Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Е. Егорова, Е. А. Копылова, В. А. Марченко,
Г. Тешль, Об уточнении дисперсионных оценок для од-
номерных уравнений Шрёдингера и Клейна–Гордона,
УМН, 2016, том 71, выпуск 3, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 06:47:07

УДК 517.955+517.958

Посвящается памяти Бориса Моисеевича Левитана

Об уточнении дисперсионных оценок для одномерных уравнений Шрёдингера и Клейна–Гордона

И. Е. Егорова, Е. А. Копылова, В. А. Марченко, Г. Тешль

Доказывается, что для одномерного оператора Шрёдингера с потенциалом, имеющим первый интегрируемый момент, элементы матрицы рассеяния принадлежат унитарной винеровской алгебре функций с интегрируемыми преобразованиями Фурье. С использованием этого факта выводятся новые дисперсионные оценки для решений соответствующих уравнений Шрёдингера и Клейна–Гордона. В частности, мы избавляемся от условия более сильного убывания потенциала в случае наличия резонанса в конце непрерывного спектра.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: уравнение Шрёдингера, уравнение Клейна–Гордона, дисперсионные оценки, рассеяние.

DOI: 10.4213/rm9708

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	3
2. Непрерывность матрицы рассеяния.....	7
3. Уравнение Шрёдингера.....	12
4. Уравнение Шрёдингера (нерезонансный случай).....	13
5. Уравнение Клейна–Гордона.....	17
5.1. Убывание низкочастотной компоненты.....	17
5.2. Убывание высокочастотной компоненты.....	19
6. Уравнение Клейна–Гордона (нерезонансный случай).....	21
7. Приложение. Оценка убывания.....	23
Список литературы.....	25

1. Введение

Мы рассматриваем одномерное уравнение Шрёдингера

$$i\dot{\psi}(x, t) = H\psi(x, t), \quad H := -\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

Работа выполнена при поддержке Австрийского научного фонда (FWF), гранты Y330 и P27492-N25.

© И. Е. Егорова, Е. А. Копылова, В. А. Марченко, Г. Тешль, 2016

с вещественным интегрируемым потенциалом V и уравнение Клейна–Гордона

$$\ddot{\psi}(x, t) = -(H + m^2)\psi(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad m > 0. \quad (1.2)$$

Мы будем использовать векторную форму уравнения (1.2):

$$i\dot{\Psi}(t) = \mathbf{H}\Psi(t), \quad (1.3)$$

где

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H - m^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Нашей целью является получение дисперсионного убывания для этих уравнений. Это хорошо изученная область, и главным вкладом данной работы является существенное упрощение доказательств, которое вместе с тем позволяет улучшить предыдущие результаты. Наш подход базируется на том, что разность матрицы рассеяния и единичной матрицы принадлежит винеровской алгебре, т. е. преобразование Фурье этой разности является интегрируемым. Так как данный результат представляет независимый интерес, мы приводим его в отдельном разделе 2. Используя этот факт, мы доказываем затем наши основные результаты. Чтобы их сформулировать, введем весовые пространства $L_\sigma^p = L_\sigma^p(\mathbb{R})$, $\sigma \in \mathbb{R}$, с конечными нормами

$$\|\psi\|_{L_\sigma^p} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{p\sigma} |\psi(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^\sigma |\psi(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma = 0$ соответствует обычным пространствам L^p без веса. Напомним (см. [14] или [23; раздел 9.7]), что при $V \in L_1^1$ абсолютно непрерывный спектр оператора H совпадает с интервалом $[0, \infty)$. Кроме того, на интервале $(-\infty, 0)$ может находиться конечное число собственных значений. Концевая точка непрерывного спектра называется резонансом, если существует ограниченное решение уравнения $-\psi'' + V\psi = 0$ (это эквивалентно тому, что определитель Вронского для решений Йоста обращается в нуль в этой точке).

Для уравнения Шрёдингера справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$. Тогда справедлива следующая асимптотика:

$$\|e^{-itH}P_c\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} = \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

где $P_c = P_c(H)$ – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R})$ на непрерывный спектр оператора H .

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $V \in L_2^1(\mathbb{R})$ и концевая точка спектра оператора H не является резонансом. Тогда справедлива следующая асимптотика:

$$\|e^{-itH}P_c\|_{L_1^1 \rightarrow L_\infty^1} = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.6)$$

Отметим, что для свободного уравнения Шрёдингера (1.1) с $V = 0$ оценка (1.5) вытекает непосредственно из точной формулы для решения (см., например, [23; раздел 7.3]). Дисперсионное убывание (1.5) для возмущенного уравнения Шрёдингера получили М. Гольдберг и В. Шлаг [8], улучшив предыдущий результат Р. Ведера [25] при условии $V \in L_1^1$ в нерезонансном случае и при более ограничительном условии $V \in L_2^1$ в резонансном случае (см. также [4]). Подчеркнем, что наш подход не требует дополнительного убывания потенциала в резонансном случае. Более того, наше доказательство теоремы 1.1 является простым приложением теоремы Фубини. Чтобы показать, что дополнительное убывание V в резонансном случае не является необходимым, мы обобщили старый (но не очень известный) результат И. М. Гусейнова [9]. Отметим также, что на полуоси аналогичный результат для данных рассеяния хорошо известен (см. [14; задача 3.2.1]) и был использован Р. Ведером [27] для получения дисперсионных оценок на полуоси.

В силу унитарности оператора $\exp\{-itH\}: L^2 \rightarrow L^2$ и оценки (1.5), из интерполяционной теоремы Риса–Торина следует оценка

$$\|e^{-itH}P_c\|_{L^{p'} \rightarrow L^p} = \mathcal{O}(t^{-1/2+1/p}), \quad (1.7)$$

справедливая для любых p и p' таких, что $p \in [2, \infty]$ и $1/p + 1/p' = 1$. Используя (1.7), мы можем также вывести соответствующие оценки Стрихарца (см. [10; теорема 1.2]).

Дисперсионное убывание (1.6) установлено В. Шлагом [21] в случае $V \in L_4^1$ и затем М. Гольдбергом [7] в случае $V \in L_3^1$. Для $V \in L_2^1$ оценка (1.6) получена Х. Мицутани в работе [17]. В настоящей работе мы приводим доказательство (1.6), основанное на несколько ином подходе.

Из (1.6) немедленно следует дисперсионное убывание в весовых нормах:

$$\|e^{-itH}P_c\|_{L_\sigma^2 \rightarrow L_{-\sigma}^2} = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

для любого $\sigma > 3/2$. Асимптотика вида (1.8) получена М. Мюратой [18] в нерезонансном случае для более общих (в том числе и многомерных) операторов типа Шрёдингера. В частности, в одномерном случае эти асимптотики установлены в предположении, что $\sigma > 5/2$ и $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\rho}$ при некотором $\rho > 4$ (см. также обзор [21]).

Во второй части настоящей работы мы доказываем новые дисперсионные оценки для уравнения Клейна–Гордона. Чтобы их сформулировать, определим потенциал Бесселя

$$\mathcal{J}_\alpha = \mathcal{F}^{-1}(1 + |\cdot|^2)^{\alpha/2} \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ обозначает преобразование Фурье. Определим также обобщенное пространство Соболева $H_{\sigma,1}^{\alpha}(\mathbb{R})$ (ср. [1; определение 6.2.2]) как пространство рас-

пределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_\sigma^{\alpha,1}} = \|\mathcal{J}_\alpha f\|_{L_\sigma^1}, \quad \alpha, \sigma \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Как и ранее, $H^{\alpha,1} = H_0^{\alpha,1}$.

ТЕОРЕМА 1.3. (i) Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$. Тогда имеет место следующая асимптотика:

$$\| [e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12} \|_{H^{1/2,1} \rightarrow L^\infty} = \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

(ii) Пусть $V \in L_2^1(\mathbb{R})$ и концевая точка спектра оператора H не является резонансом. Тогда

$$\| [e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12} \|_{H_1^{1/2,1} \rightarrow L_1^\infty} = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.11)$$

Здесь $\mathbf{P}_c$ – ортогональный проектор в $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ на непрерывный спектр $\mathbf{H}^2$ и $[\cdot]^{ij}$ обозначает (i, j) -й элемент соответствующего матричного оператора.

Отметим, что соответствующие оценки для других элементов матричного оператора $e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c$ могут быть получены аналогично.

Теорема 1.3, (i) зачастую формулируется в терминах пространств Бесова $B_{1,1}^{1/2}(\mathbb{R})$ (см. [1; определение 6.2.2]). А именно, вложение $B_{1,1}^{1/2} \subset H^{1/2,1}$ (см. [1; теорема 6.2.4]) показывает, что (1.10) выполняется с $B_{1,1}^{1/2}$ вместо $H^{1/2,1}$. Аналогично, (1.11) выполняется с $B_{1,1,1}^{1/2}$ вместо $H_1^{1/2,1}$, где $B_{1,1,1}^{1/2}$ – соответствующее пространство Бесова с весом (чтобы определить $B_{1,1,1}^{1/2}$, нужно в определении $B_{1,1}^{1/2}$ заменить L^1 на L_1^1). Как и ранее, требуемая оценка следует из того, что $B_{1,1,1}^{1/2} \subset H_1^{1/2,1}$ (см., например, [16; предложение 3.12]).

Кроме того, из (1.10) вытекает, что

$$\| [e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12} \|_{B_{p',p'}^{1/2-3/p} \rightarrow L^p} = \mathcal{O}(t^{-1/2+1/p}), \quad t \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \quad (1.12)$$

для любого $p \in [2, \infty]$ при том же предположении $V \in L_1^1(\mathbb{R})$ (см. следствие 5.3).

