Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Х. Касымов, Рекурсивно отделимые нумерованные алгебры, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 145–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm971>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 18:31:49

УДК 510.6+512.57+519.68

РЕКУРСИВНО ОТДЕЛИМЫЕ НУМЕРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ

Н. Х. КАСЫМОВ

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	145
§ 1 . Введение	147
1.1. Эквивалентности	147
1.2. Нумерованные алгебры	148
1.3. Спецификации абстрактных структур данных	149
§ 2 . Негативные аппроксимации	151
2.1. Критерий рекурсивной отделимости	151
2.2. Конечно порожденные алгебры	152
2.3. Негативные алгебры	153
§ 3 . Топологические аспекты	156
3.1. Рекурсивно отделимые нумерации	156
3.2. Отделимые нумерации	157
§ 4 . Равномерность	159
4.1. Эквивалентности	160
4.2. Алгебры	162
§ 5 . Спецификации	164
5.1. Алгебраические спецификации	164
5.2. Универсальные спецификации	166
5.3. Рекурсивные конгруэнции	167
§ 6 . Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций	170
6.1. Нётеровость	170
6.2. Общий случай	172
§ 7 . Некоторые вопросы	174
Список литературы	175

Предисловие

Введенное А. И. Мальцевым в обзорной статье [24] понятие нумерованной алгебры — одно из центральных понятий, возникших на стыке универсальной алгебры и теории нумераций. В силу чрезвычайной общности класса всех нумерованных алгебр

изучение последних обычно проводится в предположении наличия ограничений на алгоритмические сложности нумерационных эквивалентностей. В этом аспекте, в первую очередь, нужно отметить конструктивные и, в более общем случае, позитивные алгебры, теория которых представляет собой бурно развивающийся раздел современной математической логики (Ю. Л. Ершов [5], С. С. Гончаров [3]). Проблемы существования и числа конструктивизаций стали уже классическими (Ю. Л. Ершов [5], С. С. Гончаров [1]), а ослабление требований к алгоритмической сложности нумерационных эквивалентностей является одним из общепринятых способов расширения исследуемого класса нумерованных алгебр (Н. Г. Хисамиев [35], [36], С. П. Одинцов и В. Л. Селиванов [31]).

Другой путь ограничения исследуемого класса нумерованных алгебр, который, в отличие от предыдущего, игнорирует сложность нумерационной эквивалентности, заключается в наложении эффективных условий типа отделимости. Идеи использования понятия отделимости в теории нумераций восходят к В. А. Успенскому [32], [33] и А. Нероуду [48] и развиваются в работах А. И. Мальцева [25], [26] и Ю. Л. Ершова [4]. Классическим условием отделимости в теории алгоритмов является рекурсивная отделимость. Синтез понятий универсальной алгебры и рекурсивно отделимой нумерации образует понятие рекурсивно отделимой нумерованной алгебры. Многие естественные и важные типы нумерованных алгебр оказались рекурсивно отделимыми, в том числе — среди неочевидных — негативные алгебры, позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций, стандартно нумерованные конечно порожденные и финитно аппроксимируемые алгебры. Негативные нумерации и негативные алгебры с различных точек зрения исследовались А. И. Мальцевым [27], Ю. Л. Ершовым [4], А. С. Морозовым [30], Н. Г. Хисамиевым [35], [36], С. П. Одинцовым и В. Л. Селивановым [31]. Результаты о позитивных алгебрах со счетными решетками конгруэнций можно найти у А. И. Мальцева [24], Ю. Л. Ершова [5], А. В. Кузнецова [20], В. Баура [38]. Проблематика изучения стандартно нумерованных конечно порожденных алгебр заложена А. И. Мальцевым в [24] и дополнительно обосновывается В. А. Успенским и А. Л. Семеновым в [34], а классические образцы использования финитной аппроксимируемости для решения алгоритмических задач алгебры представлены у А. И. Мальцева в [23], [24] и Д. Мак-Кинси в [47].

В различных по методам доказательства и звучанию результатах о нумерованных алгебрах из упомянутых выше классов имеется немало принципиальных общих моментов, причем справедливость некоторых весьма сильных свойств оказалась не зависящей от сложности нумерационной эквивалентности. Эти факты становятся прозрачными именно при обобщенном взгляде на ситуацию — с точки зрения теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр. На базе и в рамках этой теории решается ряд естественных вопросов, возникших в связи с работами А. И. Мальцева [24], В. Баура [38], Д. Бергстры и Д. Такера [40], С. Камина [43] в теории конструктивных алгебр и в теории абстрактных типов данных.

Целью настоящего обзора является изложение основ теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр и демонстрация некоторых приложений этой теории.

Автор выражает глубокую благодарность С. С. Гончарову за постоянное внимание и всестороннюю поддержку при работе над настоящим обзором.

§ 1. Введение

В терминологии и обозначениях будем следовать в основном книгам [3]–[5] и статье [24].

1.1. Эквивалентности. Пусть η – эквивалентность на множестве натуральных чисел ω . Множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η -замкнутым, если α вместе с каждым числом содержит и все ему η -эквивалентные, т.е.

$$x \in \alpha \ \& \ x = y \pmod{\eta} \rightarrow y \in \alpha.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эквивалентность η называется *рекурсивно отделимой*, если всякая пара различных смежных классов этой эквивалентности отделяется подходящим η -замкнутым рекурсивным множеством.

Далее, для краткости, рекурсивно отделимые эквивалентности часто будем называть *r -эквивалентностями*. Тривиальными примерами r -эквивалентностей являются эквивалентности с рекурсивными смежными классами. Пусть $\alpha \subseteq \omega$. В [4] определены следующие эквивалентности:

- 1) $\eta^\alpha = \{\langle 2x, 2x+1 \rangle \mid x \in \alpha\} \cup \{\langle 2x+1, 2x \rangle \mid x \in \alpha\} \cup \text{id } \omega$;
- 2) $\eta_\alpha = \alpha^2 \cup \text{id } \omega$;
- 3) $\eta_\alpha^* = \{\langle x, y \rangle \mid \gamma_x \setminus \alpha = \gamma_y \setminus \alpha\}$,

где γ – каноническая нумерация конечных множеств. Очевидно, что η^α и η_α суть r -эквивалентности, причем каждый η^α -класс не более чем двухэлементен, а η_α – простейший пример r -эквивалентности с единственным нерекурсивным смежным классом α , если α нерекурсивно. Нетрудно убедиться в том, что η_α^* также является r -эквивалентностью, причем ни один η_α^* -класс нерекурсивен, коль скоро нерекурсивно α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эквивалентность называется *эффективно бесконечной*, если в нее эффективно вложима диагональ натурального ряда.

Неформально это означает существование эффективной процедуры, перечисляющей бесконечное множество попарно неэквивалентных чисел. Если η – эквивалентность на ω , то через $\text{tr}(\eta)$ обозначим множество $\{x \mid x = y \pmod{\eta} \rightarrow x \leq y\}$, которое далее будем называть характеристической трансверсалью эквивалентности η . Неэффективно бесконечной будем называть эквивалентность, обладающую бесконечной характеристической трансверсалью и не являющуюся эффективно бесконечной. Отметим, что для произвольной эквивалентности η на ω гипериммунность $\text{tr}(\eta)$ влечет неэффективную бесконечность η , которая, в свою очередь, достаточна для иммунности $\text{tr}(\eta)$. Обратные импликации не имеют места. Иммунными характеристическими трансверсальями обладают многие важные типы эквивалентностей, причем не только в классе r -эквивалентностей. Например, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если η – предполная эквивалентность, то $\text{tr}(\eta)$ либо конечна, либо иммунна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если α – бесконечное рекурсивное подмножество $\text{tr}(\eta)$, то рекурсивная функция g , определенная инструкцией $g(x) = \min\{y \mid y \in \alpha \ \& \ y > x\}$, не имеет неподвижной точки по модулю η , что невозможно.

Если же η не только предполная, но и позитивная, то она эффективно бесконечна, поскольку каждый η -класс креативен.

Из $\{2x \mid x \in \omega\} \subseteq \text{tr}(\eta^\alpha)$ следует, что η^α не имеет иммунной характеристической трансверсали ни для какого $\alpha \subseteq \omega$. Если $\omega \setminus \alpha$ иммунно, но не гипериммунно, то η_α не эффективно бесконечна, а η_α^* — эффективно бесконечная эквивалентность с иммунной характеристической трансверсалью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Неединичная эквивалентность η называется квазисовершенной, если никакая пара различных смежных классов этой эквивалентности не отделяется никаким η -замкнутым рекурсивным множеством.

Позитивная квазисовершенная эквивалентность называется совершенной [4].

1.2. Нумерованные алгебры. Нумерованной алгеброй называется пара (A, ν) , где A — универсальная алгебра не более чем счетной сигнатуры Σ , а ν — отображение ω на A со следующим свойством:

если F — n -местная Σ -операция, действующая на A , то существует такая n -местная рекурсивная функция f , что

$$F(\nu x_1, \dots, \nu x_n) = \nu f(x_1, \dots, x_n),$$

причем существует алгоритм, который по имени каждой F “выдает” процедуру вычисления соответствующей f .

Мы будем рассматривать гомоморфизмы нумерованных алгебр, одновременно являющиеся морфизмами соответствующих нумерованных множеств, т.е. если (A, μ) , (B, ν) — две нумерованные алгебры и $\varphi: A \rightarrow B$ есть гомоморфизм, то дополнительно требуется существование такой рекурсивной функции g , что $\varphi\nu = \mu g$. Для естественных гомоморфизмов нумерованных алгебр на их фактор-алгебры ситуация упрощается в следующем смысле. Если (A, ν) — нумерованная алгебра, θ — конгруэнция алгебры A и $\bar{\theta}: A \rightarrow A/\theta$ — естественное наложение, то ν индуцирует естественную нумерацию $\nu^* = \bar{\theta}\nu$ алгебры A/θ . При этом $\bar{\theta}\nu = \nu^*i$, где i — тождественная функция на ω . Для заданной нумерации ν алгебры A конгруэнцию θ этой алгебры будем называть ν -рекурсивной (ν -позитивной, ν -негативной), если рекурсивным (рекурсивно перечислимым, дополнением рекурсивно перечислимого множества) является множество $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y \pmod{\theta}\}$. В тех случаях, когда из контекста ясно, о какой нумерации ν идет речь, конгруэнцию будем называть просто рекурсивной (позитивной, негативной), без приставки ν .

Нумерация ν алгебры A называется конструктивизацией (позитивной, негативной), если ν -рекурсивной (ν -позитивной, ν -негативной) является нулевая конгруэнция этой алгебры. Алгебру, обладающую конструктивизацией (позитивной нумерацией, негативной нумерацией) будем называть конструктивизируемой (позитивно представимой, негативно представимой). Отдавая дань исторически сложившимся традициям, мы будем отождествлять понятия конструктивизации, конструктивной нумерации и рекурсивной нумерации.

Пусть η — эквивалентность на ω . Алгебру A будем называть определимой над η (или η -алгеброй), если существует такое вычислимое семейство F рекурсивных функций, согласованных с эквивалентностью η , что A изоморфна фактор-алгебре $(\omega/\eta; F)$

рекурсивной алгебры $(\omega; F)$. Это определение равносильно существованию нумерации алгебры A с нумерационной эквивалентностью в качестве η . Такой подход, являющийся в некотором смысле двойственным к понятию нумерованной алгебры, ближе по духу к теории нумераций, чем собственно к теории нумерованных алгебр, поскольку при этом подходе “первичным” понятием оказывается не алгебра, а эквивалентность (точнее каноническая нумерация, индуцированная этой эквивалентностью). В рамках такого подхода оказалось более удобным формулировать и решать целый ряд задач. Поскольку всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет некоторую нумерацию (например, индуцированную гёделевской нумерацией, подходящей абсолютно свободной алгебре термов), то всякая такая алгебра определима над подходящей эквивалентностью η . Уместно заметить, что рекурсивные алгебры вида $(\omega; F)$ играют в теории нумерованных алгебр роль “абсолютно свободных”, так как образуют тот исходный материал, из которого строятся все нумерованные алгебры путем подходящих факторизаций. Естественен вопрос о соотношениях между эффективными свойствами эквивалентности η и строением любой η -алгебры. Приведем два примера.

