(x)^2 dx = 1, \quad \int_0^1 y_k(x) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 |y'_k(x)|^p dx \rightarrow m^{p/2}.$$

Эта последовательность компактна в $L_2(0, 1)$ и слабо компактна в $W_{p,0}^1(0, 1)$, так что существует подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, сходящаяся в $L_2(0, 1)$ к $y_0(x)$, такая, что

$$\int_0^1 y_0(x)^2 dx = 1, \quad \int_0^1 |y'_0(x)|^p dx \leq m^{p/2}, \quad \int_0^1 y_0(x) dx = 0.$$

Поскольку $m^{p/2}$ – это минимальное значение интеграла $\int_0^1 |y'(x)|^p dx$, мы имеем в действительности равенство $\int_0^1 |y'_0(x)|^p dx = m^{p/2}$, и функция y_0 экстремальна. Поскольку интеграл от y_0 обращается в нуль, эта функция имеет по крайней мере один нуль в $(0, 1)$. Мы можем перестроить функцию y_0 , сохраняя значения интегралов $\int_0^1 y_0(x)^2 dx$, $\int_0^1 |y'_0(x)|^p dx$ и $\int_0^1 y_0(x) dx$, таким образом, что она будет положительной на $(0, x_0)$ и отрицательной на $(x_0, 1)$, где $0 < x_0 < 1$. Для этого мы сдвинем все интервалы, на которых $y(x) > 0$, влево, не изменяя значений y на них.

Функционал $G[y]$ дифференцируем, поскольку $p > 1$, и, следовательно, функция y_0 удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$(|y'_0|^{p-2} y'_0)' + m^{p/2} y_0 + m_1 = 0, \quad y_0(0) = y_0(1) = 0,$$

из которого следует, что

$$(p-1)|y'_0|^{p-1} y''_0 + m^{p/2} y_0 y'_0 + m_1 y'_0 = 0.$$

Значит,

$$(p-1) \frac{|y'_0|^p}{p} + m^{p/2} \frac{y_0^2}{2} + m_1 y_0 = C.$$

Интегрируя это равенство по $(0, 1)$, мы получаем, что $C = m^{p/2}[(p-1)/p + 1/2]$.

Более того,

$$y'_0(0) = -y'_0(x_0) = y'_0(1) = (Cp/(p-1))^{1/p}$$

и $y_0(0) = y_0(x_0) = y_0(1) = 0$. Следовательно, $y_0(x) = y_0(x_0 - x)$ для $0 \leq x \leq x_0$ и $y_0(x) = y_0(1 + x_0 - x)$. Положим

$$z(x) = m^{p/2} y_0 + m_1.$$

Тогда

$$(|z'|^{p-2} z')' + m^{p(p-1)/2} z = 0.$$

Все решения этого уравнения являются осциллирующими периодическими функциями и расстояние между их последовательными нулями равно половине периода. Они нечетны относительно каждого своего нуля. Следовательно, их среднее значение на периоде равно нулю. Поскольку $z(0) = z(1)$, $z'(0) = z'(1)$, среднее значение z на $(0, 1)$ равно нулю. Однако, тогда мы имеем

$$m_1 = \int_0^1 z(x) dx - m^{p/2} \int_0^1 y_0(x) dx = 0.$$

Следовательно, $x_0 = \frac{1}{2}$ и $y_0(x) = -y_0(1-x)$. Максимальное значение M функции y_0 определяется из уравнения

$$(14) \quad (p-1) \frac{|y'_0|^p}{p} + m^{p/2} \frac{y_0^2}{2} = m^{p/2} \left[\frac{p-1}{p} + \frac{1}{2} \right],$$

так что

$$M^2 = 3 - \frac{2}{p}.$$

Интегрируя, мы получаем, что для $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$

$$\int_0^{y_0} \frac{dz}{[3p-2-pz^2]^{1/p}} = \frac{xm^{1/2}}{[2(p-1)]^{1/p}}.$$

В частности, $y_0(\frac{1}{4}) = M$ и

$$\int_0^M \frac{dz}{[3p-2-pz^2]^{1/p}} = \frac{m^{1/2}}{4[2(p-1)]^{1/p}}.$$

Заменяя переменную z на $t(3-2/p)^{1/2}$, мы видим, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/p}} = \frac{m^{1/2}}{4} \left(\frac{3p-2}{2p-2} \right)^{1/p} \left(\frac{p}{3p-2} \right)^{1/2}$$