В трехмерном случае $W^{k,p} \rightarrow L^q$ оценки для уравнения Клейна–Гордона установлены А. Соффером и М. И. Вайнштейном [22] (см. также [29] для пространств размерности $n \geq 3$). В одномерном случае $W^{k,p} \rightarrow W^{k,q}$ оценки получены Р. Ведером [26] для $V \in L_\gamma^1$, где $\gamma > 3/2$ в нерезонансном случае и $\gamma > 5/2$ в резонансном случае. Дисперсионные оценки типа (1.12) (с $B_{p',p}^{1/2-3/p}(V)$ вместо $B_{p',p'}^{1/2-3/p}$) приведены в [4], но они также требуют $V \in L_2^1$ в резонансном случае.

Для одномерного уравнения Клейна–Гордона убывание $t^{-3/2}$ в весовых энергетических нормах $H_\sigma^1 \oplus L_\sigma^2 \rightarrow H_{-\sigma}^1 \oplus L_{-\sigma}^2$, где $\sigma > 5/2$, было получено А. И. Кочем и Е. А. Копыловой [11] (см. также обзор [12]).

Отметим, что дисперсионные оценки типа (1.5)–(1.8) и (1.10)–(1.12) играют важную роль в доказательстве асимптотической устойчивости солитонов для соответствующих одномерных нелинейных уравнений [2], [13], а также для их дискретных аналогов [6].

2. Непрерывность матрицы рассеяния

Определим банахову алгебру $\mathcal{A}$ функций с интегрируемыми преобразованиями Фурье:

$$\mathcal{A} = \left\{ f: f(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{ikp} \widehat{f}(p) dp, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}$$

с нормой $\|f\|_{\mathcal{A}} = \|\widehat{f}\|_{L^1}$, а также соответствующую унитарную банахову алгебру $\mathcal{A}_1$:

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ f: f(k) = c + \int_{\mathbb{R}} e^{ikp} \widehat{g}(p) dp, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}), c \in \mathbb{C} \right\}$$

с нормой $\|f\|_{\mathcal{A}_1} = |c| + \|\widehat{g}\|_{L^1}$. Очевидно, что $\mathcal{A}$ является подалгеброй $\mathcal{A}_1$. Алгебра $\mathcal{A}_1$ может трактоваться как алгебра функций, преобразования Фурье которых имеют вид $c\delta(\cdot) + \widehat{g}(\cdot)$, где δ – дельта-функция, а $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$. Отметим, что по теореме Винера, если $f \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}$ и $f(k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{R}$, то $f^{-1}(k) \in \mathcal{A}_1$ (см. [28]).

Напомним некоторые факты теории рассеяния [5], [14] для оператора Шрёдингера H , определенного в (1.1). В предположении $V \in L^1_1$ существуют решения Йоста $f_{\pm}(x, k)$ уравнения

$$H\psi = k^2\psi, \quad k \in \overline{\mathbb{C}_+},$$

где $\mathbb{C}_+ = \{k: \operatorname{Im} k > 0\}$. Эти решения нормализованы так, что

$$f_{\pm}(x, k) \sim e^{\pm ikx}, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

и могут быть записаны в виде

$$f_{\pm}(x, k) = e^{\pm ikx} h_{\pm}(x, k), \quad h_{\pm}(x, k) = 1 \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(x, y) e^{\pm 2iky} dy, \quad (2.1)$$

с вещественнозначной функцией $B_{\pm}(x, y)$, удовлетворяющей следующим условиям (см. [5; § 2] или [14; § 3.1]):

$$|B_{\pm}(x, y)| \leq e^{\gamma_{\pm}(x)} \eta_{\pm}(x + y), \quad (2.2)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} B_{\pm}(x, y) \pm V(x + y) \right| \leq 2e^{\gamma_{\pm}(x)} \eta_{\pm}(x + y) \eta_{\pm}(x), \quad (2.3)$$

где

$$\gamma_{\pm}(x) = \int_x^{\pm\infty} (y - x) |V(y)| dy, \quad \eta_{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |V(y)| dy. \quad (2.4)$$

Так как $\eta_{\pm}(x + \cdot) \in L^1(\mathbb{R})$, то очевидно, что

$$h_{\pm}(x, \cdot) - 1, h'_{\pm}(x, \cdot) \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Обозначим через

$$W(\varphi(x, k), \psi(x, k)) = \varphi(x, k) \psi'(x, k) - \varphi'(x, k) \psi(x, k)$$

обычный вронскиан. Положим

$$W(k) = W(f_-(x, k), f_+(x, k)), \quad W_\pm(k) = W(f_\mp(x, k), f_\pm(x, -k)).$$

Решения Йоста $f_\pm(x, k)$, а также их производные и вронскиан $W(k)$ не принадлежат $\mathcal{A}_1$. Тем не менее элементы матрицы рассеяния, т. е. коэффициенты прохождения и отражения,

$$T(k) = \frac{2ik}{W(k)}, \quad R_\pm(k) = \mp \frac{W_\pm(k)}{W(k)},$$

являются элементами этой алгебры.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $V \in L^1_1$, то $T(k) - 1 \in \mathcal{A}$ и $R_\pm(k) \in \mathcal{A}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|T(k)| \leq 1$ при $k \in \mathbb{R}$, то вронскиан $W(k)$ может обращаться в нуль только на границе непрерывного спектра, т. е. при $k = 0$, что соответствует резонансному случаю. Кроме того, это нуль не выше первого порядка.

Шаг (i). Рассмотрим сначала нерезонансный случай $W(0) \neq 0$. Обозначим $h_\pm(k) := h_\pm(0, k)$, $h'_\pm(k) := h'_\pm(0, k)$. Тогда из (2.1) следует, что

$$W(k) = 2ikh_+(k)h_-(k) + \widetilde{W}(k), \quad \widetilde{W}(k) := h_-(k)h'_+(k) - h'_-(k)h_+(k), \quad (2.6)$$

$$W_\pm(k) = h_\mp(k)h'_\pm(-k) - h_\pm(-k)h'_\mp(k). \quad (2.7)$$

Кроме того, $\widetilde{W}(k), W_\pm(k) \in \mathcal{A}$. Положим

$$\nu(k) := \frac{1}{ik - 1} = - \int_0^\infty e^{iky} e^{-y} dy \quad (2.8)$$

и заметим, что $\nu(k) \in \mathcal{A}$, $k\nu(k) \in \mathcal{A}_1$, а значит, $\nu(k)W(k) \in \mathcal{A}_1$. Так как $\nu(k)W(k) \rightarrow 2$ при $k \rightarrow \infty$, то $\nu(k)W(k) \in \mathcal{A}_1 \setminus \mathcal{A}$. Более того, $\nu(k)W(k) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{R}$, следовательно, $(\nu(k)W(k))^{-1} \in \mathcal{A}_1$. Далее, $\nu(k)W_\pm(k) \in \mathcal{A}$, и мы имеем

$$R_\pm(k) = \mp \frac{\nu(k)W_\pm(k)}{\nu(k)W(k)} \in \mathcal{A}, \quad T(k) = \frac{2ik\nu(k)}{\nu(k)W(k)} \in \mathcal{A}_1.$$

Кроме того, так как $T(k) \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, то $T(k) - 1 \in \mathcal{A}$.

Шаг (ii). Резонансный случай доказывается сложнее. Введем функции

$$\Phi_\pm(k) := h_\pm(k)h'_\pm(0) - h'_\pm(k)h_\pm(0), \quad (2.9)$$

$$K_\pm(x) := \pm \int_x^{\pm\infty} B_\pm(0, y) dy, \quad D_\pm(x) := \pm \int_x^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} B_\pm(0, y) dy, \quad (2.10)$$

где $B_\pm(x, y)$ – операторы преобразования из (2.1). Интегрируя второе равенство в (2.1) формально по частям, получим

$$\begin{aligned} h'_\pm(k) &= \pm \int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} B_\pm(0, y) e^{\pm 2iky} dy = D_\pm(0) + 2ik \int_0^{\pm\infty} D_\pm(y) e^{\pm 2iky} dy \\ &= h'_\pm(0) + 2ik \int_0^{\pm\infty} D_\pm(y) e^{\pm 2iky} dy, \\ h_\pm(k) &= h_\pm(0) + 2ik \int_0^{\pm\infty} K_\pm(y) e^{\pm 2iky} dy. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что интегралы здесь понимаются как несобственные. Их подстановка в (2.9) дает

$$\Phi_{\pm}(k) = 2ik\Psi_{\pm}(k), \quad \Psi_{\pm}(k) := \int_0^{\pm\infty} (D_{\pm}(y)h_{\pm}(0) - K_{\pm}(y)h'_{\pm}(0))e^{\pm 2iky} dy.$$

ЛЕММА 2.2. Если $V \in L^1_1$, то $\Psi_{\pm}(k) \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя [9], мы докажем, что функции

$$H_{\pm}(y) := D_{\pm}(y)h_{\pm}(0) - K_{\pm}(y)h'_{\pm}(0)$$

принадлежат пространству $L^1(\mathbb{R}_{\pm}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}_{\pm})$. Оригинальное доказательство этого факта, приведенное в работе [9], можно значительно упростить, используя уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко в форме, предложенной в [5] (см. также [14; § 3.5]). А именно, ядра $B_{\pm}(x, y)$ являются решениями уравнений

$$F_{\pm}(x + y) + B_{\pm}(x, y) \pm \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(x, t)F_{\pm}(x + y + z) dz = 0, \quad (2.11)$$

