Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Мелешкина, Об абсолютной сходимости рядов Фурье по двукратным ограниченным полным ортонормированным системам, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 2, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 12:04:13

Об абсолютной сходимости рядов Фурье по двукратным ограниченным полным ортонормированным системам

А. В. Мелешкина

Пусть $\mathbb{I}^n = [0, 1]^n$ – n -мерный куб, $\mathbb{T}^n = [0, 2\pi)^n$ – n -мерный тор и $C(\mathbb{I}^n)$, $C(\mathbb{T}^n)$ – пространства непрерывных на $\mathbb{I}^n$ и $\mathbb{T}^n$ функций. Модуль непрерывности функции $f \in C(X)$ для $X = \mathbb{I}^n, \mathbb{T}^n$ определяется равенством

$$\omega(f, \delta) = \sup_{x, x+h \in X, 0 < |h| \leq \delta} |f(x+h) - f(x)|.$$

Пусть также $H^\Omega = \{f \in C(X) : \omega(f, \delta) \leq \Omega(\delta), \delta > 0\}$. А. Зигмундом установлено следующее достаточное условие абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье функции ограниченной вариации (см. [1; гл. 4, § 4, с. 149]).

ТЕОРЕМА А. Если функция $f(x) \in C(\mathbb{T}^1) \cap BV(\mathbb{T}^1)$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\omega(f, 1/n)} / n < \infty$, то ряд из модулей коэффициентов Фурье по тригонометрической системе такой функции сходится.

Условие теоремы А для некоторых ортонормированных систем является слишком ограничительным. Например, ряд Фурье–Хаара каждой функции ограниченной вариации сходится абсолютно (см. [1; гл. 10, § 3, с. 420]). В [2] С. В. Бочкаревым доказано, что указанным свойством системы Хаара не может обладать ни одна равномерно ограниченная полная ортонормированная система функций. Точнее, им получена

ТЕОРЕМА В. Для любой равномерно ограниченной полной ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенной на $\mathbb{I}^1$, и модуля непрерывности $\Omega(\delta)$, для которого $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\Omega(1/n)} / n = \infty$, найдется непрерывная функция $F(x) \in H^\Omega$ с условием $F(0) = F(1) = 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(F)| = \infty, \quad c_n(F) = \int_0^1 F(x) \varphi_n(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из теоремы В вытекает существование функции $F(x) \in BV(\mathbb{I}^1)$ с модулем непрерывности $\omega(F, \delta) = O(\log^{-2} \delta^{-1})$, $\delta \rightarrow 0$, для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье. Отметим также, что построение функций с абсолютно расходящимся рядом Фурье тесно связано с оценками снизу коэффициентов Фурье и n -членных приближений (см., например, [3]).

В данной заметке мы рассмотрим функции двух переменных $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) \in C(X)$, имеющие ограниченную вариацию по Харди, т.е. $f \in BV_H(X)$ (см. [4; рус. изд.: с. 768]). Для них также определим смешанный модуль непрерывности

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{x}+\mathbf{h} \in X, 0 < h_1 \leq \delta_1, 0 < h_2 \leq \delta_2} |\Delta_{\mathbf{h}}(f, \mathbf{x})|, \quad X = \mathbb{I}^2, \mathbb{T}^2,$$

где $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ и $\Delta_{\mathbf{h}}(f, \mathbf{x}) = f(x_1, x_2) + f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2+h_2)$.

Аналогичный теореме А результат для функций из $BV_H(\mathbb{T}^2)$ и тригонометрической системы в двумерном случае вытекает из результатов работы А. Вереса [5] (см., например, следствие 2.6).

ТЕОРЕМА С. Если функция $f(\mathbf{x}) \in C(\mathbb{T}^2) \cap BV_H(\mathbb{T}^2)$ имеет модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению

$$\omega(f, \delta_1, \delta_2) = O(\log^{-(2+\varepsilon)} \delta_1^{-1} \log^{-(2+\varepsilon)} \delta_2^{-1}), \quad \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0,$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9706

где $\varepsilon > 0$, то ряд из модулей ее коэффициентов Фурье по тригонометрической системе сходится.