или

$$m^{1/2} = 4 \left(\frac{2p-2}{3p-2} \right)^{1/p} \left(3 - \frac{2}{p} \right)^{1/2} \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/p}}.$$

Заметим, что

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{1/p}} = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}\right),$$

где B — функция Эйлера. Итак,

$$m^{1/2} = 2 \left(\frac{2p-2}{3p-2} \right)^{1/p} \left(3 - \frac{2}{p} \right)^{1/2} B\left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p}\right).$$

С другой стороны,

$$\int_{y_0}^M \frac{dz}{[3p-2-pz^2]^{1/p}} = \left(x - \frac{1}{4} \right) \frac{m^{1/2}}{[2(p-1)]^{1/p}},$$

так что $y_0(x) = M + A(\frac{1}{4} - x)^\gamma [1 + o(1)]$, когда $x \rightarrow \frac{1}{4} - 0$ с $\gamma = p/(p-1)$.

СЛЕДСТВИЕ А14. Если $p = 1$, то $m = 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $y \in K$ и $p > 1$

$$m \int_0^1 y(x)^2 dx \leq \left(\int_0^1 |y'(x)|^p dx \right)^{2/p},$$

и $\lim_{p \rightarrow 1+0} m = 16$. Следовательно, $m \geq 16$. С другой стороны, полагая $y(x) = 1$ для $\varepsilon < x < \frac{1}{2} - \varepsilon$, $y(x) = -1$ для $\frac{1}{2} + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$, $y(x) = x/\varepsilon$ для $0 < x < \varepsilon$, $y(x) = (\frac{1}{2} - x)/\varepsilon$ для $\frac{1}{2} - \varepsilon < x < \frac{1}{2} + \varepsilon$ и $y(x) = (x-1)/\varepsilon$ для $1 - \varepsilon < x < 1$, мы можем видеть, что

$$\int_0^1 y(x)^2 dx = 1 - \frac{8\varepsilon}{3}, \quad \int_0^1 |y'(x)| dx = 4,$$

и, следовательно, $m = 16$.

Точно так же можно доказать следующее

СЛЕДСТВИЕ А15. Если $p = \infty$, то $m = \lim_{p \rightarrow \infty} m(p) = 48$. Оценка реализуется на функции y_1 , равной $\frac{1}{4} - |x - \frac{1}{4}|$ для $0 < x < \frac{1}{2}$ и $|x - \frac{3}{4}| - \frac{1}{4}$ для $\frac{1}{2} < x < 1$.

ЛЕММА А16. Пусть $0 < \alpha < 1$, и $y_0(x)$ — функция, найденная в лемме А7. Пусть $p_0(x) = |y'_0(x)|^{2/(\alpha-1)}$. Пусть

$$m_1 = \inf_{y \in H_0^1(0,1)} \frac{\int_0^1 p_0(x) y'(x)^2 dx}{\int_0^1 y(x)^2 dx}.$$

Тогда

$$m_1 = \left(\frac{2-2p}{2-3p} \right)^{2/p} \left(3 - \frac{2}{p} \right) h^{2/p-3} B \left(\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{p} \right)^2.$$

Минимальное значение достигается на функции y_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{y_k(x)\}$ такую, что $\int_0^1 y_k(x)^2 dx = 1$. Мы можем предположить, что $y_k(x) \geq 0$. Так как интегралы $\int_0^{1/2-\varepsilon} y'_k(x)^2 dx$ и $\int_{1/2+\varepsilon}^1 y'_k(x)^2 dx$ ограничены, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в $(0, \frac{1}{2} - \varepsilon)$ и $(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1)$, в $L_2(0, 1)$ и слабо в $H^1(0, 1/2 - \varepsilon)$ и $H^1(\frac{1}{2} + \varepsilon, 1)$. Используя диагонализацию, можно найти подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в $(0, 1)$ к $y_1(x)$. Тогда

$$\int_0^1 y_1(x)^2 dx = 1, \quad \int_0^1 p_0(x) y'_1(x)^2 dx \leq m_1.$$

Однако, m_1 — это наименьшее возможное значение последнего интеграла. Следовательно, $\int_0^1 p_0(x) y'_1(x)^2 dx = m_1$. Функция y_1 удовлетворяет уравнению

$$(p_0(x) y_1(x)')' + m_1 y_1(x) = 0,$$

$y_1(0) = 0$, $y_1(1) = 0$ и $y_1(x) \geq 0$ в $(0, 1)$.