где функции $F_{\pm}(x)$ абсолютно непрерывны, причем $F'_{\pm} \in L^1(\mathbb{R}_{\pm})$, и имеют место оценки

$$|F_{\pm}(x)| \leq C\eta_{\pm}(x), \quad \pm x \geq 0, \quad (2.12)$$

где $\eta_{\pm}$ определены в (2.4). Продифференцируем теперь (2.11) по x и положим $x = 0$. Кроме того, положим $x = 0$ в самом уравнении (2.11) и затем проинтегрируем оба уравнения по y от x до $\pm\infty$. Тогда из (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} & \pm \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y) dy + K_{\pm}(x) + \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(0, z) \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y + z) dy dz = 0, \\ & \mp F_{\pm}(x) + D_{\pm}(x) + \int_0^{\pm\infty} \frac{\partial}{\partial x} B_{\pm}(0, z) \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y + z) dy dz \\ & - \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(0, z)F_{\pm}(x + z) dz = 0. \end{aligned}$$

Чтобы избавиться от двойного интегрирования, используем (2.10) и равенства

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y + z) dy = -F_{\pm}(x + z).$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} & \pm (1 + K_{\pm}(0)) \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y) dy + K_{\pm}(x) \mp \int_0^{\pm\infty} K_{\pm}(z)F_{\pm}(x + z) dz \\ & = K_{\pm}(x) \pm h_{\pm}(0) \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y) dy \mp \int_0^{\pm\infty} K_{\pm}(z)F_{\pm}(x + z) dz = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

и

$$\begin{aligned} & \mp F_{\pm}(x) + D_{\pm}(x) \pm h'_{\pm}(0) \int_x^{\pm\infty} F_{\pm}(y) dy \mp \int_0^{\pm\infty} D_{\pm}(z)F_{\pm}(x + z) dz \\ & - \int_0^{\pm\infty} B_{\pm}(0, z)F_{\pm}(x + z) dz = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Умножая (2.13) на $h'_\pm(0)$, а (2.14) на $h_\pm(0)$, и вычитая первое уравнение из второго, получим интегральные уравнения

$$H_\pm(x) \mp \int_0^{\pm\infty} H_\pm(y) F_\pm(x+y) dy = G_\pm(x), \quad (2.15)$$

где

$$G_\pm(x) = h_\pm(0) \left(\int_0^{\pm\infty} B_\pm(0, y) F_\pm(x+y) dy \pm F_\pm(x) \right).$$

Из оценок (2.2) и (2.12) следует, что

$$|G_\pm(x)| \leq C\eta_\pm(x), \quad \pm x \geq 0. \quad (2.16)$$

Далее, для достаточно большого $N > 0$ представим (2.15) в виде

$$H_\pm(x) \mp \int_{\pm N}^{\pm\infty} H_\pm(y) F_\pm(x+y) dy = G_\pm(x, N), \quad (2.17)$$

где

$$G_\pm(x, N) = G_\pm(x) \pm \int_0^{\pm N} H_\pm(y) F_\pm(x+y) dy.$$

Из формул (2.10) и оценок (2.2)–(2.4) следует, что $H_\pm \in L^\infty(\mathbb{R}_\pm) \cap C(\mathbb{R}_\pm)$. Поэтому $|G_\pm(x, N)| \leq C(N)\eta_\pm(x)$ в силу (2.16) и монотонности $\eta_\pm(x)$. Применяя к (2.17) метод последовательных приближений (см. [14; гл. 3, § 2]), получим, что $H_\pm \in L^1(\mathbb{R}_\pm)$. Лемма 2.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.1 в резонансном случае. Так как решения Йоста линейно зависимы при $k = 0$, т. е. $h_+(x, 0) = ch_-(x, 0)$, то мы будем различать два случая: $h_+(0)h_-(0) \neq 0$ и $h_+(0) = h_-(0) = 0$. В первом случае имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{W}(k) &= \widetilde{W}(k) - \widetilde{W}(0) = \frac{h_+(k)}{h_-(0)} \Phi_-(k) - \frac{h_-(k)}{h_+(0)} \Phi_+(k) \\ &= 2ik \left(\frac{h_+(k)}{h_-(0)} \Psi_-(k) - \frac{h_-(k)}{h_+(0)} \Psi_+(k) \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, во втором случае $h_+(0) = h_-(0) = 0$ (и, следовательно, $h'_+(0)h'_-(0) \neq 0$), мы имеем $\Phi_\pm(k) = h_\pm(k)h'_\pm(0) = 2ik\Psi_\pm(k)$ и, значит,

$$\widetilde{W}(k) = 2ik \left(\frac{h'_+(k)}{h'_-(0)} \Psi_-(k) - \frac{h'_-(k)}{h'_+(0)} \Psi_+(k) \right).$$

Таким образом,

$$\frac{W(k)}{2ik} = h_-(k)h_+(k) + \begin{cases} \frac{h_+(k)}{h_-(0)} \Psi_-(k) - \frac{h_-(k)}{h_+(0)} \Psi_+(k), & h_+(0)h_-(0) \neq 0, \\ \frac{h'_+(k)}{h'_-(0)} \Psi_-(k) - \frac{h'_-(k)}{h'_+(0)} \Psi_+(k), & h_+(0)h_-(0) = 0, \end{cases}$$

где правая часть лежит в $\mathcal{A}_1$ в силу (2.5) и леммы 2.2. Так как $W(k)/(2ik) = T(k)^{-1} \neq 0$, то мы заключаем, что $T(k) - 1 \in \mathcal{A}$. Аналогично,

$$\frac{W_{\pm}(k)}{2ik} = \begin{cases} \frac{h_{\pm}(-k)}{h_{\mp}(0)} \Psi_{\mp}(k) - \frac{h_{\mp}(k)}{h_{\pm}(0)} \Psi_{\pm}(-k), & h_{+}(0)h_{-}(0) \neq 0, \\ \frac{h'_{\pm}(-k)}{h'_{\mp}(0)} \Psi_{\mp}(k) - \frac{h'_{\mp}(k)}{h'_{\pm}(0)} \Psi_{\pm}(-k), & h_{+}(0)h_{-}(0) = 0, \end{cases}$$

где правая часть лежит в $\mathcal{A}$, и, значит,

$$R_{\pm}(k) = \mp \frac{W_{\pm}(k)}{2ik} T(k) \in \mathcal{A}.$$

Теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь функцию $\psi(x, y, k)$, определенную следующим образом:

$$\psi(x, y, k) = h_{+}(y, k)h_{-}(x, k)T(k) - 1 \quad \text{при } y \geq x \quad (2.18)$$

и $\psi(x, y, k) = \psi(y, x, k)$ при $y < x$. Из теоремы 2.1 и формулы (2.5) следует, что $\psi(x, y, \cdot) \in \mathcal{A}$.

ЛЕММА 2.3. *Справедлива следующая оценка:*

$$\|\psi(x, y, \cdot)\|_{\mathcal{A}} \leq C, \quad (2.19)$$

где константа C не зависит от x и y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем величины

$$\sup_{\pm x \geq 0} \left(\pm \int_0^{\pm\infty} |B_{\pm}(x, y)| dy \right) = C_{\pm},$$

которые конечны в силу (2.2). Тогда

$$\|h_{\pm}(x, \cdot)\|_{\mathcal{A}_1} \leq 1 + C_{\pm}, \quad \|h_{\pm}(x, \cdot) - 1\|_{\mathcal{A}} \leq C_{\pm} \quad \text{при } \pm x \geq 0. \quad (2.20)$$

Рассмотрим три возможных случая: (а) $x \leq y \leq 0$, (б) $0 \leq x \leq y$, (с) $x \leq 0 \leq y$. В случае (с) оценка $\|\psi(x, y, \cdot)\|_{\mathcal{A}} \leq C$ следует непосредственно из (2.20) и теоремы 2.1. В двух других случаях используем соотношения рассеяния

$$T(k)f_{\pm}(x, k) = R_{\mp}(k)f_{\mp}(x, k) + f_{\mp}(x, -k) \quad (2.21)$$

для получения представления

$$\psi(k, x, y) = \begin{cases} h_{-}(x, k)(R_{-}(k)h_{-}(y, k)e^{-2iyk} + h_{-}(y, -k)) - 1, & x \leq y \leq 0, \\ h_{+}(y, k)(R_{+}(k)h_{+}(x, k)e^{2ixk} + h_{+}(x, -k)) - 1, & 0 \leq x \leq y. \end{cases} \quad (2.22)$$

Так как для любой функции $g(k) \in \mathcal{A}$ и любого вещественного s функция $g(k)e^{iks}$ принадлежит $\mathcal{A}$, а ее $\mathcal{A}$ -норма не зависит от s , то мы приходим к (2.19). Лемма доказана.

3. Уравнение Шрёдингера

Теперь мы можем доказать дисперсионное убывание (1.5) для уравнения Шрёдингера (1.1). Из спектральной теоремы следует, что

$$e^{-itH} P_c = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-it\omega} (\mathcal{R}(\omega + i0) - \mathcal{R}(\omega - i0)) d\omega, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{R}(\omega) = (H - \omega)^{-1}$ – резольвента оператора H и предел понимается в строгом смысле [23]. Выражая ядро резольвенты $R(\omega)$ при $\omega = k^2 \pm i0$, $k > 0$, через решения Йоста, получим (см. [5], [23])

$$[\mathcal{R}(k^2 \pm i0)](x, y) = -\frac{f_+(y, \pm k)f_-(x, \pm k)}{W(\pm k)} = \mp \frac{f_+(y, \pm k)f_-(x, \pm k)T(\pm k)}{2ik}$$

при всех $x \leq y$ (при $x > y$ нужно поменять местами переменные x и y).