УТВЕРЖДЕНИЕ [6]. *Если η – произвольная эквивалентность с гипериммунной характеристической трансверсалью, то всякая η -алгебра конечной сигнатуры локально конечна.*

Обозначим через K_η абстрактный класс всех η -алгебр и определим множество $D = \{K_\eta \mid \text{tr}(\eta) \text{ бесконечна}\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ [18]. *$B(D; \subseteq)$ существует наименьший элемент.*

Неформально это означает следующее. Всякая эквивалентность согласована с функциями константами и проектирующими функциями. Существует такая эквивалентность η_0 , что $\text{tr}(\eta_0)$ бесконечна и всякая рекурсивная функция, согласованная с η_0 , действует на классах η_0 -эквивалентности либо как константа, либо как проектирующая. Более того, η_0 не просто существует, но даже позитивна (см. [4, с. 296]). Другие факты, касающиеся уже непосредственно r -эквивалентностей, будут приведены в основном тексте.

Пусть (A, ν) – нумерованная алгебра и $\eta(\nu)$ – ее нумерационная эквивалентность. Назовем (A, ν) рекурсивно отделимой нумерованной алгеброй (эффективно бесконечной, неэффективно бесконечной), если $\eta(\nu)$ есть r -эквивалентность ($\eta(\nu)$ эффективно бесконечна, $\eta(\nu)$ неэффективно бесконечна). Характеристической трансверсалью нумерованной алгебры (A, ν) (в обозначениях $\text{tr}(\nu)$) будем называть характеристическую трансверсаль ее нумерационной эквивалентности. Далее, так же, как и в случае эквивалентностей, рекурсивно отделимые нумерованные алгебры часто будут называться для краткости r -нумерованными, а соответствующие нумерации – r -нумерациями. Наконец, нумерованная алгебра с квазисовершенной нумерационной эквивалентностью называется квазисовершенной. С алгоритмической точки зрения, квазисовершенные алгебры являются “антиподами” r -нумерованных.

1.3. Спецификации абстрактных структур данных. Под абстрактной структурой данных обычно понимается многосортная алгебра конечной сигнатуры, порожденная значениями сигнатурных констант [40], [43], однако требования эффективной реализуемости, подразумевающие возможность эффективного задания как но-

сителя структуры данных, так и определенных на ней операций, вынуждает рассматривать в качестве абстрактных структур данных лишь те, которые допускают эффективные представления. Мы принимаем тезис о позитивной представимости любой абстрактной структуры данных [2], [40], [43]. Многосортность сигнатуры позволяет типизировать данные, а конечная порожденность – индуктивно строить имена объектов (термы) из конечного базисного множества имен. Известно, что существуют позитивно представимые алгебры (даже с рекурсивно отделимыми классами), всякие позитивно представимые обогащения которых локально конечны [6], [8]. Поскольку такие алгебры трудно мыслить как структуры данных, то внесение свойства конечной порожденности в определение абстрактной структуры данных получает дополнительное к [40], [43] обоснование. Единственное, чем можно пожертвовать в определении абстрактной структуры данных без особого ущерба для этого понятия, – свойство порожденности константами, поскольку всякая конечно порожденная позитивная алгебра, очевидным образом, обогащается до позитивной алгебры, конечно порожденной константами. Однако соглашение о порожденности константами удобно с практической точки зрения.

Пусть A – произвольная абстрактная структура данных и S – множество предложений в языке многосортной логики первого порядка. Говорят, что S является алгебраической спецификацией для A , если A инициальна в классе всех S -моделей. С точки зрения эффективности необходимо требовать от S как минимум рекурсивной перечислимости. Очевидно, что позитивная диаграмма произвольной абстрактной структуры данных является ее рекурсивно перечислимой алгебраической спецификацией. Особо важный тип спецификаций образуют конечные алгебраические спецификации, задаваемые в языке тождеств и квазитожеств [2], [22], [40], [42], однако многие, в том числе простейшие, абстрактные структуры данных, возникающие на практике, не имеют таких спецификаций [28], [44], [46]. Это обстоятельство приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Абстрактная структура данных A называется *алгебраически специфицируемой* тождествами (квазитожествами, позитивными предложениями и т.п.), если существуют такое обогащение A^* структуры A и такое конечное множество S тождеств (квазитожеств, позитивных предложений и т.п.) в языке этого обогащения, что A^* инициальна в классе всех S -алгебр.

Это определение обобщает ряд определений из [40], [43].

Очевидно, что необходимым условием алгебраической специфицируемости абстрактной структуры данных является ее позитивная представимость. В [40] доказано, что всякая конструктивизируемая абстрактная структура данных алгебраически специфицируется тождествами. Простейшим примером неконструктивизируемой абстрактной структуры данных, алгебраически специфицируемой тождествами, является конечно-определенная полугруппа (обогащенная константами для порождающих) с неразрешимой проблемой равенства. Для ответов на вопросы об алгебраической специфицируемости произвольной абстрактной структуры данных в том или ином языке оказалось целесообразным привлечь методы и понятия теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр.

§ 2. Негативные аппроксимации

2.1. Критерий рекурсивной делимости. Пусть A – произвольная алгебра, $B, A \setminus B$ – разбиение основного множества алгебры A на две непересекающиеся части. Тогда в множестве конгруэнций не “склеивающих” никакой элемент множества B ни с каким элементом множества $A \setminus B$ существует наибольшая конгруэнция θ . Если ν – такая нумерация алгебры A , что $\nu^{-1}B$ рекурсивно, то θ является ν -негативной. Это следует из того, что для любых x, y ($\nu x \neq \nu y \pmod{\theta}$) найдется такая трансляция t [21], что $t(\nu x) \in B, t(\nu y) \notin B$, а также из рекурсивной перечислимости множества рекурсивных функций, представляющих трансляции алгебры A в нумерации ν .

А. И. Мальцев в работе [27] заметил, что всякая негативная эквивалентность η имеет рекурсивно отделимые классы, однако отделяющие множества, предлагающиеся в этой работе, вообще говоря, не являются η -замкнутыми. Оказалось, что отделять любую пару различных смежных классов негативной эквивалентности подходящим рекурсивным множеством можно корректно, т.е. отделяющее множество можно выбирать замкнутым относительно этой эквивалентности. Более того, как будет показано далее, процедуры разрешения отделяющих множеств равномерно зависят от представителей смежных классов. Из сказанного выше вытекает следующая характеристика r -нумерованных алгебр.

ТЕОРЕМА 2.1 [11]. *Нумерованная алгебра рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными алгебрами.*

В формулировке этой теоремы аппроксимируемость негативными алгебрами нельзя заменить аппроксимируемостью рекурсивными алгебрами. Для эквивалентностей возможность такой замены очевидна: произвольная эквивалентность на ω является r -эквивалентностью тогда и только тогда, когда она аппроксимируется рекурсивными эквивалентностями.

Приведем некоторые следствия теоремы 2.1.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Всякая рекурсивно отделимая нумерация подпрямой неразложимой алгебры является негативной.*

Например, пусть $P = (\omega; p)$, где $p(0) = 0, p(x+1) = x$. Тогда всякая рекурсивно отделимая нумерация алгебры P негативна. Одной из простейших бесконечных (заметим, что любая рекурсивно отделимая нумерация конечной алгебры – негативная) подпрямой разложимых алгебр можно считать $S = (\omega; s), s(x) = x+1$. Легко показать, что уже алгебра S имеет рекурсивно отделимые не негативные нумерации.

Если η – эквивалентность на ω , то всякая η -алгебра имеет естественную нумерацию $\nu x = x/\eta$, индуцированную η . Говоря о гомоморфизмах η -алгебр будем подразумевать именно эту нумерацию.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Неединичная эквивалентность квазисовершенна тогда и только тогда, когда никакая η -алгебра не имеет нетривиальной негативной фактор-алгебры.*

Таким образом, квазисовершенные алгебры и только они являются негативно простыми.

Как уже отмечалось выше, квазисовершенные алгебры являются алгоритмическими “антиподами” r -нумерованных алгебр. Роль негативных алгебр, которую они

играют в описании r -нумерованных алгебр, особенно наглядно проявляется на примере простых алгебр.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *Всякая нумерованная простая алгебра либо негативна, либо квазисовершенна.*

Подчеркнем, что, согласно сказанному выше, связка “или” в этом следствии исключающая.

Для приложений теории r -нумерованных алгебр к решению некоторых вопросов логики и программирования полезен следующий факт.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Всякая r -нумерованная алгебра с иммунной характеристической трансверсалью аппроксимируется конечными рекурсивными алгебрами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что рекурсивно отделяемая нумерованная алгебра (A, ν) аппроксимируется своими фактор-алгебрами по негативным конгруэнциям. Если $\nu x \neq \nu y$, то по теореме 2.1 найдется негативная конгруэнция θ алгебры A , по модулю которой элементы $\nu x, \nu y$ различны. Пусть ν^* – естественная нумерация фактор-алгебры A/θ , индуцированная нумерацией ν , т.е. $\nu^* = \bar{\theta}\nu$, где $\bar{\theta}$ – естественное наложение. Очевидно включение $\text{tr}(\nu^*) \subseteq \text{tr}(\nu)$. Легко доказывается следующая лемма.

ЛЕММА. *Характеристическая трансверсаль негативной (позитивной) эквивалентности рекурсивно перечислима (является дополнением рекурсивно перечислимого множества).*

Согласно этой лемме $\text{tr}(\nu^*)$ рекурсивно перечислима. Если $\text{tr}(\nu)$ иммунна, то $\text{tr}(\nu^*)$ конечна, но конечная негативная алгебра рекурсивна. Следствие доказано.

Очевидно, что доказанное следствие справедливо и для неэффективных бесконечных r -нумерованных алгебр. Следствию 2.4 можно придать другую форму.

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Пусть (A, ν) – r -нумерованная алгебра. Тогда либо A финитно аппроксимируема, либо ν эффективно бесконечна.*

Примеры эффективно бесконечных нумерованных финитно аппроксимируемых алгебр общеизвестны.

2.2. Конечно порожденные алгебры. До конца этого подпункта сигнатуры предполагаются конечными. Все результаты §3–§6 справедливы для произвольных эффективных сигнатур, если под конечной порожденностью (локальной конечностью) произвольной алгебры понимать конечную порожденность (локальную конечность) некоторого (соответственно любого) конечного обеднения этой алгебры. Такое определение конечной порожденности (локальной конечности), совпадающее для конечной сигнатуры с классическим, мы принимаем в качестве базового. С этой точки зрения понятие порожденности конечным числом элементов существенно шире понятия конечной порожденности. Например, если $F = \{f_n \mid n \in \omega\}$ – такое вычислимое семейство рекурсивных функций, что $f_n(x) = n$ для любого $x \in \omega$, то алгебра $(\omega; F)$ локально конечна, но порождается любым своим элементом. Если A – алгебра эффективной сигнатуры, порожденная конечным числом элементов, то существует стандартная (гёделевская) нумерация γ алгебры A , причем для любой другой нумерации ν алгебры A существует такая рекурсивная функция g , что $\gamma = \nu g$. Другими

словами, γ является наименьшей (относительно сводимости нумераций) нумерацией в множестве всех классов эквивалентных нумераций алгебры A . Для алгебр, не имеющих конечного множества порождающих, наименьшей нумерации, вообще говоря, не существует [4]. Если A – алгебра, порожденная конечным числом элементов, и γ – ее стандартная нумерация, то можно говорить о рекурсивной отделимости (эффективной бесконечности и т. д.) самой алгебры A , имея в виду (A, γ) . Отметим, что на стандартные нумерации удобно смотреть как на нумерации алгебр не натуральными числами, а термами от конечного числа порождающих символов [34].