С другой стороны,

$$(p_0(x)y_0')' + my_0 = 0, \quad y_0(0) = y_0(1) = 0$$

и $y_0 > 0$ в $(0, 1)$. По лемме А8

$$(m - m_1) \int_0^1 y_1(x)y_0(x) dx = p_0(x)(y_1'(x)y_0(x) - y_1(x)y_0'(x)) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0,$$

и потому $m_1 = m$, так что $y_1 = Cy_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alvino A., Trombetti G. A lower bound for the first eigenvalue of an elliptic operator // J. Math. Anal. Appl. 1989. V. 94. P. 328–337.
- [2] Ashbaugh M. S., Benguria R. D. Optimal lower bounds for eigenvalue for Schrödinger operators with symmetric single-well potentials and related results // Maximum principles and eigenvalue problems in partial differential equations / ed. Philip W. Schaefer. New York: Wiley & Harlow, Essex: Longman, 1988. P. 134–145.
- [3] Ashbaugh M. S., Harell E. M. II Potentials having extremal eigenvalues subject to p -norm constraints // Proc. of the 1984 Workshop on spectral theory of Sturm–Liouville differential operators / ed. Hans G. Karer, A. Zettl. Argonne, Illinois, 1984. P. 19–29.
- [4] Ashbaugh M. S., Harell E. M. II Maximal and minimal eigenvalues and their associated nonlinear equations // J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1770–1786.
- [5] Ashbaugh M. S., Harell E. M. II, Svirsky R. On minimal and maximal eigenvalue gaps and their causes // Pacific J. Math. 1991. V. 147. №1. P. 1–24.
- [6] Bandle C. Obere Schranken für die Eigenwerte einer stückweise freien Membran auf einem 'Vierseit' // ZAMP. 1970. V. 21. P. 1072–1077.
- [7] Bandle C. Isoperimetric inequality for some eigenvalues of an inhomogeneous free membrane // SIAM J. Appl. Math. 1972. V. 22. P. 142–147.
- [8] Bandle C. Isoperimetric inequalities and applications. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publ. Program, 1980.
- [9] Banks D. Bound for the eigenvalues and some vibrating systems // Pacific J. Math. 1960. V. 10. P. 439–474.
- [10] Barnes D. C. Buckling of columns and rearrangement of functions // Quart. Appl. Math. 1983. V. 16. №2. P. 169–180.
- [11] Barnes D. C. The shape of the strongest column is arbitrary close to the shape of the weakest column // Quart. Appl. Math. 1988. V. 46. №2. P. 605–609.
- [12] Братусь А. С. Кратные собственные значения в задачах оптимизации, спектральные свойства систем с конечным числом степеней свободы // Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 1986. Т. 26. С. 1–7.
- [13] Братусь А. С., Сейранян А. П. Бимодальные решения в задачах оптимизации собственного значения // Прикл. матем. мех. 1983. Т. 47. С. 451–457.
- [14] Cheeger J. A. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian // Problems in Analysis, a Symposium in Honor of S. Bochner. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. P. 195–199.
- [15] Chiti G. A reverse Hölder inequality for the eigenfunctions of linear second order elliptic equations // ZAMP. 1982. V. 33. P. 143–148.
- [16] Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. New York: Interscience, 1953.