Таким образом, в случае $x \leq y$ интегральное ядро оператора $e^{-itH} P_{k_0}(H)$ выражается формулой

$$\begin{aligned} [e^{-itH} P_{k_0}](x, y) &= \frac{i}{\pi} \int_{-k_0}^{k_0} e^{-itk^2} \frac{f_+(y, k)f_-(x, k)T(k)}{2ik} k dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-k_0}^{k_0} e^{-i(tk^2 - |y-x|k)} h_+(y, k)h_-(x, k)T(k) dk, \end{aligned}$$

где $P_{k_0} = P_H([0, k_0^2])$ – спектральный проектор на интервал $[0, k_0^2]$. Переходя к пределу при $k_0 \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} [e^{-itH} P_c](x, y) &= \lim_{k_0 \rightarrow \infty} [e^{-itH} P_{k_0}](x, y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tk^2 - |y-x|k)} h_+(y, k)h_-(x, k)T(k) dk, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где при $t \in \mathbb{R}$ интеграл понимается как несобственный (если $\text{Im } t < 0$, то интеграл сходится абсолютно). На самом деле сходимость интеграла при $t \in \mathbb{R}$ обеспечивается нижеследующей леммой 3.1, а из леммы 2.3 следует, в свою очередь, оценка $|[e^{-itH} P_{k_0}](x, y)| \leq C|t|^{-1/2}$. Таким образом, мы можем применить теорему о мажорируемой сходимости и заключить, что правая часть равенства (3.2) действительно является ядром оператора $e^{-itH} P_c$ на $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 3.1. *При $\text{Im } t \leq 0$ справедливо следующее представление:*

$$\begin{aligned} [e^{-itH} P_c](x, y) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi it}} \left(\exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4it}\right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{(p+|x-y|)^2}{4it}\right\} \hat{\psi}(x, y, p) dp \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $\hat{\psi}(x, y, p)$ – преобразование Фурье функции $\psi(x, y, k)$, определенной в (2.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.2) следует, что

$$[e^{-itH} P_c](x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tk^2 - |y-x|k)} (1 + \psi(x, y, k)) dk.$$

Так как первое слагаемое в интеграле легко вычисляется, то мы рассмотрим только второе слагаемое, содержащее ψ . Используя теорему Фубини, представим это слагаемое в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \int_{-k_0}^{k_0} \int_{\mathbb{R}} \exp\{-i(tk^2 - |y-x|k - kp)\} \widehat{\psi}(x, y, p) dp dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{i \frac{(p + |y-x|)^2}{4t}\right\} \\ & \quad \times \int_{-k_0}^{k_0} \exp\left\{-i \frac{(2kt - |y-x| - p)^2}{4t}\right\} dk \widehat{\psi}(x, y, p) dp \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4\pi it}} \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{i \frac{(p + |y-x|)^2}{4t}\right\} (\operatorname{erf}(q_+) + \operatorname{erf}(q_-)) \widehat{\psi}(x, y, p) dp, \end{aligned}$$

где

$$q_{\pm} = \frac{k_0}{2} \sqrt{4it} \pm i \frac{p + |x-y|}{\sqrt{4it}},$$

а $\operatorname{erf}(z)$ – функция ошибок (см. [19; § 7.2]). Так как $\operatorname{erf}(z) = 1 + \mathcal{O}(e^{-z^2})$ при $z \rightarrow \infty$ и $|\arg(z)| < 3\pi/4$ (см. [19; формула (7.12.1)]), то утверждение теоремы следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Так как

$$\|e^{-itH} P_c\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} = \sup_{\|f\|_{L^1}=1, \|g\|_{L^1}=1} \langle f, e^{-itH} P_c g \rangle = \sup_{x,y} |e^{-itH} P_c](x, y)|,$$

то теорема 1.1 следует из лемм 3.1 и 2.3.

В действительности мы установили несколько более сильный результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $V \in L^1_1(\mathbb{R})$. Тогда

$$\|e^{-itH} P_{k_0}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq C|t|^{-1/2}, \quad \operatorname{Im} t \leq 0,$$

при каждом $0 \leq k_0 \leq \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная оценка вытекает из полученного при доказательстве леммы 3.1 представления для $[e^{-itH} P_{k_0}](x, y)$, ограниченности $\operatorname{erf}(q_{\pm})$ в рассматриваемой области, а также оценки (2.19).

4. Уравнение Шрёдингера (нерезонансный случай)

В этом разделе мы рассмотрим нерезонансный случай и докажем дисперсионное убывание (1.6). Мы будем использовать следующее представление для скачка резольвенты на непрерывном спектре:

$$[\mathcal{R}(k^2 + i0) - \mathcal{R}(k^2 - i0)](x, y) = \frac{T(k)f_+(y, k)f_-(x, k) + \overline{T(k)f_+(y, k)f_-(x, k)}}{-2ik}$$

при $x \leq y$ и $k > 0$. Из соотношений рассеяния (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} f_-(x, k) &= T(-k)f_+(x, -k) - R_-(-k)f_-(x, -k), \\ \overline{f_+(y, k)} &= T(k)f_-(y, k) - R_+(k)f_+(y, k), \end{aligned}$$

и, используя условие согласования $T\bar{R}_- + \bar{R}_+ = 0$, мы приходим к следующей формуле (см. [21; с. 13]):

$$[\mathcal{R}(k^2 + i0) - \mathcal{R}(k^2 - i0)](x, y) = \frac{|T(k)|^2}{-2ik} [f_+(y, k)f_+(x, -k) + f_-(y, k)f_-(x, -k)]. \quad (4.1)$$

Подставив эту формулу в (3.1), получим

$$\begin{aligned} [e^{-itH}P_c](x, y) &= [\mathcal{K}_+(t)](x, y) + [\mathcal{K}_-(t)](x, y), \\ [\mathcal{K}_\pm(t)](x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tk^2 \mp |y-x|k)} |T(k)|^2 h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k) dk. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}_\pm(t)](x, y) &= \pm \frac{|y-x|}{8\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tk^2 \mp |y-x|k)} \frac{|T(k)|^2}{k} h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k) dk \\ &\quad - \frac{1}{8\pi it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tk^2 \mp |y-x|k)} \frac{|T(k)|^2}{k^2} h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k) dk \\ &\quad + \frac{1}{8\pi it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tk^2 \mp |y-x|k)} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} [|T(k)|^2 h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k)] dk. \end{aligned}$$

Применяя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 3.1, мы приходим к представлению

$$[\mathcal{K}_\pm(t)](x, y) = \frac{t^{-3/2}}{8\sqrt{\pi i}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{i \frac{(p + |x-y|)^2}{4t}\right\} \sum_{j=1}^3 \widehat{\psi}_j^\pm(x, y, p) dp, \quad (4.2)$$

где $\widehat{\psi}_j^\pm(x, y, p)$, $j = 1, 2, 3$, — преобразования Фурье функций

$$\begin{aligned} \psi_1^\pm(x, y, k) &= \pm |y-x| \frac{|T(k)|^2}{k} h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k), \\ \psi_2^\pm(x, y, k) &= i \frac{|T(k)|^2}{k^2} h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k), \\ \psi_3^\pm(x, y, k) &= -i \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial k} [|T(k)|^2 h_\pm(y, k) h_\pm(x, -k)]. \end{aligned}$$

Далее мы оценим $\mathcal{A}$ -нормы этих функций. Начнем со следующей леммы.

ЛЕММА 4.1. Пусть $V \in L_2^1$ и $W(0) \neq 0$. Тогда $T(k)h_\pm(x, k)/k \in \mathcal{A}$ и

$$\left\| \frac{T(k)h_\pm(x, k)}{k} \right\|_{\mathcal{A}} \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\frac{T(k)}{k} = \frac{2i\nu(k)}{\nu(k)W(k)} \in \mathcal{A}$$

(см. (2.8)), то при $x \in \mathbb{R}_\pm$ оценка (4.3) следует из (2.20). Рассмотрим случай $x \in \mathbb{R}_\mp$. Из соотношений рассеяния (2.21) следует, что

$$\begin{aligned} T(k)h_\pm(x, k) &= (R_\mp(k) + 1)h_\mp(x, k)e^{\mp 2ikx} - (h_\mp(x, k) - h_\mp(x, -k))e^{\mp 2ikx} \\ &\quad + h_\mp(x, -k)(1 - e^{\mp 2ikx}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Используя (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{h_{\mp}(x, k) - h_{\mp}(x, -k)}{k} &= \mp \int_0^{\mp\infty} B_{\mp}(x, r) \frac{e^{\mp ikr} - e^{\pm ikr}}{k} dr \\ &= i \int_0^{\mp\infty} B_{\mp}(x, r) \int_{-r}^r e^{iky} dy dr \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mp|y|}^{\mp\infty} B_{\mp}(x, r) dr \right) e^{iky} dy. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что при $V \in L_2^1$ из формулы (2.2) следует, что $B_{\mp}(x, \cdot) \in L_1^1(\mathbb{R}_{\mp})$ при любом фиксированном x и, соответственно,

$$S_{\mp}(x, y) = \int_y^{\mp\infty} |B_{\mp}(x, r)| dr \in L^1(\mathbb{R}_{\mp}).$$

Основываясь на этом наблюдении, получим

$$\left\| \frac{h_{\mp}(x, k) - h_{\mp}(x, -k)}{k} \right\|_{\mathcal{A}} \leq C, \quad x \in \mathbb{R}_{\mp}. \quad (4.5)$$

По тем же причинам формула (2.3) влечет включение

$$\frac{h'_{\mp}(0, k) - h'_{\mp}(0, -k)}{k} \in \mathcal{A}. \quad (4.6)$$

Далее, из (2.6) и (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{W(k) \mp W_{\pm}(k)}{k} &= 2ih_+(k)h_-(k) \\ &+ \frac{h_-(k)h'_+(k) - h'_-(k)h_+(k) \mp h_{\mp}(k)h'_{\pm}(-k) \pm h_{\pm}(-k)h'_{\mp}(k)}{k} \\ &= 2ih_+(k)h_-(k) \pm h_{\mp}(k) \frac{h'_{\pm}(k) - h'_{\pm}(-k)}{k} \mp h'_{\mp}(k) \frac{h_{\pm}(k) - h_{\pm}(-k)}{k}. \end{aligned}$$

Применяя (2.5), (4.5) и (4.6), получаем

$$\frac{W(k) \mp W_{\pm}(k)}{k} - 2i \in \mathcal{A}.$$

Как показано в теореме 2.1, в нерезонансном случае $W^{-1}(k) \in \mathcal{A}$. Поэтому

$$\frac{R_{\pm}(k) + 1}{k} = \frac{1}{W(k)} \frac{W(k) \mp W_{\mp}(k)}{k} \in \mathcal{A}. \quad (4.7)$$

Далее, функция $(1 - e^{\mp 2ikx})/(ik)$ является преобразованием Фурье характеристической функции интервала $[0, 2x]$, а значит,

$$\left\| \frac{1 - e^{\mp 2ikx}}{k} \right\|_{\mathcal{A}} \leq 2|x|. \quad (4.8)$$

Подставляя (4.5), (4.7) и (4.8) в (4.4), мы получим (4.3). Лемма доказана.