Напомним, что в этом подпункте сигнатуры считаются конечными.

ТЕОРЕМА 2.2 [11]. *Стандартная нумерация конечно порожденной финитно аппроксимируемой алгебры является рекурсивно отделимой.*

Для позитивных алгебр стандартность нумерации несущественна. В общем же случае нетрудно построить примеры нумерованных конечно порожденных финитно аппроксимируемых алгебр, не являющихся рекурсивно отделимыми.

Объединяя теорему 2.2 с теоремой 2.1, получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Неэффективно бесконечная конечно порожденная алгебра рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.*

Следующее предложение относится к одному важному классу конечно порожденных позитивно представимых алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Всякая бесконечная рекурсивно отделимая алгебра, конечно-определенная в конечно-базируемом многообразии, является эффективно бесконечной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ – стандартная r -нумерация алгебры A . Допустим, что γ неэффективно бесконечна. Тогда A согласно следствию 2.5 финитно аппроксимируема. Если A конечно определена в конечно-базируемом многообразии M , то семейство аппроксимирующих A конечных M -алгебр является рекурсивным, поэтому A негативна. Из позитивности алгебры A следует ее рекурсивность, а значит, и эффективная бесконечность ее стандартной нумерации. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть A – конечно порожденная алгебра. Для существования обогащения алгебры A , конечно-определенного в некотором конечно-базируемом многообразии алгебр, необходима позитивность стандартной нумерации алгебры A . В работе [6] построен пример конечно порожденной η_α -алгебры для подходящего простого множества α . Хотя эта алгебра позитивна, никакое ее обогащение согласно предложению 2.1 не является конечно-определенной алгеброй ни в каком конечно-базируемом многообразии. Таким образом, отмеченное выше необходимое условие позитивности не является достаточным, а упомянутый пример решает одну из проблем теории абстрактных типов данных [40], [43].

2.3. Негативные алгебры. Имеется по крайней мере три причины, обуславливающие важность изучения негативных нумераций и алгебр. Во-первых, понятие негативной алгебры является алгоритмически “двойственным” к одному из важнейших понятий теории конструктивных моделей и абстрактных типов данных – понятию

позитивной алгебры. Во-вторых, негативные нумерации и алгебры сами по себе образуют весьма естественный класс. В качестве классических примеров отметим вычислимые нумерации семейств общерекурсивных функций и стандартные нумерации конечно порожденных подгрупп групп рекурсивных автоморфизмов рекурсивных систем. И, наконец, в-третьих, из теоремы 2.1 вытекает важность негативных алгебр с точки зрения структурной теории рекурсивно отделимых нумерованных алгебр.

Приведем некоторые характеристики негативных эквивалентностей и алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эквивалентность η на ω называется равномерно рекурсивно отделимой (равномерной r -эквивалентностью), если существует частично рекурсивная функция f трех переменных, обладающая следующим свойством:

если $x \neq y \pmod{\eta}$, то $\lambda z.f(x, y, z)$ – рекурсивная функция, являющаяся характеристической для η -замкнутого множества, отделяющего x от y .

Можно дать неформальный вариант этого определения, требуя существования такой эффективной процедуры, которая “выдает” для каждой пары $\langle x, y \rangle$, где $x \neq y \pmod{\eta}$, алгоритм разрешения η -замкнутого множества, отделяющего x от y .

Легко показать, что для любого $\alpha \subseteq \omega$ эквивалентность η^α является равномерно рекурсивно отделимой. Отсюда вытекает, что всякая m -степень содержит равномерную r -эквивалентность. В частности, число равномерных r -эквивалентностей есть континуум.

ТЕОРЕМА 2.3 [16]. *Произвольная эквивалентность на ω негативна тогда и только тогда, когда она является равномерно рекурсивно отделимой эквивалентностью с рекурсивно перечислимой характеристической трансверсалью.*

Нумерованную алгебру будем называть равномерно r -нумерованной, если ее нумерационная эквивалентность является равномерной r -эквивалентностью. Из теоремы 2.3 вытекает, что равномерно r -нумерованными алгебрами с рекурсивно перечислимыми характеристическими трансверсалью исчерпывается класс негативных алгебр.

Следующее предложение дает характеристику негативных алгебр в классе равномерно r -нумерованных алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [16]. *Для равномерно r -нумерованной алгебры (A, ν) равносильны следующие условия:*

- 1) ν – негативная нумерация;
- 2) существует такое рекурсивно перечислимое множество α попарно различных по модулю $\eta(\nu)$ натуральных чисел, что всякая ненулевая конгруэнция алгебры A содержит пару $\langle \nu x, \nu y \rangle$ для подходящих различных x, y из α .

Рекурсивную перечислимость множества α в этом предложении нельзя заменить рекурсивностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие 2) предложения 2.2 назовем условием Ю. Л. Ершова. В [5] доказана следующая теорема: для позитивно нумерованной алгебры (A, ν) равносильны следующие условия:

- 1) ν – рекурсивная нумерация;
- 2) (A, ν) удовлетворяет условию Ю. Л. Ершова.

В условиях этой теоремы можно говорить о негативности нумерации ν , но для положительной нумерации последнее равносильно рекурсивности ν . В классе равномерно r -нумерованных алгебр условие Ю. Л. Ершова недостаточно для рекурсивности нумерации ν . Таким образом, характеристизация негативных алгебр в классе равномерно r -нумерованных оказывается родственной характеристизации рекурсивных алгебр в классе позитивных.

Как отмечалось после следствия 2.1, существует рекурсивно отделимая, но не негативная нумерация ν алгебры $S = (\omega; s)$, $s(x) = x + 1$. Тогда очевидно, что (S, ν) удовлетворяет условию Ю. Л. Ершова, но ν не негативна, поэтому предложение 2.2 не имеет места для класса всех r -нумерованных алгебр. Однако некоторые усиления условия Ю. Л. Ершова могут быть достаточными для негативности r -нумерованной алгебры. Например, аналогично предложению 2.2 (в части $2 \Rightarrow 1$) легко доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть (A, ν) – r -нумерованная алгебра. Если (A, ν) удовлетворяет условию Ю. Л. Ершова, в котором требуется конечность множества α , то ν негативна.

Продолжим аналогии между позитивными и негативными алгебрами, решетки конгруэнций которых удовлетворяют различным условиям конечности.

А. И. Мальцевым в [24] доказана рекурсивность всякой позитивной алгебры с конечным числом конгруэнций.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Всякая r -нумерованная алгебра с конечным числом конгруэнций является негативной.

Пусть (A, ν) – позитивная алгебра. Для рекурсивности ν достаточно выполнения одного из двух условий:

- 1) A – конечно порожденная алгебра, всякая ненулевая конгруэнция которой имеет конечный индекс (А. И. Мальцев [24]);
- 2) A имеет счетную артинову решетку конгруэнций (В. Баур [38]).

Из приводимых ниже результатов следует, что эти условия не являются достаточными для рекурсивности негативной алгебры.

Для произвольной решетки L через L' обозначим расширение L одним элементом, интерпретируемым как единица в L' . Очевидно, что L и L' “тождественны” по модулю любого естественного условия конечности.

ТЕОРЕМА 2.4 [14]. Если L – решетка конгруэнций конструктивизируемой алгебры, то существует неконструктивизируемая негативно представимая конечно порожденная алгебра, решетка конгруэнций которой изоморфна L' .

Как уже упоминалось во введении, легко привести примеры позитивных эквивалентностей с бесконечными характеристическими трансверсальями, над которыми определимы только локально конечные алгебры.

ТЕОРЕМА 2.5 [17]. Над всякой негативной эквивалентностью определима конечно порожденная алгебра.

Еще А. И. Мальцев в [24] заметил, что определимость простой алгебры над позитивной эквивалентностью равносильна ее рекурсивности.

ТЕОРЕМА 2.6 [17]. *Над всякой негативной эквивалентностью определима простая алгебра.*

Таким образом, понятие негативной эквивалентности существенно богаче понятия позитивной эквивалентности с точки зрения определимости над ними нетривиальных алгебр.

Из теоремы 2.6 с учетом следствия 2.3 и теоремы 2.3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.8. *Для произвольной эквивалентности η на ω равносильны следующие условия:*

- 1) η негативна;
- 2) η – равномерная r -эквивалентность с рекурсивно перечислимой характеристической трансверсалью;
- 3) η – неквазисовершенная эквивалентность, над которой определима простая алгебра.

§3. Топологические аспекты

Пусть (A, ν) – нумерованная алгебра. Подмножество B основного множества алгебры A называется ν -вполне рекурсивным, если рекурсивным является множество всех ν -номеров всех элементов множества B . Совокупность всех ν -вполне рекурсивных множеств замкнута относительно конечных пересечений и потому образует аддитивную базу естественной топологии на A . Это топологическое пространство назовем ν -пространством, а соответствующую топологию – ν -топологией.

3.1. Рекурсивно отделимые нумерации. Одним из приятных свойств ν -пространств является согласованность операций с ν -топологией в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть A – произвольная алгебра, а ν – ее нумерация. Тогда все операции алгебры A непрерывны в ν -топологии.*

Доказательство вытекает из того очевидного факта, что прообразы рекурсивных множеств при рекурсивных отображениях суть рекурсивные множества.

Исходя из этих же соображений доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Всякий гомоморфизм нумерованных алгебр является непрерывным отображением соответствующих топологических пространств.*

Понятие r -нумерации допускает весьма сильную характеристику в терминах топологических аксиом отделимости.

ТЕОРЕМА 3.1 [15]. *Нумерация ν рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда ν -пространство совершенно нормально и вполне несвязно.*

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Нумерация ν рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда ν -пространство является T_i -пространством для каждого $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.*

Следуя [4], можно определить для нумерованного множества (A, ν) предпорядок $\leq_\nu$ следующим образом. Для $a, b \in A$ полагаем $a \leq_\nu b$, если и только если всякое ν -вполне рекурсивное множество, содержащее a , содержит и b . Легко доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Нумерация ν рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда предпорядок $\leq_\nu$ является частичным порядком.*

Предпорядок $\leq_\nu$, интересный с точки зрения отделимых нумераций [4], оказывается “вырожденным” для рекурсивно отделимых нумераций.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Для любой нумерации ν равносильны следующие условия:*

- 1) ν – r -нумерация;
- 2) предпорядок $\leq_\nu$ тривиален (т.е. $\leq_\nu = \text{id } A$);
- 3) ν -пространство отделимо.

Важный частный случай r -нумераций представляют нумерации с рекурсивными смежными классами нумерационной эквивалентности. Следующее очевидное предложение характеризует такие нумерации.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Нумерация ν обладает рекурсивными классами нумерационной эквивалентности тогда и только тогда, когда ν -пространство дискретно.*

Пусть η – эквивалентность на ω . Если $\nu: \omega \rightarrow \omega/\eta$ – каноническая нумерация фактор-множества, т.е. $\nu(x) = x/\eta$, то η -пространством будем называть ν -пространство, а η -топологией – ν -топологию.

Продemonстрируем возможность алгебраической и топологической характеристик алгоритмического понятия на примере эквивалентностей вида η_α . Эквивалентности этого вида при подходящих коиммунных α будут играть заметную роль в наших дальнейших рассуждениях.

ТЕОРЕМА 3.2 [6], [15]. *Для произвольного $\alpha \subseteq \omega$ равносильны следующие условия:*

- 1) α коконечно или коиммунно;
- 2) всякая алгебра, определяемая над η_α , является финитно аппроксимируемой;
- 3) η_α -пространство есть компакт.