Учитывая, что для функций вида $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ справедливо неравенство $\omega(f, \delta_1, \delta_2) \leq \omega(f_1, \delta_1) \cdot \omega(f_2, \delta_2)$ из теоремы В нетрудно вывести

СЛЕДСТВИЕ. Для равномерно ограниченной полной ортонормированной системы вида $\Phi = \{\varphi_{n_1}(x_1)\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_1, n_2=1}^\infty$, определенной на $\mathbb{I}^2$, найдется непрерывная функция $F(\mathbf{x}) \in BV_H(\mathbb{I}^2)$ с условием $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ и модулем непрерывности

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O(\log^{-2} \delta_1^{-1} \log^{-2} \delta_2^{-1}), \quad \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0,$$

для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье.

Для систем общего вида такое следствие получить не удастся. Однако справедлива

ТЕОРЕМА 1. Для любой равномерно ограниченной полной в $L^2(\mathbb{I}^2)$ ортонормированной системы $\Phi = \{\varphi_n(\mathbf{x})\}_{n=1}^\infty$ найдется непрерывная функция $F(\mathbf{x}) \in BV_H(\mathbb{I}^2)$ с условием $F(x_1, 0) = F(x_1, 1) = F(0, x_2) = F(1, x_2) = 0$ и модулем непрерывности

$$\omega(F, \delta_1, \delta_2) = O\left(\log^{-2} \frac{1}{\max\{\delta_1, \delta_2\}}\right), \quad \delta_1, \delta_2 \rightarrow 0,$$

для которой расходится ряд из модулей коэффициентов Фурье:

$$\sum_{n=1}^\infty |c_n(F)| = \infty, \quad c_n(F) = \int_0^1 \int_0^1 F(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Доказательство теоремы 1 основано на построениях из [1; теорема 10.11]. Мы используем следующий вспомогательный результат, являющийся модификацией неравенства типа Гальярдо–Ниренберга.

ЛЕММА. Для функции $f(\mathbf{x})$, определенной на $(0, a)^2$ и удовлетворяющей условию $\|\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2\|_{L^\infty(0, a)^2} \leq 1$, и любого числа β , $0 < \beta < \min\{1, a\}$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_\beta^a \int_\beta^a h_1^{-2} h_2^{-2} \int_0^{a-h} \int_0^{a-h} (\Delta_h(f, \mathbf{x}))^2 d\mathbf{x} dh \\ & \leq 32 \left[\beta^2 \int_0^a \int_0^a |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \left(\log \frac{a}{\beta} \right) \iint_{\{\mathbf{x} \in (0, a)^2 : |f(\mathbf{x})| > \beta^4\}} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \right]. \end{aligned}$$

Вопрос о точности теоремы 1 остается открытым и тесно связан с открытым вопросом Б.С. Кашина о справедливости двумерного аналога неравенства (8) из [6] (с заменой в двумерном случае обычной производной на смешанную производную $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2$).

Список литературы

- [1] Б.С. Кашин, А.А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, х+550 с.
 [2] С.В. Бочкарев, *УМН*, **27**:2(164) (1972), 55–81. [3] А.В. Мелешкина, *Матем. заметки*, **97**:4 (2015), 632–635. [4] *Математическая энциклопедия*, т. 5, ред. И.М. Виноградов, Советская энциклопедия, М., 1985, 1248 с. [5] A. Veres, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **74**:1-2 (2008), 191–206.
 [6] Б.С. Кашин, *Матем. сб.*, **106(148)**:3(7) (1978), 380–385.

А. В. Мелешкина (A. V. Meleshkina)
 Математический институт им. В. А. Стеклова
 Российской академии наук
 E-mail: meleshkina-anna@mail.ru

Представлено А.Г. Сергеевым
 Принято редколлегией
 24.02.2016