Так как оценка $\|T(k)h_{\pm}(x, k)\|_{\mathcal{A}} \leq C$ уже получена при доказательстве теоремы 1.1, то из леммы 4.1 следует, что

$$\|\widehat{\psi}_j^{\pm}(x, y, \cdot)\|_{L^1} \leq C(1 + |x|)(1 + |y|), \quad j = 1, 2. \quad (4.9)$$

Чтобы оценить $\|\widehat{\psi}_3^{\pm}(x, y, \cdot)\|_{L^1}$, нам потребуется еще одна лемма.

ЛЕММА 4.2. Пусть $V \in L_2^1$ и $W(0) \neq 0$. Тогда $\frac{\partial}{\partial k}(T(k)h_{\pm}(x, k)) \in \mathcal{A}$ и

$$\left\| \frac{\partial}{\partial k}(T(k)h_{\pm}(x, k)) \right\|_{\mathcal{A}} \leq C(1 + |x|), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из представления (2.1) и оценок (2.2), (2.3) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial k}h_{\pm}(x, k) = \dot{h}_{\pm}(x, k) \in \mathcal{A}, \quad \frac{\partial}{\partial k}h'_{\pm}(x, k) \in \mathcal{A}, \quad \text{если } V \in L_2^1, \quad (4.10)$$

при этом

$$\left\| \frac{\partial}{\partial k}h'_{\pm}(x, \cdot) \right\|_{\mathcal{A}} + \|\dot{h}_{\pm}(x, \cdot)\|_{\mathcal{A}} \leq C, \quad x \in \mathbb{R}_{\pm}. \quad (4.11)$$

Следовательно, $\frac{d}{dk}W_{\pm}(k) := \dot{W}_{\pm}(k) \in \mathcal{A}$. Далее, из (2.6) и (4.10) вытекает, что $\nu(k)\dot{W}(k) \in \mathcal{A}$, где $\nu(k)$ определено формулой (2.8). Так как в нерезонансном случае $(\nu(k)W(k))^{-1} \in \mathcal{A}_1$ и $W^{-1}(k) \in \mathcal{A}$, то

$$\dot{T}(k) = \frac{1}{W(k)}(2i - \dot{W}(k)T(k)) \in \mathcal{A}, \quad \dot{R}_{\pm}(k) \in \mathcal{A}. \quad (4.12)$$

Поэтому утверждение леммы при $x \in \mathbb{R}_{\pm}$ следует из (2.20), (4.12) и (4.11). Чтобы доказать его при $x \in \mathbb{R}_{\mp}$, мы применим (2.21), (4.11), (4.12) и получим

$$\frac{\partial}{\partial k}(T(k)h_{\pm}(x, k)) = e^{\mp 2ikx} \left(\frac{\partial}{\partial k}(R_{\mp}(k)h_{\mp}(x, k)) \mp 2ixR_{\mp}(k)h_{\mp}(x, k) \right) + \dot{h}_{\mp}(x, -k).$$

Лемма доказана.

Как было отмечено в доказательстве теоремы 1.1, при всех $x \in \mathbb{R}$ справедлива оценка $\|T(k)h_{\pm}(x, k)\|_{\mathcal{A}_1} \leq C$. Из этой оценки и леммы 4.2 следует, что

$$\|\widehat{\psi}_3^{\pm}(x, y, \cdot)\|_{L^1} \leq C(1 + |x|)(1 + |y|). \quad (4.13)$$

Наконец, объединяя (4.2), (4.9), (4.13) и лемму 3.1, получаем

$$|[\mathcal{K}_{\pm}(t)](x, y)| \leq Ct^{-3/2}(1 + |x|)(1 + |y|), \quad t \geq 1,$$

что доказывает (1.6) и завершает доказательство теоремы 1.2.

5. Уравнение Клейна–Гордона

В этом разделе мы докажем теорему 1.3, (i), т.е. асимптотику (1.10) для уравнения Клейна–Гордона (1.3). Мы оценим низкочастотную и высокочастотную компоненты решения отдельно. Утверждение (i) теоремы 1.3 следует непосредственно из двух нижеследующих теорем.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$ и ζ – произвольная гладкая функция с компактным носителем. Тогда

$$\|e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c\zeta(\mathbf{H}^2)\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} = \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty.$$

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$, и пусть гладкая функция $\xi(x)$ такова, что $\xi(x) = 0$ при $x \leq m^2 + 1$ и $\xi(x) = 1$ при $x \geq m^2 + 2$. Тогда

$$\|[e^{-it\mathbf{H}}]^{12}\xi(\mathbf{H}^2)\|_{H^{1/2,1} \rightarrow L^\infty} = \mathcal{O}(t^{-1/2}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Из теоремы 1.3, (i) немедленно вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $V \in L_1^1(\mathbb{R})$. Тогда при всех $p \in [2, \infty]$ справедлива асимптотика (1.12):

$$\|[e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\|_{B_{p',p'}^{1/2-3/p} \rightarrow L^p} = \mathcal{O}(t^{-1/2+1/p}), \quad t \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что уравнение Клейна–Гордона сохраняет энергию:

$$\|\dot{\psi}\|_{L^2}^2 + \langle \psi, H\psi \rangle_{L^2} + m^2\|\psi\|_{L^2}^2 = \text{const.}$$

Так как $[e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\pi_0$ соответствует начальным условиям $(\psi(0), \dot{\psi}(0)) = (0, \pi_0)$, где $\pi_0 = P_c(H)\pi_0$, то в этом случае мы получим $\langle \psi, H\psi \rangle_{L^2} + m^2\|\psi\|_{L^2}^2 \leq \|\pi_0\|_{L^2}^2$. Кроме того, при условии $V \in L^1$ оператор умножения на V как форма H_0 -ограничен с относительной гранью 0 (см. [23; лемма 9.33]) и нормы графиков операторов H и H_0 эквивалентны. Следовательно, $\|\psi\|_{H^1} \leq C\|\pi_0\|_{L^2}$. В силу дуальности мы также имеем

$$\|[e^{-it\mathbf{H}}\mathbf{P}_c]^{12}\|_{H^{-1} \rightarrow L^2} = \mathcal{O}(1), \quad t \rightarrow \infty, \quad H^{-1} = H^{-1,2}. \quad (5.2)$$

Так как $H^{-1} = B_{2,2}^{-1}$ (см. [24; теорема 2.3.2, (d)]), то вещественная интерполяция между (1.10) и (5.2) дает (5.1). Следствие доказано.

5.1. Убывание низкочастотной компоненты. Здесь мы докажем теорему 5.1. Нам потребуется некоторая модификация леммы ван дер Корпута, представляющая независимый интерес.

ЛЕММА 5.4. Пусть

$$I(t) = \int_a^b e^{it\phi(k)} f(k) dk,$$

где $\phi(k)$ – некоторая вещественнозначная функция. Если $\phi''(k) \neq 0$ на $[a, b]$ и $f \in \mathcal{A}_1$, то

$$|I(t)| \leq C_2 \left[t \min_{a \leq k \leq b} |\phi''(k)| \right]^{-1/2} \|f\|_{\mathcal{A}_1}, \quad t \geq 1,$$

где $C_2 \leq 2^{8/3}$ – оптимальная константа из леммы ван дер Корпута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $f(k) = c + \int_{\mathbb{R}} e^{iky} \widehat{g}(y) dy$, получаем

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(y) I_{y/t}(t) dy + c I_0(t), \quad I_v(t) = \int_a^b e^{it(\phi(k)+vk)} dk.$$

По лемме ван дер Корпута

$$|I_v(t)| \leq C_2 \left[t \min_{a \leq k \leq b} |\phi''(k)| \right]^{-1/2}, \quad t \geq 1,$$

где $C_2 \leq 2^{8/3}$ (см. [20]). Утверждение леммы следует теперь из определения $\mathcal{A}_1$ -нормы.

Отметим, что эта лемма обобщается на производные высших порядков и на бесконечные интервалы (в последнем случае интеграл следует понимать как несобственный интеграл Римана).