3.2. Отделимые нумерации. Если (A, ν) – нумерованная алгебра и $B \subseteq A$, то B называется ν -вполне перечислимым, если рекурсивно перечислимо множество всех ν -номеров всех элементов из B . Семейство ν -вполне перечислимых множеств также образует аддитивную базу естественной топологии на A , которую будем называть ν_e -топологией, а само пространство назовем ν_e -пространством. Совершенно аналогично определяется η_e -топология и η_e -пространство для произвольной эквивалентности η на ω .

Нумерация ν (эквивалентность η) называется отделимой, если отделимо ν_e -пространство (η_e -пространство).

Очевидно, что предложения 3.1 и 3.2 остаются справедливыми при замене ν -пространств на ν_e -пространства. Предложение 3.3 также верно для отделимых нумераций, если в определении предпорядка $\leq_\nu$ заменить “ ν -вполне рекурсивное” на “ ν -вполне перечислимое”, однако следствие 3.2 для отделимых нумераций уже не имеет места.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Для отделимой нумерации ν предпорядок $\leq_\nu$ тривиален тогда и только тогда, когда ν_e -пространство T_1 -отделимо.*

Предложение 3.4 после очевидной модификации остается в силе и для отделимых нумераций.

Покажем, что для отделимых нумераций, вообще говоря, не имеет места уже T_1 -отделимость. В самом деле, пусть α – рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество. Рассмотрим каноническую нумерацию ν двухэлементного множества $\{\alpha, \omega \setminus \alpha\}$, полагая $\nu x = \alpha$ для $x \in \alpha$ и $\nu x = \omega \setminus \alpha$ для $x \notin \alpha$. Тогда ν_e -пространство гомеоморфно связному двоеточию, а потому не является T_1 -пространством. Этот же пример показывает, что свойство “несвязности”, присущее рекурсивно отделимым нумерациям, также не имеет места для отделимых нумераций. Суть этих различий объясняется тем простым фактом, что дополнения рекурсивных множеств также рекурсивны, поэтому открытые базисные множества являются и замкнутыми в ν -топологии, т.е. соответствующие пространства индуктивно-нульмерны.

Теорема 3.2 для отделимых нумераций неверна. Чтобы в этом убедиться, достаточно взять в качестве α простое множество. Тогда эквивалентность η_α позитивна, а значит, $(\eta_\alpha)_e$ -пространство дискретно, хотя η_α -пространство есть компакт.

Максимальное различие между силами ν -топологий и ν_e -топологий наблюдается на примере совершенных нумераций. В самом деле, если η – совершенная (в алгоритмическом смысле) эквивалентность, то η_e -пространство дискретно, а η -пространство – пространство слипшихся точек.

В связи с упомянутым выше примером отделимой, но не T_1 -отделимой нумерации возникает естественный вопрос о существовании T_i -отделимой, но не T_{i+1} -отделимой нумерации для $1 \leq i \leq 3$. Нетрудно показать, что всякое счетное регулярное топологическое пространство является нормальным. Покажем, что существует такая нумерация ν , что ν_e -пространство T_1 -отделимо, но не хаусдорфово. Этот факт будет следовать из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.3. *Существует эквивалентность η с бесконечным числом смежных классов, обладающая следующим свойством: всякое непустое η -замкнутое подмножество множества натуральных чисел рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда его дополнение состоит из конечного числа классов η -эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η^* – совершенная эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Примеры таких эквивалентностей можно найти в [4]. Мы хотим построить такую эквивалентность η , которая в определенном смысле будет двойственной к η^* .

Используя эффективные конечные аппроксимации η^* , легко доказать существование рекурсивной функции f со следующими свойствами:

- 1) f взаимно однозначно отображает ω на $\omega \setminus \text{tr}(\eta^*)$;
- 2) f тождественна по модулю η^* ;
- 3) $x = y \pmod{\eta^*} \implies \exists n (f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$.

Другими словами, для каждого смежного класса σ эквивалентности η^* алгебра $(\sigma; f)$ изоморфна натуральному ряду с функцией следования, причем роль “первого” элемента играет число из $\text{tr}(\eta^*)$.

Определим множества $\beta_0, \beta_1, \dots$ так, что

$$\begin{cases} \beta_0 = f(\text{tr}(\eta^*)), \\ \beta_{n+1} = f(\beta_n). \end{cases}$$

Очевидно, что $\beta_m \cap \beta_n = \emptyset$ для $m \neq n$ и $\bigcup_{n \geq 0} \beta_n = \omega \setminus \text{tr}(\eta^*)$. Покажем, что дополнение β_n до ω является рекурсивно перечислимым для любого n . В самом деле, пусть дано $n \in \omega$. Легко понять, что множества $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ суть сжатые множества, а потому их объединение гипер-гипериммунно. Множество $\bigcup_{i > n} \beta_i$ является рекурсивно перечислимым (оно равно $f^{n+2}(\omega)$) и, поскольку его дополнение гипер-гипериммунно, оно гипер-гиперпросто. Его надмножество $\bigcup_{i \geq n} \beta_i$ также рекурсивно перечислимо ($\bigcup_{i \geq n} \beta_i = f^{n+1}(\omega)$). Следовательно, в силу теоремы Лахлана о том, что рекурсивно перечислимые надмножества гипер-гиперпростых множеств образуют булеву алгебру, $\omega \setminus \beta_n$ также рекурсивно перечислимо.

Пусть $\{a_0, a_1, \dots\}$ – некоторый пересчет без повторений $\text{tr}(\eta^*)$. Определим множества $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ так, что $\alpha_n = \beta_n \cup \{a_n\}$. Ясно, что дополнение α_n для каждого n также рекурсивно перечислимо, так как α_n отличается от β_n только на одно число. Кроме того, $\alpha_m \cap \alpha_n = \emptyset$ для $m \neq n$ и $\bigcup_{n \geq 0} \alpha_n = \omega$.

Множества $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ и определяют эквивалентность

$$\eta : x = y \pmod{\eta} \iff \exists n (x \in \alpha_n \ \& \ y \in \alpha_n).$$

Очевидно, что всякое η -замкнутое множество, дополнение которого состоит из конечного числа классов η -эквивалентности, является рекурсивно перечислимым. Покажем, что других непустых η -замкнутых рекурсивно перечисливых множеств нет.

Предположим противное. Пусть α – непустое η -замкнутое рекурсивно перечислимое множество, дополнение которого состоит из бесконечного числа классов η -эквивалентности. Если α есть объединение конечного числа классов η -эквивалентности, то оно, согласно предыдущим замечаниям, гипер-гипериммунно. Поэтому α является объединением бесконечного числа классов η -эквивалентности. Но тогда и $\alpha \cap \text{tr}(\eta^*)$ и $(\omega \setminus \alpha) \cap \text{tr}(\eta^*)$ бесконечны, что противоречит сжатости $\text{tr}(\eta^*)$. Теорема доказана.

Нумерацию ν назовем T_1 -отделимой (компактной, хаусдорфовой), если T_1 -отделимым (компактным, хаусдорфовым) является ν_e -пространство.

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ – семейство множеств из предыдущей теоремы. Определим нумерацию ν этого семейства, полагая $\nu x = \alpha_n \iff x \in \alpha_n$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Существует T_1 -отделимая компактная, но не хаусдорфова нумерация.*

Остается открытым вопрос о существовании нерегулярной хаусдорфовой нумерации.

§ 4. Равномерность

Понятие равномерной рекурсивной отделимости играет особую роль в теории r -нумерованных алгебр, поскольку позволяет характеризовать многие важные типы r -нумерованных алгебр. Примеры таких описаний приводились в разделе “Негативные алгебры” § 2 (п. 2.3). Наиболее интересные примеры позитивных алгебр со счетными

решетками конгруэнций из §6 также являются примерами равномерно r -нумерованных алгебр. Кроме того, понятие равномерной r -нумерации позволяет решить некоторые принципиальные вопросы теории абстрактных типов данных, что будет продемонстрировано в §5.

4.1. Эквивалентности. Тривиальными примерами равномерных r -эквивалентностей являются рекурсивные эквивалентности. Очевидно, что в классе эквивалентностей на ω с конечными характеристическими трансверсалими свойства “быть r -эквивалентностью”, “быть равномерной r -эквивалентностью” и “быть рекурсивной эквивалентностью” равносильны, поэтому далее будут рассматриваться в основном эквивалентности с бесконечным числом смежных классов.

Если $\omega \setminus \alpha$ рекурсивно перечислимо, то каждая из эквивалентностей η^α , η_α , η_α^* негативна и потому, согласно теореме 2.3, является равномерно рекурсивно отделимой. Выше было замечено, что η^α есть эффективно бесконечная равномерная r -эквивалентность для любого $\alpha \subseteq \omega$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [16]. *Равномерная r -эквивалентность неэффективно бесконечна тогда и только тогда, когда ее характеристическая трансверсаль иммунна.*

Эффективно бесконечные эквивалентности (даже r -эквивалентности) с иммунными характеристическими трансверсалими строятся очень просто. Например, пусть $\omega \setminus \alpha$ иммунное, но не гипериммунное множество и $\delta_0, \delta_1, \dots$ – сильная таблица для $\omega \setminus \alpha$. Тогда $\gamma^{-1}\delta_0, \gamma^{-1}\delta_1, \dots$ – рекурсивно перечислимое множество попарно различных по модулю η_α^* натуральных чисел. Иммунность $\text{tr}(\eta_\alpha^*)$ следует из соотношения $x \in \text{tr}(\eta_\alpha^*) \iff \gamma_x \subset \omega \setminus \alpha$.

Охарактеризуем равномерные r -эквивалентности в терминах равномерной аппроксимируемости рекурсивными эквивалентностями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Эквивалентность η называется равномерно аппроксимируемой рекурсивными эквивалентностями, если существует частично рекурсивная функция g четырех переменных, обладающая следующим свойством:

если $x \neq y \pmod{\eta}$, то $\text{l.u.v.}g(x, y, u, v)$ – общерекурсивная функция, являющаяся характеристической для эквивалентности, расширяющей η и различающей x, y .

ТЕОРЕМА 4.1 [16]. *Эквивалентность на ω равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется рекурсивными эквивалентностями.*

Укажем один естественный способ определения достаточно широкого класса равномерных r -эквивалентностей.

Пусть α – произвольное множество с бесконечным дополнением и f – рекурсивная функция, определяющая сильную таблицу для $\omega \setminus \alpha$, т.е. для $i \neq j$ верно

$$\gamma_{f(i)} \cap \gamma_{f(j)} = \emptyset \text{ и } \gamma_{f(k)} \cap (\omega \setminus \alpha) \neq \emptyset$$

для любого $k \in \omega$. Можно считать, что $\bigcup_{i \in \omega} \gamma_{f(i)} = \omega$, а $\gamma_{f(0)}$ одноэлементно. Стандартным образом построим рекурсивное конечноветвящееся дерево $(\omega; \leq)$ по шагам.

Шаг 0. $\leq_0 = \text{id } \gamma_{f(0)}, \omega_0 = \gamma_{f(0)}$.

Шаг $n + 1$. Пусть числа $x_0, \dots, x_s$ — все максимальные элементы в $(\omega_n; \leq_n)$, а i_n — наименьшее среди таких i , что $\gamma_{f(i)} \cap \omega_n = \emptyset$. Полагаем

$$\omega_{n+1} = \omega_n \cup \gamma_{f(i_n)} \cup \dots \cup \gamma_{f(i_n+s)},$$

а в качестве $\leq_{n+1}$ возьмем рефлексивное и транзитивное замыкание множества

$$\leq_n \cup \bigcup_{0 \leq j \leq s} \{ \langle x_j, z \rangle \mid z \in \gamma_{f(i_n+j)} \}.$$

Тогда $\bigcup_{n \geq 0} \omega_n = \omega$ и $\leq = \bigcup_{n \geq 0} \leq_n$ задает искомый порядок. Определим эквивалентность $\eta(\alpha, f)$:

$$\langle x, y \rangle \in \eta(\alpha, f) \iff x = y \vee \exists z \in \alpha (z \leq x \ \& \ z \leq y).$$

Непосредственно из построения вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. $\eta(\alpha, f)$ является равномерной r -эквивалентностью.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Существует неэффективно бесконечная, позитивная и равномерная r -эквивалентность, характеристическая трансверсаль которой не гипериммунна.