- [17] Cox S. J. The shape of ideal column // The Mathematical Intelligencer. 1992. V. 14. P. 16–24.
- [18] Cox S. J., Overton M. L. On the optimal design of columns against buckling // SIAM J. Math. Anal. 1992. V. 23. P. 287–325.
- [19] Egnell H. Extremal properties of the first eigenvalue of a class of elliptic eigenvalue problems // Annali Scuol. Norm. Sup. Pisa. 1987.
- [20] Egorov Yu. V., Karaa S. Optimisation de la première valeur propre de l'opérateur de Sturm–Liouville // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1994. V. 319. P. 793–798.
- [21] Egorov Yu. V., Karaa S. Sur la forme optimale d'une colonne en compression // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1996 (to appear).
- [22] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля // УМН. 1984. Т. 39. №2. С. 151–152.
- [23] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценке первого собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1990. №6. С. 75–78.
- [24] Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. Об оценке главного собственного значения оператора Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1991. №6. С. 5–11.
- [25] Egorov Yu. V., Kondrat'ev V. A. On a Lagrange problem // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1993. V. 317. P. 903–908.
- [26] Egorov Yu. V., Kondrat'ev V. A. On estimates of the first eigenvalue in some Sturm–Liouville problems // Preprint von Max-Planck-Arbeitsgruppe “Partielle Differentialgleichungen und Komplexe Analysis”, 1994.
- [27] Essén M. On maximizing the first eigenvalue for a second order linear differential operator // C.R. Math. Rep. Acad. Sci. Can. 1984. V. 6. P. 15–20.
- [28] Essén M. On estimating eigenvalues of a second order linear differential operator // Intern. series of Numerical Math. 1987. V. 80. P. 347–366.
- [29] Everitt W. N. On the spectrum of a second order linear differential equation with a p -integrable coefficient // Applicable Anal. 1972. V. 2. P. 143.
- [30] Gould S. H. Variational Methods for Eigenvalue Problems. Toronto: University of Toronto Press, 1957.
- [31] Harrell E. M. II Hamiltonian operators with maximal eigenvalues // J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 48–51.
- [32] Harrell E. M. General bounds for the eigenvalues of Schrödinger operators // Maximum principles and eigenvalue problems in partial differential equations / ed. Philip W. Schaefer. New York: Wiley & Harlow, Essex: Longman, 1988. P. 146–166.
- [33] Harrell E. M., Svirsky R. Potentials producing maximally sharp resonances // Trans. Amer. Math. Soc. 1986. V. 203. P. 723–736.
- [34] Karaa S. Valeurs propres extremales dans des problèmes de Sturm–Liouville // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I. 1995. V. 321. P. 265–270.
- [35] Keller J. B. The shape of the strongest column // Arch. Rat. Mech. Anal. 1960. V. 5. P. 275–285.
- [36] Keller J. B. Lower bounds and isoperimetric inequalities for eigenvalues of the Schrödinger operator // J. Math. Phys. Mech. Anal. 1961. V. 2. P. 262.
- [37] Kirsch W., Simon B. Universal lower bounds on eigenvalue splittings for one dimensional Schrödinger operator // Comm. Math. Physics. 1985. V. 97. P. 453–460.
- [38] Krein M. G. On certain problems on the maximum and minimum of characteristic values and on Lyapunov zones of stability // Trans. Math. Soc. Amer. 1955. V. 2. P. 163–187.
- [39] Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes // Ouevreu de Lagrange. Paris: Gauthier & Villars, 1867.
- [40] Leighton W., Nehari Z. On the oscillation of solutions of self-adjoint differential equations of the fourth order // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 89. P. 325–378.
- [41] Levinson N. Positive eigenfunctions for $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Arch. Rat. Mech. Anal. 1962. V. 11. P. 258–272.