Резольвента $\mathbf{R}(\omega)$ оператора $\mathbf{H}$, определенного в (1.4), может быть выражена в терминах резольвенты оператора Шрёдингера $\mathcal{R}(\omega) = (H - \omega)^{-1}$ следующим образом:

$$\mathbf{R}(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega & i \\ -i\omega^2 & \omega \end{pmatrix} \mathcal{R}(\omega^2 - m^2).$$

Для ядра оператора $e^{-it\mathbf{H}} \mathbf{P}_c \zeta(\mathbf{H}^2)$ справедливо спектральное представление вида (3.1):

$$\begin{aligned} e^{-it\mathbf{H}} \mathbf{P}_c \zeta(\mathbf{H}^2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-it\omega} \zeta(\omega^2) (\mathbf{R}(\omega + i0) - \mathbf{R}(\omega - i0)) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-i\omega t} \zeta(\omega^2) \begin{pmatrix} \omega & i \\ -i\omega^2 & \omega \end{pmatrix} (\mathcal{R}((\omega + i0)^2 - m^2) \\ &\quad - \mathcal{R}((\omega - i0)^2 - m^2)) d\omega, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\Gamma = (-\infty, -m) \cup (m, \infty)$. Обозначим

$$\mathcal{M}_t(k) = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{k^2 + m^2}) & \frac{\sin(t\sqrt{k^2 + m^2})}{\sqrt{k^2 + m^2}} \\ -\sqrt{k^2 + m^2} \sin(t\sqrt{k^2 + m^2}) & \cos(t\sqrt{k^2 + m^2}) \end{pmatrix}.$$

Тогда (5.3) может быть переписано в виде

$$[e^{-it\mathbf{H}} \mathbf{P}_c \zeta(\mathbf{H}^2)](x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_t(k) e^{i|y-x|k} \zeta(k^2 + m^2) (\psi(x, y, k) + 1) dk, \quad (5.4)$$

где функция $\psi(x, y, k)$ определена в (2.18). Мы получили осцилляторный интеграл с фазовой функцией $\phi_{\pm}(k) = \pm\sqrt{k^2 + m^2} - vk$, где $v = |y - x|/t$. Для второй производной фазовой функции имеет место оценка

$$|\phi''_{\pm}(k)| = \frac{m^2}{\sqrt{(k^2 + m^2)^3}} \geq C(m, \zeta), \quad k^2 + m^2 \in \text{supp } \zeta.$$

Так как $(k^2 + m^2)^{j/2} \zeta(k^2 + m^2) \in \mathcal{A}$ при $j = -1, 0, 1$ и $\|\psi(x, y, k)\|_{\mathcal{A}} \leq C$ в силу (2.19), то из леммы 5.4 следует, что

$$\max_{x, y \in \mathbb{R}} | [e^{-it\mathbf{H}} \mathbf{P}_c \zeta(\mathbf{H}^2)](x, y) | \leq C t^{-1/2}, \quad t \geq 1.$$

5.2. Убывание высокочастотной компоненты. Здесь мы докажем теорему 5.2. Наше доказательство базируется на следующем варианте леммы 2 работы [15].

ЛЕММА 5.5. Пусть гладкая функция $\eta(k)$ удовлетворяет условию $|\eta^{(j)}(k)| \leq k^{-j}$ при $j = 0, 1$ и $k \geq 1$. Тогда для любых $g(k) \in \mathcal{A}_1$, $\alpha > 3/2$ и $t \geq 1$

$$\sup_{p \in \mathbb{R}} \left| \int_1^\infty \eta(k) \frac{e^{\pm it\sqrt{k^2+m^2}+ikp}}{k^\alpha} g(k) dk \right| \leq C \|g\|_{\mathcal{A}_1} t^{-1/2}. \quad (5.5)$$

Более того,

$$\sup_{p \in \mathbb{R}} \left| \int_1^\infty \eta(k) \frac{e^{\pm it\sqrt{k^2+m^2}+ikp}}{k^{3/2}} dk \right| \leq C t^{-1/2}. \quad (5.6)$$

Здесь константы C зависят только от параметров m и α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим “+”-случай и положим $v = -p/t$. Чтобы доказать (5.5), нам нужно оценить осцилляторный интеграл

$$I_\alpha(t) = \int_1^\infty k^{-\alpha} \eta(k) e^{it\phi(k)} g(k) dk$$

с фазовой функцией $\phi(k) = \sqrt{k^2 + m^2} - vk$. Разобьем интеграл на две части:

$$I_\alpha(t) = I_\alpha^1(t) + I_\alpha^2(t) = \int_1^t + \int_t^\infty.$$

Так как $\|g\|_\infty \leq \|g\|_{\mathcal{A}_1}$, то

$$|I_\alpha^2(t)| \leq \|g\|_{\mathcal{A}_1} \int_t^\infty k^{-\alpha} dk \leq C \|g\|_{\mathcal{A}_1} t^{1-\alpha}. \quad (5.7)$$

Оценим $I_\alpha^1(t)$. Обозначим

$$\Psi(k, t) = \int_1^k e^{it\phi(\tau)} g(\tau) d\tau.$$

Так как

$$\min_{1 \leq \tau \leq k} \phi''(\tau) = \phi''(k) = \frac{m^2}{(\sqrt{k^2 + m^2})^3} \geq \frac{C}{k^3},$$

то из леммы 5.4 следует, что

$$|\Psi(k, t)| \leq C \|g\|_{\mathcal{A}_1} t^{-1/2} k^{3/2}. \quad (5.8)$$

Интегрируя $I_\alpha^1(t)$ по частям, получим

$$|I_\alpha^1(t)| \leq |\Psi(t, t)| t^{-\alpha} + \int_1^t |\Psi(k, t)| |\Lambda(k)| dk,$$

где $\Lambda(k) = (k\eta'(k) - \alpha\eta(k))/k^{\alpha+1}$ — гладкая ограниченная функция и $\Lambda(k) = \mathcal{O}(k^{-\alpha-1})$ при $k \rightarrow \infty$. В силу (5.8)

$$|I_\alpha^1(t)| \leq C \|g\|_{\mathcal{A}_1} \left(t^{1-\alpha} + (1+\alpha) t^{-1/2} \int_1^t k^{1/2-\alpha} dk \right) \leq C \|g\|_{\mathcal{A}_1} t^{-1/2}.$$

Вместе с (5.7) это доказывает (5.5).

Вернемся теперь к (5.6). Так как (5.7) выполнено при $\alpha = 3/2$ и $g(k) = 1$, то требуемая оценка вытекает из леммы 7.1. Лемма доказана.

Чтобы доказать теорему 5.2, мы должны показать, что для любой гладкой функции f с компактным носителем справедлива оценка

$$\| [e^{-it\mathbf{H}}]^{12} \xi(\mathbf{H}^2) f \|_{L^\infty} \leq C t^{-1/2} \| f \|_{H^{1/2,1}}, \quad t \geq 1. \quad (5.9)$$

Ядро резольвенты оператора Шрёдингера с нулевым потенциалом имеет следующий вид (см. [23; § 7.4]):

$$[\mathcal{R}_0(k^2 \pm i0)](x, y) = \frac{\pm i e^{\pm i k |x-y|}}{2k}, \quad k > 0.$$

Подставляя второе резольвентное тождество $\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}_0(\lambda) - \mathcal{R}_0(\lambda) V \mathcal{R}(\lambda)$ в правый верхний элемент матрицы (5.4) и принимая во внимание, что $\xi(x) = 0$ при $x \leq m^2 + 1$, получим

$$[e^{-it\mathbf{H}}]^{12} \xi(\mathbf{H}^2) = \mathbf{K}_0(t) + \mathbf{K}_1(t),$$

где ядра операторов $\mathbf{K}_0(t)$ и $\mathbf{K}_1(t)$ имеют вид

$$[\mathbf{K}_0(t)](x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{|k| \geq 1} \xi(k^2 + m^2) \frac{\sin(t\sqrt{k^2 + m^2})}{\sqrt{k^2 + m^2}} e^{ik(x-y)} dk, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_1(t)](x, y) = & \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} V(z) \left(\int_{|k| \geq 1} \xi(k^2 + m^2) \right. \\ & \times \left. \frac{\sin(t\sqrt{k^2 + m^2})}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{e^{ik(|x-z|+|z-y|)}}{k} (\psi(y, z, k) + 1) dk \right) dz. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Заметим, что носитель производной $\xi'(x)$ лежит в интервале $[m^2 + 1, m^2 + 2]$. Следовательно, функция

$$\eta(k) := \frac{i}{4\pi} \xi(k^2 + m^2) \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}} \quad (5.12)$$

удовлетворяет условиям леммы 5.5. Применяя эту лемму с $\alpha = 2$, $g(k) = \psi(y, z, k) + 1$, $p = |x - z| + |z - y|$ и принимая во внимание (2.19), получим

$$\| \mathbf{K}_1(t) f \|_{L^\infty} \leq C t^{-1/2} \| f \|_{L^1} \leq C |t|^{-1/2} \| f \|_{H^{1/2,1}}, \quad t \geq 1, \quad (5.13)$$

так как $H^{1/2,1} \subset L^1$ в силу теоремы 6.2.3 из [3]. Остается получить оценку (5.9) для $\mathbf{K}_0(t)$.

ЛЕММА 5.6. Пусть $V \in L^1_1$. Тогда

$$\| \mathbf{K}_0(t) f \|_{L^\infty} \leq C |t|^{-1/2} \| f \|_{H^{1/2,1}}, \quad |t| \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (5.10) следует, что при каждом $f \in C^\infty_0$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}} [\mathbf{K}_0(t)](x, y) f(y) dy = \sum_{\mp} \int_{|k| \geq 1} \frac{\eta(k)}{k(1 + k^2)^{1/4}} e^{\pm t\sqrt{k^2 + m^2} + ikx} (1 + k^2)^{1/4} \widehat{f}(k) dk,$$

где $\eta(k)$ – функция из (5.12). Обозначим $g = \mathcal{J}_{1/2}f$. По определению (1.9)

$$\|g\|_{L^1} = \|f\|_{H^{1/2,1}}. \quad (5.14)$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{K}_0(t)f\|_{L^\infty} \leq C \int_{\mathbb{R}} |g(y)| \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \left| \int_1^\infty \eta(k) \frac{e^{\pm it\sqrt{k^2+m^2} + ik(x-y)}}{k^{3/2}} dk \right| dy,$$

что вместе с (5.14) и (5.6) обеспечивает требуемую оценку для $\mathbf{K}_0$. Лемма доказана.

Вместе с (5.13) лемма 5.6 влечет утверждение теоремы 5.2 и завершает доказательство утверждения (i) теоремы 1.3.