Таковой будет эквивалентность $\eta(\alpha, f)$ для простого и, очевидно, не гиперпростого α .

ЗАМЕЧАНИЕ. Важность этого следствия определяется существованием конечно порожденных алгебр, обладающих неэффективно бесконечными позитивными равномерными r -нумерациями. Любая такая алгебра есть контрпример к некоторым вопросам теории абстрактных типов данных, о чем будет сказано подробнее в следующем параграфе. Негипериммунность характеристической трансверсали нумерованной алгебры является, как отмечалось выше, необходимым условием конечной порожденности этой алгебры. Чрезвычайно простая конструкция из предложения 4.2 дает идейную базу построения упомянутых выше алгебр.

Свойство “быть r -эквивалентностью” достаточно устойчиво относительно многих естественных операций над эквивалентностями и конструкций над множествами. Свойству “быть равномерной r -эквивалентностью” такая инвариантность присуща в гораздо меньшей степени. Продемонстрируем этот факт следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3 [16]. Пусть α — произвольное множество с иммунным дополнением. Тогда:

- а) если $\omega \setminus \alpha$ не гипериммунно, то η_α не является равномерной r -эквивалентностью;
- б) если α гиперпросто и $\omega \setminus \alpha$ ретрассируемо, то η_α — равномерная r -эквивалентность.

4.2. Алгебры. Из существования неконструктивных негативных простых алгебр вытекает, что теорема 4.1 в случае алгебр не имеет места. Легко показать, что даже в классе неединичных позитивно r -нумерованных алгебр существуют алгебры, не обладающие нетривиальными рекурсивными фактор-алгебрами. Тем не менее аналог теоремы 4.1 справедлив и для алгебр.

Характеристической функцией негативной эквивалентности η назовем такую функцию f , что

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y \pmod{\eta}, \\ \text{не определена} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что характеристическая функция негативной эквивалентности частично рекурсивна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Нумерованная алгебра (A, ν) называется равномерно аппроксимируемой негативными алгебрами, если существует частично рекурсивная функция h четырех переменных, обладающая следующим свойством:

если $\nu x \neq \nu y$, то $\lambda uv.h(x, y, u, v)$ – характеристическая функция ν -негативной конгруэнции, по модулю которой элементы $\nu x, \nu y$ различны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Содержательный смысл понятия равномерной аппроксимируемости негативными алгебрами заключается в существовании такой эффективной процедуры $P(x, y)$, которая для каждой пары $\langle x, y \rangle$ при $\nu x \neq \nu y$ “выдает” алгоритм перечисления дополнения (до ω^2) ν -номеров подходящей конгруэнции, различающей элементы $\nu x, \nu y$ алгебры (A, ν) . Отметим также, что процедура $P(x, y)$ индуцирует вычислимую нумерацию семейства аппроксимирующих негативных конгруэнций, причем номерное множество этого семейства есть, вообще говоря, не весь натуральный ряд, а сколь угодно сложное его подмножество. Подвычислимостью нумерации семейства негативных эквивалентностей мы понимаем существование эффективной процедуры, позволяющей по номеру эквивалентности перечислять ее дополнение.

ТЕОРЕМА 4.2 [16]. *Нумерованная алгебра равномерно рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она равномерно аппроксимируется негативными алгебрами.*

Согласно этой теореме, если r -эквивалентность η не является равномерной, то всякая η -алгебра, вместе с естественной нумерацией, индуцированной η , есть пример r -нумерованной алгебры, для которой множество негативных аппроксимаций (существующее по теореме 2.1) не может быть задано единообразным эффективным способом.

Следующая характеристика очевидна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Нумерованная алгебра (равномерно) рекурсивно отделима тогда и только тогда, когда она эффективно вложима в (равномерно) рекурсивно отделимую нумерованную алгебру.*

Бескванторную формулу логики первого порядка назовем дизъюнктивно-импликативно-позитивной (ДИП-формулой), если она эквивалентна формуле вида $S_1 \vee \dots \vee S_n \rightarrow P$, где $S_1, \dots, S_n$ – атомарные, а P – позитивная формулы. ДИП-формулами являются, в частности, позитивные формулы (при $n = 0$),

конъюнкции отрицаний атомарных формул (при $P = \emptyset$), а также бескванторные части однопосылочных квазитождеств вида $S \rightarrow P$ (при $n = 1$ и атомарности P). Универсальным ДИП-предложением назовем универсальное замыкание ДИП-формулы. Аналогично определяются экзистенциальные, индуктивные и т. д. ДИП-предложения.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть (A, ν) – равномерно r -нумерованная алгебра и Φ – рекурсивно перечислимое множество универсальных ДИП-предложений, реализующееся в A . Тогда (A, ν) аппроксимируется негативными Φ -алгебрами (т. е. алгебрами, в которых также реализуется Φ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – вычислимое семейство рекурсивных функций, представляющих операций алгебры A в нумерации ν . Для каждой $f \in F$ с ненулевым числом аргументов определим множество главных f -трансляций T_f :

$$T_f = \{ \lambda x. f(m_1, \dots, m_{i-1}, x, m_{i+1}, \dots, m_n) \mid 1 \leq i \leq n; m_1, \dots, m_n \in \omega \}.$$

Определим $T = \bigcup_{f \in F} T_f$.

Обогатим (A, ν) стандартным образом счетным множеством констант $\{c_n \mid n \in \omega\}$, полагая $c_n = \nu n$, и сопоставим каждой главной трансляции из T , имеющей вид $\lambda x. f(k, \dots, l, x, m, \dots, n)$, квазитождество

$$\forall xy \ (x = y \rightarrow f(c_k, \dots, c_l, x, c_m, \dots, c_n) = f(c_k, \dots, c_l, y, c_m, \dots, c_n)).$$

Очевидно, что множество Ψ всех квазитождеств указанного вида (для всех $f \in F$, $1 \leq i \leq n$ и $m_1, \dots, m_n \in \omega$) является рекурсивно перечислимым множеством универсальных ДИП-предложений, а потому таковым же является и множество $\Phi \cup \Psi$, реализующееся в обогащении A^* алгебры A константами.

Отрицание любого предложения из $\Phi \cup \Psi$ имеет вид $\exists \bar{x} ((S_1 \vee \dots \vee S_n) \& \neg P)$, где $S_1, \dots, S_n$ – атомарные, а P – позитивные формулы. Частным случаем этого предложения назовем любую подстановку констант из сигнатуры алгебры A^* в формулу $(S_1 \vee \dots \vee S_n) \& \neg P$. Очевидно, что множество всех частных случаев отрицаний всех предложений из $\Phi \cup \Psi$ рекурсивно перечислимо. Зафиксируем некоторый эффективный пересчет $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ этого множества.

Пусть $\nu s \neq \nu t$ и θ – любая негативная эквивалентность (не обязательно конгруэнция!) алгебры (A, ν) , по модулю которой элементы $\nu s, \nu t$ различны.

Идея построения нужной конгруэнции заключается в следующем. Последовательно перебираем бескванторные предложения $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ и, одновременно, для каждого φ_m , имеющего вид $(S_1 \vee \dots \vee S_n) \& \neg P$, пытаемся убедиться в истинности $\neg P$ в фактор-модели алгебры A^* по разбиению θ . Если этот факт имеет место, то в силу негативности предложения $\neg P$ он подтвердится через конечное число шагов. В этом случае, пользуясь алгоритмом равномерной рекурсивной делимости классов алгебры (A, ν) , “расклеиваем” каждое термальное равенство S_i ($1 \leq i \leq n$). Пусть S_i обозначает $t_i^0 = t_i^1$ и эффективно построенные рекурсивные множества $r_1, \dots, r_n$ таковы, что $t_i^0 \in \nu r_i$, $t_i^1 \in \nu(\omega \setminus r_i)$ для $i \in \{1, \dots, n\}$. Новое ν -негативное разбиение θ' основного множества алгебры A определяется следующим образом:

$$|A|^2 \setminus \theta' = (|A|^2 \setminus \theta) \cup \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{ \langle \nu x, \nu y \rangle \mid x \in r_i \& y \in \omega \setminus r_i \}.$$

Очевидно, что $\theta \supseteq \theta' \supseteq \text{id } |A|$, причем θ' строится эффективно по θ . После построения θ' начинаем процедуру сначала, опять проверяя $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ для θ' . Поскольку “расклеенные” числа никогда не “склеятся”, то описанная процедура гарантирует негативность предельного разбиения, которое, очевидно, реализует $\Phi \cup \Psi$. Часть Ψ гарантирует допустимость этого разбиения, так как еще А.И. Мальцевым было показано в [21], что разбиение θ алгебры A^* является конгруэнцией тогда и только тогда, когда в фактор-модели A^*/θ реализуется Ψ . Теорема доказана.

Эта теорема необобщаема в том смысле, что в ее формулировке нельзя заменить универсальные ДИП-предложения произвольными универсальными, а также экзистенциальными ДИП-предложениями, так же, как нельзя опустить свойство равномерности.

СЛЕДСТВИЕ 4.2 [16]. *Если A – произвольная алгебра, обладающая неэффективно бесконечной равномерной r -нумерацией, а Φ – рекурсивно перечислимое множество универсальных ДИП-предложений, реализующееся в A , то A аппроксимируется конечными Φ -алгебрами.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Уместно провести одну аналогию между позитивными и равномерно r -нумерованными алгебрами, которая заключается в следующем. В силу монотонности и компактности оператора конгруэнтного замыкания всякая конгруэнция позитивной алгебры, порожденная эффективным множеством пар натуральных чисел, также является позитивной. Для решения ряда задач полезно уметь “расщеплять” нумерации некоторых фактор-алгебр нумерованных алгебр для получения промежуточных, т.е. находящихся “между” алгеброй и ее данной фактор-алгеброй нумераций. Однако в отличие от “склеивания” процесс “расщепления” конгруэнций не представляется удовлетворительным ни с алгебраической, ни с алгоритмической точек зрения. В связи с этим возникает вопрос о возможности эффективного “расщепления” конгруэнций нумерованных алгебр. Из доказательства теоремы 4.3 видно, что если (A, ν) – равномерно r -нумерованная алгебра, θ – ее негативная конгруэнция и множество $\{\langle x_i, y_i \rangle \mid i \in I\}$ рекурсивно перечислимо, то эффективно строится такая негативная конгруэнция θ' , что $\text{id } |A| \subseteq \theta' \subseteq \theta$ и $\nu x_i \neq \nu y_i \pmod{\theta'}$, $i \in I$. Таким образом, понятие равномерной r -нумерации является одним из уточнений неформального понятия “эффективно расщепляемой нумерации”. При такой трактовке понятия позитивной алгебры и равномерно r -нумерованной алгебры оказываются двойственными.

§ 5. Спецификации

Этот параграф преследует две основные цели. С одной стороны – будет продемонстрирована возможность применения теории r -нумерованных алгебр к решению некоторых проблем теории алгебраических спецификаций. С другой стороны, мы хотим показать возможность использования теории универсальных спецификаций позитивных алгебр для решения ряда чисто внутренних вопросов теории нумерованных алгебр вообще, и теории r -нумерованных алгебр в частности.