- [42] Lions P. L. Two geometrical properties of solutions of semilinear problems // *Applicable Anal.* 1981. V. 12. P. 267–272.
- [43] Makai E. Bounds for the principal frequency of a membrane and the torsional rigidity of a beam // *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 1959. V. 20. P. 33–35.
- [44] Masur E. Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints // *Intern. J. Solids Structures*. 1984. V. 20. P. 211–231.
- [45] Mossino J. *Inégalités isoperimétriques et applications en physique*. Paris: Hermann, 1984.
- [46] Myers M., Spillers W. A note on the strongest fixed-fixed column // *Quart. Appl. Math.* 1986. V. 44. P. 583–588.
- [47] Nakamura S. A remark on eigenvalue splittings for one-dimensional double-well Hamiltonian // *Lett. Math. Phys.* 1986. V. 11. P. 337–340.
- [48] Nehari Z. On the principal frequency of a membrane // *Pacific J. Math.* 1958. V. 8. P. 285–293.
- [49] Nehari Z. Some eigenvalue estimates // *J. Anal. Math.* 1959. V. 7. P. 79–88.
- [50] Olhoff N., Rasmussen S. On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns // *Ing. Journal Solid Struct.* 1977. V. 13. P. 605–614.
- [51] Osserman R. A note on Haymann's theorem on the bass note of a drum // *Comment. Math. Helvetica*. 1977. V. 52. P. 545–555.
- [52] Overton M. L. On minimizing the maximum eigenvalue of a symmetric matrix // *SIAM J. Matrix* (to appear).
- [53] Overton M. L. Large-scale optimization of eigenvalues // *SIAM J. Optim.* 1992. V. 2. P. 88–120.
- [54] Payne L. E. Bounds for the maximum stress in the ST. Venant Torsion problem // *Indiana J. Mech. Math.* 1968. Special Issue. P. 51–53.
- [55] Payne L. E., Rayner M. E. An isoperimetric inequality for the first eigenvalue in the fixed membrane problem // *ZAMP*. 1972. V. 23. P. 13–15.
- [56] Payne L. E., Rayner M. E. Some isoperimetric norm bounds for solutions of Helmholtz equations // *ZAMP*. 1973. V. 24. P. 105–110.
- [57] Payne L. E., Rayner M. E. An isoperimetric inequality for the first eigenvalue in the fixed membrane problem // *ZAMP*. 1972. V. 23. P. 13–15.
- [58] Payne L. E., Weinberger H. F. On optimal Poincaré inequality for convex domains // *Arch Rat. Mech. Anal.* 1960. V. 5. P. 286–292.
- [59] Polya G., Szegő C. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1951.
- [60] Protter M. H. Lower bounds for the spectrum of second order operators and systems of operators // *Maximum principles and eigenvalue problems in partial differential equations* / ed. Philip W. Schaefer. New York: Wiley & Harlow, Essex: Longman, 1988. P. 82–93.
- [61] Ramm A. Topics in scattering and spectral theory. Queries // *Notices Amer. Math. Soc.* 1982. V. 29. P. 327–329.
- [62] Schwarz B. Bounds for the principal frequency of a nonhomogeneous membrane and for the generalized Dirichlet integral // *Pacific J. Math.* 1957. V. 7. P. 1653–1676.
- [63] Schwarz B. On the extrema of the frequencies of nonhomogeneous strings with equimeasurable density // *J. Math. Mech.* 1961. V. 10. P. 401–416.
- [64] Сейранян А. П. Об одной задаче Лагранжа // *Инж. журн. механика твердого тела*. 1984. Т. 19. С. 101–111.
- [65] Сенаторов П. Устойчивость собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля // *Дифференц. уравнения*. 1971. Т. 7. С. 1266–1269.
- [66] Singer I. M., Wong B., Yau S.-T., Yau S. S.-T. An estimate of the gap of the first two eigenvalues in the Schrödinger operator // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*. 1985. V. 129. P. 319–333.
- [67] Svirsky R. Maximally resonant potentials subject to p -norm constraints // *Pacific J. Math.* 1987. V. 129. P. 357–374.

- [68] Szegő G. Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area // J. Rat. Mech. Anal. 1954. V. 3. P. 343–356.
- [69] Tadjbakhsh I., Keller J. B. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues // J. Appl. Mech. 1962. V. 29. P. 159–164.
- [70] Talenti G. Best constants in Sobolev inequality // Ann. Math. Pura Appl. 1976. V. 110. P. 353–372.
- [71] Talenti G. Elliptic equations and rearrangements // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Sci. Fis. Mat. 1976. V. 4. №3. P. 697–718.
- [72] Talenti G. Estimates for eigenvalues of Sturm–Liouville problems // Intern. Series of Numerical Mathematics. 1984. V. 71. P. 341–350.
- [73] Veling E. J. M. Optimal lower bounds for the spectrum of a second order linear differential equation with a p -integrable coefficient // Proc. R. Soc. Edinburgh. 1982. V. A 92. P. 95.
- [74] Weinstock R. Inequalities for a classical eigenvalue problem // J. Rat. Mech. Anal. 1954. V. 3. P. 745–753.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
15.01.1996