6. Уравнение Клейна–Гордона (нерезонансный случай)

В этом разделе мы предполагаем, что у оператора H , определенного в (1.4), нет резонанса на конце непрерывного спектра. Чтобы доказать теорему 1.3, (ii), оценим сначала низкочастотную компоненту решения. Используя представление (4.1), перепишем (5.4) в виде

$$\begin{aligned} [e^{-it\mathbf{H}\mathbf{P}_c}\zeta(\mathbf{H}^2)](x,y) &= \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \{\pm\}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\sigma_1}(k) e^{it\sqrt{k^2+m^2}} \\ &\quad \times e^{iy-x|k|} \zeta(k^2+m^2) \mathcal{T}_{\sigma_2}(x,y,k) dk, \end{aligned}$$

где

$$A_{\pm}(k) = \begin{pmatrix} 1 & \mp \frac{i}{\sqrt{k^2+m^2}} \\ \pm i\sqrt{k^2+m^2} & 1 \end{pmatrix}$$

и $\mathcal{T}_{\pm}(x,y,k) = |T(k)|^2 f_{\pm}(k) f_{\pm}(-k)$. Пусть $[e^{-it\mathbf{H}\mathbf{P}_c}\zeta(\mathbf{H}^2)]_{++}(x,y)$ обозначает слагаемое с A_+ и $\mathcal{T}_+$. Применяя к нему интегрирование по частям, находим, что

$$\begin{aligned} [e^{-it\mathbf{H}\mathbf{P}_c}\zeta(\mathbf{H}^2)]_{++}(x,y) &= -\frac{1}{2\pi it} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sqrt{k^2+m^2}} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial k} \left[e^{iy-x|k|} \zeta(k^2+m^2) \frac{\sqrt{k^2+m^2}}{k} A_+(k) \mathcal{T}_+(x,y,k) \right] dk. \end{aligned}$$

Используя аргументы из доказательства теоремы 1.2 (см. раздел 4), получаем

$$|[e^{-it\mathbf{H}\mathbf{P}_c}\zeta(\mathbf{H}^2)]_{++}(x,y)| \leq Ct^{-3/2}(1+|x|)(1+|y|), \quad t \geq 1.$$

Следовательно,

$$\|[e^{-it\mathbf{H}\mathbf{P}_c}]_{++}\zeta(\mathbf{H}^2)\|_{L_1^1 \rightarrow L_{-1}^\infty} = \mathcal{O}(|t|^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. В результате мы имеем

$$\|[e^{-it\mathbf{H}\mathbf{P}_c}]\zeta(\mathbf{H}^2)\|_{L_1^1 \rightarrow L_{-1}^\infty} = \mathcal{O}(t^{-3/2}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

Рассмотрим теперь высокочастотную компоненту решения. Обозначим

$$c(k, t) := \cos(t\sqrt{k^2 + m^2}), \quad \chi(k) := \xi(k^2 + m^2).$$

Применяя интегрирование по частям к (5.10) и (5.11), получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_0(t)](x, y) &= \frac{1}{2\pi t} \int_{|k| \geq 1} c(k, t) \frac{\partial}{\partial k} \frac{\chi(k) e^{ik(x-y)}}{k} dk, \\ [\mathbf{K}_1(t)](x, y) &= \frac{i}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}} V(z) \int_{|k| \geq 1} c(k, t) \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial k} \frac{\chi(k) e^{ik(|x-z|+|z-y|)} (1 + \psi(y, z, k))}{k^2} dk dz. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Согласно (4.9) и (4.13),

$$\left\| \frac{\partial}{\partial k} \psi(z, y, k) \right\|_{\mathcal{A}} \leq C(1 + |z|)(1 + |y|).$$

Кроме того, $|x - z| + |z - y| \leq (1 + |x|)(1 + |y|)(1 + 2|z|)$. Следовательно, $\mathcal{A}_1$ -норма производной по переменной k подынтегрального выражения во внутреннем интеграле (6.2) не превосходит $C(1 + |x|)(1 + |y|)(1 + |z|)$. Отметим также, что гладкая функция $\chi'(k)$ имеет компактный носитель. Применяя лемму 5.5 к внутреннему интегралу и принимая во внимание, что $|V(z)| \in L^1_1(\mathbb{R})$, получим

$$|[\mathbf{K}_1(t)](x, y)| \leq Ct^{-3/2}(1 + |x|)(1 + |y|), \quad t \geq 1. \quad (6.3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_0(t)](x, y) &= \frac{1}{2\pi t} \int_{|k| \geq 1} c(k, t) \chi'(k) k^{-1} e^{ik(x-y)} dk \\ &\quad - \frac{1}{2\pi t} \int_{|k| \geq 1} c(k, t) \chi(k) e^{ik(x-y)} k^{-2} dk \\ &\quad + \frac{i}{2\pi t} \int_{|k| \geq 1} (x - y) c(k, t) \chi(k) e^{ik(x-y)} k^{-1} dk \\ &= [\mathbf{K}_{01}(t)](x, y) + [\mathbf{K}_{02}(t)](x, y) + [\mathbf{K}_{03}(t)](x, y). \end{aligned}$$

Применение леммы 5.5 к $\mathbf{K}_{01}$ и $\mathbf{K}_{02}$ дает

$$\|\mathbf{K}_{0j}(t)f\|_{L^\infty} \leq Ct^{-3/2}\|f\|_{L^1}, \quad j = 1, 2, \quad t \geq 1. \quad (6.4)$$

Осталось оценить $\mathbf{K}_{03}$. Обозначим $g = \mathcal{J}_{1/2}f$. Тогда $\widehat{f}(k) = (1 + k^2)^{-1/4}\widehat{g}(k)$. Так как $\mathcal{F}[f(\cdot)] = \widehat{f}'$ и $\widehat{f}'(k) = (1 + k^2)^{-1/4}\widehat{g}'(k) - (k/2)(1 + k^2)^{-5/4}\widehat{g}(k)$, то

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} [\mathbf{K}_{03}(t)](x, y) f(y) dy \\ &= \frac{ix}{4\pi t} \sum_{\pm} \int_{|k| \geq 1} \frac{\chi(k)}{k(1 + k^2)^{1/4}} e^{\pm t\sqrt{k^2 + m^2} + ikx} (1 + k^2)^{1/4} \widehat{f}(k) dk \\ &\quad + \frac{i}{4\pi t} \sum_{\pm} \int_{|k| \geq 1} \frac{\chi(k)}{k(1 + k^2)^{1/4}} e^{\pm t\sqrt{k^2 + m^2} + ikx} \widehat{g}'(k) dk \\ &\quad - \frac{i}{8\pi t} \sum_{\pm} \int_{|k| \geq 1} \frac{\chi(k)}{(1 + k^2)^{5/4}} e^{\pm t\sqrt{k^2 + m^2} + ikx} \widehat{g}(k) dk. \end{aligned}$$

Применяя те же аргументы, что при доказательстве леммы 5.6, получим

$$\begin{aligned} \|(1 + |\cdot|)^{-1} \mathbf{K}_{03}(t)f\|_{L^\infty} &\leq Ct^{-3/2}(\|g\|_{L^1} + \||\cdot| \cdot g\|_{L^1}) \\ &\leq Ct^{-3/2}(\|f\|_{H^{1/2,1}} + \|f\|_{H_1^{1/2,1}}). \end{aligned}$$

Из этой оценки и оценки (6.4) следует, что

$$\|\mathbf{K}_0(t)\|_{H_1^{1/2,1} \rightarrow L_{-1}^\infty} \leq Ct^{-3/2}.$$

Вместе с (6.3) это означает, что

$$\| [e^{-it\mathbf{H}}]^{12} \xi(\mathbf{H}^2)f \|_{L_{-1}^\infty} \leq C|t|^{-3/2} \|f\|_{H_1^{1/2,1}}.$$

Эта оценка вместе с (6.1) завершает доказательство утверждения (ii) теоремы 1.3. Теорема 1.3 полностью доказана.

7. Приложение. Оценка убывания

Следующая лемма является адаптированной версией леммы 2 из [15]. Ее доказательство можно найти в [3; лемма 6.7]), но мы приведем его для полноты изложения.

ЛЕММА 7.1 [3], [15]. Пусть гладкая функция $\Lambda(k)$, определенная при $k \geq 0$, удовлетворяет условию $\Lambda(k) = \mathcal{O}(k^{-5/2})$, $k \rightarrow \infty$, и пусть

$$\Psi(k, t) := \int_0^k e^{it\phi(\tau)} d\tau, \quad t \geq 1, \quad k \geq 0,$$

где $\phi(\tau) = \sqrt{\tau^2 + 1} + v\tau$ с некоторым $v \in \mathbb{R}$. Тогда справедлива следующая равномерная по v оценка:

$$J(t) := \int_1^t |\Psi(k, t)\Lambda(k)| dk \leq Ct^{-1/2}. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости изложения будем ссылаться на леммы ван дер Корпута для первой и второй производной как на леммы vdC-1 и vdC-2 соответственно (см. [20; следствие 5 и лемма 7]). Прежде всего заметим, что для второй производной фазовой функции $\phi(\tau)$ справедлива оценка

$$\min_{0 \leq \tau \leq k} \phi''(\tau) = \min_{0 \leq \tau \leq k} (1 + \tau^2)^{-3/2} = (1 + k^2)^{-3/2}. \quad (7.2)$$

Следовательно, из леммы vdC-2 вытекает, что

$$|\Psi(k, t)| \leq Ct^{-1/2}(k+1)^{3/2}, \quad k \geq 0, \quad t \geq 1. \quad (7.3)$$

Первая производная фазовой функции монотонно возрастает и оценивается снизу следующим образом:

$$|\phi'(\tau)| \geq \begin{cases} 2^{-1/2}, & v \geq 0, \tau \geq 1, \\ \frac{1}{2(\tau^2 + 1)}, & v \leq -1, \tau \geq 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Кроме того, при $v \in (-1, 0)$ функция ϕ' обращается в нуль в точке $\tau_0 = -v(1 - v^2)^{-1/2}$. Рассмотрим отдельно три случая: $v \geq 0$, $v \leq -1$ и $v \in (-1, 0)$.