5.1. Алгебраические спецификации. В рассматриваемых далее случаях многосортность не имеет принципиального значения, и поэтому все результаты формулируются для односортных алгебр. Нужно лишь учесть, что в случае многосортной

эквивалентной логики необходимо потребовать подтверждение каждого сорта знанием подходящего замкнутого термина [42], но принимаемое нами соглашение о порожденности константами автоматически обеспечивает это свойство.

В упоминавшейся выше работе [40], в которой доказана алгебраическая специфицируемость тождествами всякой конструктивной структуры данных, по существу используется идея Эрбран-Гёделевского уточнения понятия вычислимой функции. Вообще, положительные аспекты в теории алгебраических спецификаций получаются сравнительно просто: если структура данных имеет несложную алгебраическую спецификацию, то, как правило, не составляет труда выписать ее в явном виде. Доказательство же того, что структура данных не характеризуется конечным числом тождеств (положительных предложений, квазитожеств и т. д.) даже в своей сигнатуре, является более сложной задачей. В качестве хрестоматийного можно привести пример просматриваемого стека, предложенный М. Майстер [46], неспецифицируемость которого тождествами (в сигнатуре понятия “стек”) была доказана в [44]. Доказательство существования структур данных, алгебраически неспецифицируемых в том или ином языке, требует нахождения таких свойств, которые, с одной стороны, “мешают” структуре иметь спецификацию данного типа в своей сигнатуре, а с другой стороны – эти свойства должны быть инвариантными относительно любых позитивно представимых обогащений этой структуры. Проблема полноты языка тождеств (положительных предложений, квазитожеств и т. п.) в теории алгебраических спецификаций формулируется следующим образом: всякая ли абстрактная структура данных алгебраически специфицируется тождествами (положительными предложениями, квазитожествами и т. п.)? На привычном математическом языке этот вопрос звучит так: всякая ли конечно порожденная позитивная алгебра конечной сигнатуры имеет обогащение, являющееся инициальной системой некоторого конечно-аксиоматизируемого многообразия (положительного класса, квазимногообразия и т. п.) алгебр? Если A – инициальная алгебра конечно-аксиоматизируемого класса алгебр K , и A аппроксимируется конечными K -алгебрами, то A конструктивна [23], [47]. Поэтому если A – финитно аппроксимируемая неконструктивная структура данных, то A не является инициальной ни в каком конечно-аксиоматизируемом позитивном классе. В [6] построен пример конечно порожденной η -алгебры для подходящего простого множества α . В силу рекурсивной устойчивости (относительно позитивных нумераций) конечно порожденных алгебр и следствия 2.4 всякое позитивно представимое обогащение этой алгебры финитно аппроксимируемо. Поэтому верна следующая

ТЕОРЕМА 5.1. Существует структура данных, алгебраически неспецифицируемая позитивными предложениями.

Таким образом, не только язык тождеств, но даже язык позитивных предложений, предлагавшийся в [41], не является достаточно выразительным для адекватно алгебраического описания произвольной абстрактной структуры данных.

Отметим, что контрпримеры к проблеме полноты языка а позитивных предложений можно выбирать в весьма естественных классах алгебр. Например, существуют эффективно бесконечные структуры данных, а также структуры данных, обладающие позитивными нумерациями с конечными смежными классами, алгебраически неспецифицируемые позитивными предложениями [11], [19].

Ситуация в случае позитивных предложений упрощается тем, что эти предложе-

ния устойчивы относительно гомоморфных образов. Построение контрпримеров для других классов предложений требует не просто финитной аппроксимируемости, а финитной аппроксимируемости алгебрами, в которых реализуются эти предложения.

ТЕОРЕМА 5.2 [16]. *Существует конечно порожденная алгебра, обладающая неэффективно бесконечной позитивной равномерной ν -нумерацией.*

С учетом следствия 4.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Существует структура данных, алгебраически неспецифицируемая универсальными ДИП-предложениями.*

Весом квазитождества назовем число посылок в его левой части, т.е. вес квазитождества $A_1 \& \dots \& A_n \rightarrow B$ есть n .

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Существует структура данных, алгебраически неспецифицируемая квазитождествами веса не более единицы.*

В связи с этим следствием возникает важный вопрос о существовании структуры данных, алгебраически неспецифицируемой квазитождествами.

5.2. Универсальные спецификации. До конца параграфа под универсальной спецификацией позитивной алгебры будет пониматься произвольное рекурсивно перечислимое множество универсальных предложений, реализующееся в этой алгебре.

Если (A, ν) – нумерованная алгебра, то через A_ν обозначим стандартное обогащение этой алгебры счетным множеством констант $\{c_n \mid n \in \omega\}$, где $c_n = \nu n$. Вопросы универсальной определимости позитивных алгебр в классах их гомоморфных образов оказались тесно связанными с вопросами разрешимости нумераций этих алгебр.

ТЕОРЕМА 5.3 [7]. *Позитивная алгебра (A, ν) конструктивна тогда и только тогда, когда существует универсальная спецификация для A_ν , не реализующаяся ни в какой фактор-алгебре алгебры A_ν по ненулевой конгруэнции.*

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Всякая универсальная спецификация алгебры, обладающей неконструктивной позитивной нумерацией, реализуется в некоторой фактор-алгебре этой алгебры по ненулевой конгруэнции.*

Другими словами, никакая алгебра, обладающая неконструктивной позитивной нумерацией, не выделяется в классе своих собственных гомоморфных образов никаким рекурсивно перечислимым множеством универсальных предложений.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Всякое $\exists\forall$ -предложение, реализующееся в алгебре, обладающей неконструктивной позитивной нумерацией, реализуется в некоторой фактор-алгебре этой алгебры по ненулевой конгруэнции.*

В условиях теоремы 5.3 нельзя заменить универсальные предложения экзистенциальными, так же как в следствии 5.4 нельзя заменить $\exists\forall$ -предложение индуктивным.

Одним из основных объектов исследования в логическом программировании является язык универсальных хорновских предложений [45]. Универсальные хорновские спецификации позволяют сформулировать более сильный критерий рекурсивности позитивной алгебры. Заметим, что если (A, ν) – позитивная алгебра, то в силу рекурсивной устойчивости A_ν , всякая конгруэнция алгебры A является ν -позитивной тогда и только тогда, когда фактор-алгебра алгебры A_ν по этой конгруэнции позитивно

представима. Поэтому вместо ν -позитивных конгруэнций алгебры (A, ν) можно говорить о позитивных фактор-алгебрах алгебры A_ν .

ТЕОРЕМА 5.4 [7]. *Позитивная алгебра (A, ν) конструктивна тогда и только тогда, когда существует универсальная хорновская спецификация для A_ν , не реализующаяся ни в какой позитивной фактор-алгебре алгебры A_ν по ненулевой конгруэнции.*

Справедлив аналог следствия 5.3, утверждающий, что неконструктивная позитивная алгебра не выделяется в классе своих собственных позитивных гомоморфных образов никакой универсальной хорновской спецификацией. Имеет место также эффективный вариант следствия 5.4 и замечания после него.

Таким образом, неконструктивизируемая позитивно представимая алгебра не выделяется в классе своих собственных гомоморфных образов никакой универсальной спецификацией. Точно так же она не выделяется в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов никакой универсальной хорновской спецификацией. В связи с этим возникает вопрос о наличии большей выразительной силы языка универсальных спецификаций относительно языка универсальных хорновских спецификаций (в смысле гомоморфной определимости).

5.3. Рекурсивные конгруэнции. Определимость неконструктивных позитивных алгебр подходящими универсальными хорновскими спецификациями в классах их рекурсивных фактор-алгебр оказалась не только возможной, но и весьма полезной.

ТЕОРЕМА 5.5 [13]. *Всякая неконструктивная позитивная алгебра, выделяемая подходящей универсальной хорновской спецификацией Φ в классе своих рекурсивных фактор-алгебр, имеет континуум конгруэнций, в фактор-алгебрах по которым реализуется Φ .*

В частности, если алгебра имеет такую позитивную нумерацию ν , что никакая неединичная конгруэнция не является ν -рекурсивной, то число конгруэнций этой алгебры есть континуум (случай $\Phi = \emptyset$).

Следующее предложение непосредственно вытекает из теоремы 5.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пусть (A, ν) – позитивная алгебра, удовлетворяющая хотя бы одному из следующих трех условий:*

- 1) (A, ν) не является рекурсивно отделимой;
- 2) $\text{tr}(\nu)$ иммунна, но не гипериммунна;
- 3) некоторое конечное обеднение (A, ν) имеет неэффективно бесконечную конечно порожденную подалгебру.

Тогда A имеет континуум конгруэнций.

Доказательство проводится путем явного выписывания подходящей рекурсивной системы универсальных хорновских предложений Φ . Например, если $\nu m \neq \nu n$ и никакое $\eta(\nu)$ -замкнутое рекурсивное множество не отделяет m от n , то обогатим A константами c, d так, что $c = \nu m, d = \nu n$, и положим $\Phi = \{c \neq d\}$. Тогда никакая конгруэнция, в фактор-алгебре по которой реализуется Φ , не может быть рекурсивной, поэтому можно применить теорему 5.5. Остальные пункты доказываются аналогично.

Выбор условий 1)–3) в этом предложении оправдан формулируемыми ниже следствиями и комментариями к ним.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть A – алгебра с не более чем счетной решеткой конгруэнций и ν – ее позитивная нумерация. Тогда

- а) (A, ν) рекурсивно отделима;
- б) $\text{tr}(\nu)$ либо не иммунное, либо гипериммунное множество;
- в) (A, ν) аппроксимируется рекурсивными алгебрами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты а), б) непосредственно вытекают из пунктов 1), 2), соответственно, предложения 5.1. Если $\nu m \neq \nu n$, то обогатим A константами $c = \nu m$, $d = \nu n$ и, полагая $\Phi = \{c \neq d\}$, применим теорему 5.5. Этим доказан пункт в).

Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций образуют важный и интересный подкласс класса r -нумерованных алгебр. Основные свойства таких алгебр будут рассмотрены в §6.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Всякая алгебра, обладающая совершенной нумерацией, имеет континуум конгруэнций.

В частности, континуум конгруэнций имеет всякая алгебра, обладающая позитивной предполной нумерацией.

ЗАМЕЧАНИЕ. В популярном учебнике А. И. Мальцева [29] приведен пример конечно определенной полугруппы, имеющей пару рекурсивно неотделимых смежных классов эквивалентных слов. Согласно предложению 5.1 любое позитивно представимое обогащение этой полугруппы имеет континуум конгруэнций. Этот пример показывает возможность применения теоремы 5.5 к конечно-определенным алгебрам. Устойчивость свойства “иметь континуум конгруэнций” относительно позитивно представимых обогащений присуща любой рекурсивно устойчивой алгебре, обладающей позитивной не r -нумерацией. Этот факт заслуживает внимания потому, что всякая алгебра имеет обогащение, в котором вообще нет нетривиальных конгруэнций.

Сделаем небольшое отступление, касающееся вопросов существования непротиворечивых предложений логики первого порядка, не имеющих конструктивных моделей. Примеры предложений, не обладающих конструктивными моделями, обычно строятся путем “кодировки” утверждения о существовании пары рекурсивно перечислимых рекурсивно неотделимых множеств (см., например, [39]). Нетрудно заметить, что всякое непротиворечивое экзистенциальное предложение имеет конструктивную модель, поэтому простейшее предложение, не обладающее конструктивной моделью, должно быть универсальным. Среди универсальных предложений естественно считать простейшими тождества. Пусть G – упомянутая выше полугруппа А. И. Мальцева с парой рекурсивно неотделимых классов, обогащенная константами для порождающих, а E – конъюнкция тождества ассоциативности и конечной системы равенств между замкнутыми термами, определяющей алгебру G . Зафиксируем два замкнутых термина t_0, t_1 таких, что смежные классы $t_0/E, t_1/E$ являются рекурсивно неотделимыми. Тогда предложение $E \ \& \ (t_0 \neq t_1)$ не имеет конструктивной модели, хотя оно обладает инициальной моделью, являющейся позитивной алгеброй. Это предложение является в некотором смысле простейшим предложением, не имеющим конструктивной модели. Однако $E \ \& \ (t_0 \neq t_1)$, опять-таки, не реализуется ни в какой рекурсивно

отделимой алгебре. Автором построен пример такого предложения $E \ \& \ (t_0 \neq t_1)$, где E – конъюнкция тождеств и t_0, t_1 – термы без переменных, что $E \ \& \ (t_0 \neq t_1)$ не имеет конструктивных моделей, но имеет инициальную, а значит, и позитивную модель, являющуюся рекурсивно отделимой алгеброй (не опубликовано).