При $v \geq 0$ и $k \geq 1$ из леммы vdC-1 и оценки (7.4) следует, что

$$|\Psi(k, t) - \Psi(1, t)| \leq Ct^{-1}.$$

Так как $|\Psi(1, t)| \leq Ct^{-1/2}$ в силу (7.3), то мы получаем отсюда (7.1) при $v \geq 0$. Аналогично, при $v \leq -1$ из (7.4) и (7.3) следует, что

$$|\Psi(k, t)| \leq Ck^2t^{-1} + |\Psi(1, t)| \leq C(k^2t^{-1} + t^{-1/2}), \quad k \geq 1. \quad (7.5)$$

Поэтому (7.1) выполняется также и в этом случае.

Осталось рассмотреть случай $v \in (-1, 0)$, что эквивалентно $\tau_0 \in (0, \infty)$. В частности, мы будем оценивать $J(t)$ в терминах τ_0 , а не v . Из монотонности ϕ' и равенства (7.2) следует, что при всех $\tau \in (0, \tau_0/2]$ справедлива оценка

$$|\phi'(\tau)| = \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 + 1}} - \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}} \geq \phi'(2\tau) - \phi'(\tau) \geq \phi''(2\tau)\tau \geq \frac{C}{\tau^2}.$$

Поэтому при $\tau_0/2 \geq 1$ аналогично (7.5) получаем

$$|\Psi(k, t)| \leq C(k^2t^{-1} + t^{-1/2}), \quad 1 \leq k \leq \frac{\tau_0}{2}. \quad (7.6)$$

Кроме того, при всех $\tau \geq 2\tau_0$

$$\phi'(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + 1}} - \frac{\tau_0}{\sqrt{\tau_0^2 + 1}} \geq \phi'(\tau) - \phi'\left(\frac{\tau}{2}\right) \geq \frac{1}{2}\phi''(\tau)\tau \geq \frac{C}{\tau^2}.$$

Следовательно,

$$|\Psi(k, t)| \leq C(k^2t^{-1} + t^{-1/2}), \quad \max\{1, 2\tau_0\} \leq k. \quad (7.7)$$

Далее, из (7.3) следует, что

$$\int_{\tau_0/2}^{2\tau_0} |\Psi(k)\Lambda(k)| dk \leq Ct^{-1/2}, \quad (7.8)$$

так как $\int_{y/2}^{2y} k^{-1} dk$ не зависит от $y > 0$. Аналогично доказывается, что $J(t) - J(t/4) \leq Ct^{-1/2}$. Кроме того, в случае $4 \leq t \leq 2\tau_0$ из (7.6) следует, что $J(t/4) \leq Ct^{-1/2}$, и мы имеем (7.1) для $4 \leq t \leq 2\tau_0$. Заметим, что в случае $1 \leq t \leq 4$ оценка (7.1) справедлива при всех $\tau_0 \in (0, \infty)$.

Далее рассмотрим случай $1 \leq 2\tau_0 \leq t$. Если, кроме того, $\tau_0/2 \leq 1$, то

$$J(t) \leq \int_{\tau_0/2}^{2\tau_0} |\Psi(k)\Lambda(k)| dk + \int_{2\tau_0}^t |\Psi(k)\Lambda(k)| dk \leq Ct^{-1/2}$$

в силу (7.8) и (7.7). Если же $1 \leq \tau_0/2 \leq 2\tau_0 \leq t$, то

$$J(t) \leq \int_1^{\tau_0/2} |\Psi(k)\Lambda(k)| dk + \int_{\tau_0/2}^{2\tau_0} |\Psi(k)\Lambda(k)| dk + \int_{2\tau_0}^t |\Psi(k)\Lambda(k)| dk \leq Ct^{-1/2}$$

в силу (7.6), (7.8) и (7.7). Наконец, в случае $2\tau_0 \leq 1$ оценка (7.1) следует из (7.7). Лемма доказана.

Мы благодарим А. И. Комеча за полезные замечания. Первый автор выражает искреннюю признательность за гостеприимство факультету математики Университета Вены.

Список литературы

- [1] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980, 264 с.; пер. с англ.: J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren Math. Wiss., **223**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, x+207 pp.
- [2] V. S. Buslaev, C. Sulem, “On asymptotic stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **20**:3 (2003), 419–475.
- [3] S. Cuccagna, “On dispersion for Klein Gordon equation with periodic potential in 1D”, *Hokkaido Math. J.*, **37**:4 (2008), 627–645.
- [4] P. D’Ancona, L. Fanelli, “ L^p -boundedness of the wave operator for the one dimensional Schrödinger operator”, *Comm. Math. Phys.*, **268**:2 (2006), 415–438.
- [5] P. Deift, E. Trubowitz, “Inverse scattering on the line”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **32**:2 (1979), 121–251.
- [6] I. Egorova, E. A. Kopylova, G. Teschl, “Dispersion estimates for one-dimensional discrete Schrödinger and wave equations”, *J. Spectr. Theory*, **5**:4 (2015), 663–696.
- [7] M. Goldberg, “Transport in the one-dimensional Schrödinger equation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:10 (2007), 3171–3179.
- [8] M. Goldberg, W. Schlag, “Dispersive estimates for Schrödinger operators in dimensions one and three”, *Comm. Math. Phys.*, **251**:1 (2004), 157–178.
- [9] И. М. Гусейнов, “О непрерывности коэффициента отражения одномерного уравнения Шредингера”, *Дифференц. уравнения*, **21**:11 (1985), 1993–1995.
- [10] M. Keel, T. Tao, “Endpoint Strichartz estimates”, *Amer. J. Math.*, **120**:5 (1998), 955–980.
- [11] A. I. Komech, E. A. Kopylova, “Weighted energy decay for 1D Klein–Gordon equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **35**:2 (2010), 353–374.
- [12] Е. А. Копылова, “Дисперсионные оценки для уравнений Шредингера и Клейна–Гордона”, *УМН*, **65**:1(391) (2010), 97–144; англ. пер.: E. A. Kopylova, “Dispersive estimates for the Schrödinger and Klein–Gordon equations”, *Russian Math. Surveys*, **65**:1 (2010), 95–142.
- [13] E. Kopylova, A. I. Komech, “On asymptotic stability of kink for relativistic Ginzburg–Landau equation”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **202**:1 (2011), 213–245.
- [14] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 331 с.; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, rev. ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011, xiv+396 pp.
- [15] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, “ $L^p - L^q$ estimates for the Klein–Gordon equation”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **59**:4 (1980), 417–440.
- [16] M. Meyries, M. Veraar, “Sharp embedding results for spaces of smooth functions with power weights”, *Studia Math.*, **208**:3 (2012), 257–293.
- [17] H. Mizutani, “Dispersive estimates and asymptotic expansions for Schrödinger equations in dimension one”, *J. Math. Soc. Japan*, **63**:1 (2011), 239–261.
- [18] M. Murata, “Asymptotic expansions in time for solutions of Schrödinger-type equations”, *J. Funct. Anal.*, **49**:1 (1982), 10–56.
- [19] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, Ch. W. Clark (eds.), *NIST handbook of mathematical functions*, Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, DC; Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, xvi+951 pp.

- [20] K. M. Rogers, “Sharp van der Corput estimates and minimal divided differences”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:12 (2005), 3543–3550.
- [21] W. Schlag, “Dispersive estimates for Schrödinger operators: a survey”, *Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations*, Ann. of Math. Stud., **163**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007, 255–285.
- [22] A. Soffer, M. I. Weinstein, “Resonances, radiation damping and instability in Hamiltonian nonlinear wave equations”, *Invent. Math.*, **136**:1 (1999), 9–74.
- [23] G. Teschl, *Mathematical methods in quantum mechanics. With applications to Schrödinger operators*, 2nd ed., Grad. Stud. Math., **157**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, xiv+358 pp.
- [24] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980, 664 с.; пер. с англ.: Н. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Math. Library, **18**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1978, 528 pp.; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978, 528 pp.
- [25] R. Weder, “ $L^p - L^{\dot{p}}$ estimates for the Schrödinger equation on the line and inverse scattering for the nonlinear Schrödinger equation with a potential”, *J. Funct. Anal.*, **170**:1 (2000), 37–68.
- [26] R. Weder, “Inverse scattering on the line for the nonlinear Klein–Gordon equation with a potential”, *J. Math. Anal. Appl.*, **252**:1 (2000), 102–123.
- [27] R. Weder, “The $L^p - L^{p'}$ estimate for the Schrödinger equation on the half-line”, *J. Math. Anal. Appl.*, **281**:1 (2003), 233–243.
- [28] N. Wiener, “Tauberian theorems”, *Ann. of Math.* (2), **33**:1 (1932), 1–100.
- [29] K. Yajima, “The $W^{k,p}$ -continuity of wave operators for Schrödinger operators”, *J. Math. Soc. Japan*, **47**:3 (1995), 551–581.

Ирина Евгеньевна Егорова
(Irina E. Egorova)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: iraegorova@gmail.com

Поступила в редакцию
21.12.2015

Елена Андреевна Копылова
(Elena A. Kopylova)

University of Vienna, Vienna, Austria;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: Elena.Kopylova@univie.ac.at

Владимир Александрович Марченко
(Vladimir A. Marchenko)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина
E-mail: marchenko@ilt.kharkov.ua

Геральд Тешль
(Gerald Teschl)

University of Vienna, Vienna, Austria;
International Erwin Schrödinger Institute for
Mathematical Physics, Vienna, Austria
E-mail: Gerald.Teschl@univie.ac.at