СЛЕДСТВИЕ 5.7. *Всякое позитивно представимое обогащение любого расширения конечно порожденной неэффективно бесконечной алгебры имеет континуум конгруэнций.*

Ниже мы встретимся с естественными примерами позитивно представимых алгебр, всякие позитивно представимые обогащения которых локально конечны и финитно аппроксимируемы. Нетрудно заметить, что эти свойства не сохраняются относительно произвольных обогащений и относительно позитивно представимых обогащений расширений любой бесконечной алгебры. Согласно следствию 5.7, свойство “иметь континуум конгруэнций” оказывается устойчивым относительно эффективных обогащений расширений алгебр из довольно широкого класса. Указанный вид устойчивости оказывается более общим, чем устойчивость относительно позитивно представимых расширений обогащений алгебр в следующем смысле. Для произвольного класса K позитивно представимых алгебр фиксированной сигнатуры, порожденных константами, обозначим через $O(K)$ абстрактный класс позитивно представимых обогащений алгебр из K , а через $P(K)$ – класс позитивно представимых расширений K -алгебр. Очевидно, имеют место включения

$$\begin{array}{c} K \subset P(K) \subset PO(K) \subset OP(K), \\ \quad \subset O(K) \subset \end{array}$$

причем все включения собственные. Согласно следствию 5.7 для конечно порожденной неэффективно бесконечной позитивной алгебры A всякая $OP(A)$ -алгебра имеет континуум конгруэнций. Заметим, что континуальность решетки конгруэнций всякой $OP(A)$ -алгебры может иметь место и для эффективно бесконечной позитивной алгебры A . Для этого достаточно взять в качестве A эффективно бесконечное позитивное расширение любой конечно порожденной неэффективно бесконечной позитивной алгебры.

Если α гиперпростое множество, то, как отмечалось выше, всякая η_α -алгебра локально конечна. Легко заметить, что если $\omega \setminus \alpha$ не является иммунным, то существует конечно порожденная η_α -алгебра. Если же α простое не гиперпростое, то конечно порожденная η_α -алгебра может существовать [6], но может и не существовать [37]. Поэтому приводимый ниже факт, вытекающий из пункта 2) предложения 5.1, не является частным случаем следствия 5.7.

СЛЕДСТВИЕ 5.8 [42]. *Если α – простое не гиперпростое множество, то всякая η_α -алгебра имеет континуум конгруэнций.*

На фоне этого следствия особый интерес представляет факт существования η_α -алгебры со счетной решеткой конгруэнций для подходящего гиперпростого α [8]. Заметим, что для рекурсивности позитивной эквивалентности η необходимо и достаточно существование алгебры с конечной решеткой конгруэнций, определенной над η (А. И. Мальцев [24]).

§6. Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций

Под счетностью будем понимать счетность или конечность. Наряду с общими свойствами, присущими всем r -нумерованным алгебрам, позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций обладают рядом специфических особенностей, которые позволяют дать более детальное описание этих алгебр.

Обозначим через F класс счетных алгебр, обладающих ненулевыми конгруэнциями только конечного индекса (сигнатура не предполагается фиксированной), через N – класс счетных алгебр с нётеровыми решетками конгруэнций, через C – класс счетных алгебр со счетными решетками конгруэнций. Очевидны собственные включения $F \subset N \subset C$, даже если допускать несчетные сигнатуры.

6.1. Нётеровость. А. И. Мальцевым в [24] доказана конструктивность всякой позитивно нумерованной конечно порожденной F -алгебры. Отметим, что этот результат, доказанный А. И. Мальцевым в предположении конечности сигнатуры, справедлив и для произвольных эффективных сигнатур (напомним, что под конечной порожденностью мы понимаем конечную порожденность некоторого конечного обеднения).

ТЕОРЕМА 6.1 [8]. *Характеристическая трансверсаль позитивной F -алгебры является либо рекурсивным, либо гипериммунным множеством.*

Рекурсивность характеристической трансверсали позитивной алгебры равносильна конструктивности этой нумерации, поэтому интерес представляет вторая часть теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 6.2 [8]. *Всякая F -алгебра, обладающая неконструктивной позитивной нумерацией, является локально конечной, финитно аппроксимируемой, локально финитно отделимой, имеет неартинovu решетку конгруэнций и, в случае конечности сигнатуры, не является уноидом.*

Теоремы 6.1 и 6.2 ничего не говорят о существовании неконструктивных позитивных F -алгебр, но помогают понять, в каких классах нужно искать такие алгебры. Простейшей F -алгеброй, обладающей свойствами, перечисленными в теореме 6.2, является группоид $G = (\omega; \cdot)$, определенный следующим образом:

$$x \cdot y = \begin{cases} y, & \text{если } x > 0 \text{ \& } y = x + 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 6.3 [8]. *Группоид G является η -алгеброй для подходящего гиперпростого α с ретрассируемым дополнением.*

Объединяя эту теорему с предложением 4.3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *Существует неэффективно бесконечная позитивная равномерно r -нумерованная F -алгебра.*

В частности, в упомянутом выше результате А. И. Мальцева нельзя отказаться от условия конечной порожденности.

Группоид G имеет естественную конструктивизацию, однако небольшое усложнение конструкции из теоремы 6.3 позволяет доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Существует неконструктивизируемая позитивно представимая F -алгебра.*

Согласно В. Бауру [38] никакая счетная артинова решетка (в частности, никакая конечная решетка) не реализуется в качестве решетки конгруэнций никакой алгебры, обладающей неконструктивной позитивной нумерацией. Простейшей неартиновой полной алгебраической решеткой является порядковый тип $1 + \omega^*$, где ω^* — порядковый тип, двойственный естественному упорядочению ω натуральных чисел. Очевидно, что решетка конгруэнций группоида G из теоремы 6.3 изоморфна (как порядок) $1 + \omega^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 6.2 следует локальная конечность всякого позитивно представимого обогащения любой неконструктивизируемой позитивно представимой F -алгебры. Класс алгебр, обладающих только локально конечными позитивно представимыми обогащениями, гораздо шире класса неконструктивизируемых позитивно представимых F -алгебр. Примеры таких алгебр по разным поводам строились в работах [6], [8], [18], [19], [37]. Всем этим алгебрам присущи два общих свойства: каждая из этих алгебр имеет позитивную r -нумерацию и все они не являются автоустойчивыми относительно позитивных нумераций, причем разброс типов нумераций может быть чрезвычайно большим. Например, алгебра с локально конечными позитивно представимыми обогащениями из [18] имеет, с одной стороны, позитивную нумерацию с конечными смежными классами нумерационной эквивалентности. С другой стороны — она же является η_α -алгеброй для подходящего гиперпростого α . В связи с этим возникает вопрос о существовании такого рода алгебр в классе рекурсивно (авто) устойчивых.

В связи с теоремой 6.3 возникает также вопрос о возможности заменить в вышеупомянутой теореме А. И. Мальцева свойства конечности индексов ненулевых конгруэнций близким, но более общим, свойствам нётеровости, не отказываясь от условия конечной порожденности. Ответ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 6.4 [10]. *Всякая позитивная F -алгебра эффективно вложима в конечно порожденную позитивную N -алгебру.*

Объединяя эту теорему с теоремой 6.3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *Существует неконструктивизируемая позитивно представимая конечно порожденная алгебра с нётеровой решеткой конгруэнций.*

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Существует неконструктивная позитивная равномерно r -нумерованная конечно порожденная N -алгебра.*

Подчеркнем, что характеристические трансверсали неконструктивных позитивных конечно порожденных N -алгебр (даже C -алгебр) не могут быть ни рекурсивно перечислимыми, ни иммунными.

Формулировке следующего результата предположим одно замечание общего характера.

Всякая алгебра, конечно-определенная в классе всех алгебр данной сигнатуры, является финитно аппроксимируемой, а значит, и конструктивизируемой. Поэтому всякая конечно-определенная алгебра с неразрешимой проблемой равенства должна задаваться в нетривиальном классе алгебр. Класс алгебр, аксиоматизируемый бескванторным предложением, также можно считать тривиальным в том смысле, что

всякая алгебра, конечно определенная в этом классе, опять-таки, имеет разрешимую проблему равенства. С этой точки зрения простейшими нетривиальными классами являются конечно-базируемые многообразия. Используя метод Бергстры–Такера из [40] и теорему 6.4, легко доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Существует неконструктивизируемая N -алгебра, конечно-определенная в конечно-базируемом многообразии.*

6.2. Общий случай. Приведем критерий эффективной бесконечности позитивно нумерованной C -алгебры.

ТЕОРЕМА 6.5 [9]. *Для бесконечной позитивной C -алгебры (A, ν) эквивалентны следующие условия:*

- 1) (A, ν) эффективно бесконечна;
- 2) (A, ν) имеет конечно порожденное обогащение;
- 3) (A, ν) аппроксимируется бесконечными конструктивными алгебрами.

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая нумерованная алгебра (A, ν) , удовлетворяющая условию 3), имеет конечно порожденное (в нумерации ν) обогащение [10] и, очевидно, является эффективно бесконечной. Существуют такие позитивные алгебры (A_i, ν_i) для $0 \leq i \leq 2$, что:

- а) (A_0, ν_0) эффективно бесконечна, но не имеет конечно порожденного обогащения [18];
- б) (A_1, ν_1) – неэффективно бесконечная конечно порожденная алгебра [6];
- в) (A_2, ν_2) – эффективно бесконечная конечно порожденная алгебра, никакая неединичная конгруэнция которой не является рекурсивной [11].

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Всякая позитивная бесконечная конечно порожденная C -алгебра эффективно бесконечна.*

Конечно порожденные позитивные C -алгебры оказываются “универсальными” в следующем смысле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2 [9]. *Всякая позитивная C -алгебра, не являющаяся унарной, эффективно вложима в конечно порожденную позитивную C -алгебру.*

С учетом предыдущих результатов сформулируем два свойства неэффективно бесконечных позитивных C -алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Пусть (A, ν) – неэффективно бесконечная позитивная C -алгебра. Тогда*

- 1) A локально конечна и финитно аппроксимируема;
- 2) $\text{tr}(\nu)$ гипериммунна.

Финитная аппроксимируемость, как отмечалось выше, присуща любой алгебре, обладающей неэффективно бесконечной r -нумерацией. Однако для локальной конечности это не так. Достаточно сослаться на пример конечно порожденной η_α -алгебры для простого α из теоремы 5.1. Этот же пример показывает, что характеристическая трансверсаль неэффективно бесконечной позитивной алгебры не обязательно гипериммунна.

Важным свойством позитивных C -алгебр является их рекурсивная аппроксимируемость. Рекурсивными аппроксимациями, согласно следствию 2.4, обладают и произвольные r -нумерованные алгебры с иммунными характеристическими трансверсальными. Из рекурсивной аппроксимируемости нумерованной алгебры очевидно следует рекурсивная отделимость этой нумерации. Обратное, как отмечалось перед следствием 5.7, неверно уже в классе позитивно r -нумерованных алгебр.

Определенный интерес представляет строение простейших решеток, реализующихся в качестве решеток конгруэнций позитивно представимых алгебр некоторых типов. В рассматриваемых далее случаях вложимость решетки как алгебры будет эквивалентна (в смысле совпадения верхних и нижних граней) ее вложимости как частично упорядоченного множества, поэтому всюду ниже без оговорок используются решетки как частично упорядоченные множества.

Назовем решетку L простой относительно класса алгебр K (K -простой), если L вложима в решетку конгруэнций любой K -алгебры, и существует K -алгебра, решетка конгруэнций которой изоморфна L .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Пусть K – класс C -алгебр, обладающих неконструктивными позитивными нумерациями. Тогда решетка $1 + \omega^*$ является K -простой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из результатов В. Баура [38] следует, что решетка конгруэнций C -алгебры, обладающей неконструктивной позитивной нумерацией, не может быть артиновой, поэтому $1 + \omega^*$ вложима в решетку конгруэнций любой K -алгебры. Остается сослаться на пример группоида из теоремы 6.3.

Если алгебра имеет несчетную решетку конгруэнций, то для любой ее нумерации ν число конгруэнций, не являющихся ν -позитивными, также несчетно. Поэтому естественен вопрос о возможном числе непозитивных конгруэнций для позитивной алгебры со счетной решеткой конгруэнций. Заметим, что решетка конгруэнций всякой алгебры, обладающей позитивной нумерацией хотя бы с одной непозитивной конгруэнцией, не может быть нётеровой. В самом деле, если (A, ν) – позитивная алгебра и θ – конгруэнция алгебры A , не являющаяся ν -позитивной, то θ эффективно недостижима. Другими словами, конгруэнтное замыкание любого рекурсивно перечислимого множества вида $\{ \langle x_i, y_i \rangle \mid \nu x_i = \nu y_i \pmod{\theta}, i \in I \}$ строго меньше θ . Поэтому в решетку конгруэнций алгебры A вкладывается ординал $\omega + 2$.

ТЕОРЕМА 6.6 [9]. *Существует позитивная алгебра, решетка конгруэнций которой изоморфна $\omega + 2$, обладающая ровно одной непозитивной конгруэнцией.*

Пусть K_0 – класс алгебр, обладающих позитивными нумерациями хотя бы с одной непозитивной конгруэнцией, а K_1 – подкласс класса K_0 , состоящий из C -алгебр.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. *Решетка $\omega + 2$ является K_0 -простой и K_1 -простой.*

Небольшая модификация примера из теоремы 6.6 позволяет полностью ответить на вопрос о возможном числе непозитивных конгруэнций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5 [9]. *Для любого $n \in \omega \cup \{\omega\}$ существует позитивная алгебра, имеющая ровно n непозитивных конгруэнций.*

§ 7. Некоторые вопросы

В заключение приведем список некоторых вопросов, возникших в теории рекурсивно-отделимых нумерованных алгебр и в смежных областях.

1. (Известная проблема). Существует ли конечно порожденная позитивно представимая алгебра конечной сигнатуры, никакое обогащение которой не является инициальной алгеброй ни в каком конечно-базируемом квазимногообразии?

2. Существует ли неэффективно бесконечная рекурсивно-отделимая алгебра, конечно-определенная в конечно-базируемом квазимногообразии?

Из положительного ответа на этот вопрос следует, что язык квазиэквациональных спецификаций (в обогащениях без сортов) существенно выразительнее языка эквациональных спецификаций.

3. Описать наиболее общие эффективные и структурные свойства классических рекурсивно-отделимых нумерованных алгебр (групп, колец, решеток, булевых алгебр, модулей и т. д.).

4. Существует ли конечно-определенная в конечно-базируемом многообразии алгебра, нумерационная эквивалентность стандартной нумерации которой предполная?

5. Верно ли, что всякая позитивная алгебра эффективно вложима в подходящую совершенную алгебру?

6. Найти алгебраические условия, необходимые и достаточные для существования стандартной нумерации алгебры.

7. Существует ли такая нумерация ν , что топологическое пространство, порожденное ν -вполне перечислимыми множествами, является хаусдорфовым, но не регулярным?

8. (А. С. Морозов). Существует ли 2-порожденная негативно представимая группа, не вложимая в группу рекурсивных перестановок натурального ряда?

9. Всякая ли решетка, реализуемая в качестве решетки конгруэнций негативно-представимой неконструктивизируемой алгебры, изоморфна решетке конгруэнций подходящей конструктивизируемой алгебры?

10. Изучить абстрактные свойства алгебр, определенных над эквивалентностями с гипер-гипериммунными характеристическими трансверсями?

11. (Б. М. Хусаинов). Существует ли рекурсивно устойчивая рекурсивно-отделимая позитивная алгебра, всякое позитивно представимое обогащение которой локально-конечно?

12. Пусть K_η – абстрактный класс алгебр, определенных над η . Описать строение частично упорядоченного множества $(\{K_\eta \mid \eta \in \theta\}; \subseteq)$, где θ – множество всех (позитивных, негативных, рекурсивно-отделимых) эквивалентностей на ω .

13. Существует ли неконструктивизируемая позитивно представимая алгебра, выделяемая в классе своих собственных позитивно представимых гомоморфных образов подходящим рекурсивно-перечислимым множеством универсальных предложений?

14. Всякое ли универсальное предложение, реализующееся в рекурсивно-отделимой нумерованной алгебре, имеет негативную модель?

15. Построить примеры неконструктивизируемых позитивно представимых алгебр с артиновыми решетками конгруэнций и описать эффективные свойства таких алгебр.

16. Охарактеризовать нумерованные алгебры, обладающие рекурсивными аппроксимациями.

17. Развить теорию $\Sigma_n^0(\Pi_n^0)$ -отделимых нумерованных алгебр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гончаров С. С. Проблема числа неавтоэквивалентных конструктивизаций // Алгебра и логика. 1980. Т. 19. № 6. С. 621–639.
- [2] Гончаров С. С. Модели данных и языки их описания // Вычисл. системы. 1985. № 107. С. 52–70.
- [3] Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры. Новосибирск: Наука, 1988.
- [4] Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
- [5] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
- [6] Касымов Н. Х. Об алгебрах с финитно аппроксимируемыми позитивно представимыми обогащениями // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 6. С. 715–730.
- [7] Касымов Н. Х. Позитивные модели и универсальные предложения // Вычисл. системы. 1990. № 133. С. 3–13.
- [8] Касымов Н. Х. Позитивные алгебры с конгруэнциями конечного индекса // Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 3. С. 293–305.
- [9] Касымов Н. Х. Позитивные алгебры со счетными решетками конгруэнций // Алгебра и логика. 1992. Т. 31. № 1. С. 21–37.
- [10] Касымов Н. Х. Позитивные алгебры с нётеровыми решетками конгруэнций // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 2. С. 181–185.
- [11] Касымов Н. Х. О гомоморфизмах на негативные алгебры // Алгебра и логика. 1992. Т. 31. № 2. С. 132–144.
- [12] Касымов Н. Х. О числе конгруэнций алгебр над простыми множества // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 150–152.
- [13] Касымов Н. Х. О числе Q -конгруэнций позитивных алгебр // Алгебра и логика. 1992. Т. 31. № 3. С. 297–305.
- [14] Касымов Н. Х. Неконструктивные негативные алгебры с условиями конечности // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 6. С. 195–198.
- [15] Касымов Н. Х. Аксиомы отделимости и разбиения натурального ряда // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 3. С. 81–85.
- [16] Касымов Н. Х. Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 5. С. 85–102.
- [17] Касымов Н. Х. Об алгебрах над негативными эквивалентностями // Алгебра и логика. 1994. Т. 33. № 1. С. 76–80.
- [18] Касымов Н. Х., Хусаинов Б. М. Конечно порожденные перечислимые и абсолютно локально конечные алгебры // Вычисл. системы. 1986. № 116. С. 3–15.
- [19] Касымов Н. Х., Хусаинов Б. М. Позитивные эквивалентности с конечными классами и алгебры над ними // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 5. С. 196–200.
- [20] Кузнецов А. В. О проблемах тождества и функциональной полноты для алгебраических систем // Труды III Всесоюз. матем. съезда. Т. 2. М., 1956. С. 145–146.
- [21] Мальцев А. И. К общей теории алгебраических систем // Матем. сб. 1954. Т. 35. № 1. С. 3–20.
- [22] Мальцев А. И. Квазипрimitивные классы абстрактных алгебр // ДАН СССР. 1956. Т. 108. № 2. С. 187–189.
- [23] Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
- [24] Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I // УМН. 1961. Т. 16. № 3. С. 3–60.
- [25] Мальцев А. И. Полно нумерованные множества // Алгебра и логика. 1963. Т. 2. № 2. С. 4–29.
- [26] Мальцев А. И. К теории вычислимых семейств объектов // Алгебра и логика. 1964. Т. 3. № 3. С. 5–31.
- [27] Мальцев А. И. Позитивные и негативные нумерации // ДАН СССР. 1965. Т. 160. № 2. С. 278–280.
- [28] Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
- [29] Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986.

- [30] Морозов А. С. Об одном вопросе Хигмэна // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. №1. С. 29–34.
- [31] Одинцов С. П., Селиванов В. Л. Арифметическая иерархия и идеалы нумерованных булевых алгебр // Сиб. матем. журн. 1989. Т. 30. №6. С. 140–149.
- [32] Успенский В. А. О вычислимых операциях // ДАН СССР. 1955. Т. 103. №5. С. 773–776.
- [33] Успенский В. А. Системы перечислимых множеств и их нумерации // ДАН СССР. 1955. Т. 105. №6. С. 1155–1158.
- [34] Успенский В. А., Семенов А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М.: Наука, 1987.
- [35] Хисамиев Н. Г. Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. 1986. Т. 25. №2. С. 205–226.
- [36] Хисамиев Н. Г. Арифметическая иерархия абелевых групп // Сиб. матем. журн. 1988. Т. 29. №6. С. 144–159.
- [37] Хусаинов Б. М. О позитивно нумерованных моделях // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. №3. С. 184–191.
- [38] Baur W. Rekursive Algebren mit Kettenbedingungen // Z. Math. Logik und Grundl. Math. 1974. V. 20. №1. P. 37–46.
- [39] Baur W. Über rekursive Strukturen // Inven. Math. 1974. V. 23. №2. P. 89–95.
- [40] Bergstra J. A., Tucker J. V. A characterization of computable data types by means of a finite, equational specification method // Lecture Notes in Comput. Sci. 1980. №85. P. 76–90.
- [41] Broy M., Dosch W., Partsch H., Pepper P., Wirsing M. Existential quantifiers in abstract data types // Lecture Notes in Comput. Sci. 1979. №71. P. 73–81.
- [42] Goguen J. A., Meseguer J. Completeness of many-sorted equational logic // SIGPLAN Notes. 1981. V. 16. №7. P. 24–32.
- [43] Kamin S. Some definitions for algebraic data type specifications // SIGPLAN Notes. 1979. V. 14. №3. P. 28–37.
- [44] Kapur D. Specifications of Majster's traversable stack and Veloso's traversable stack // SIGPLAN Notes. 1979. V. 14. №5. P. 46–53.
- [45] Lloyd J. W. Foundations of Logic Programming. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1984.
- [46] Majster M. Data types, abstract data types and their specification problem // Theor. Comput. Sci. 1979. V. 8. №1. P. 89–128.
- [47] McKinsey J. G. The decision problem for some classes of sentences without quantifiers // J. Symbol. Logic. 1943. V. 8. №3. P. 61–76.
- [48] Nerode A. General topology and partial recursive functionals // Talks Cornell Summ. Inst. Symb. Log. Cornell, 1957. P. 247–251.

Ташкент

Поступила в редакцию
15.12.1994