Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Радулеску, Эндоморфизмы пространств виртуальных векторов, неподвижных под действием дискретной группы, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 2, 121–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 12:11:34

УДК 512+517.98

*Посвящается профессору Пьеру де ля Арпу
по случаю семидесятилетия*

Эндоморфизмы пространств виртуальных векторов, неподвижных под действием дискретной группы

Ф. Радулеску

Рассматривается унитарное представление π дискретной группы G , которое, будучи ограничено на почти нормальную подгруппу $\Gamma \subseteq G$, является представлением типа II. Изучается ассоциированное унитарное представление $\bar{\pi}^P$ группы G на гильбертовом пространстве “виртуальных” Γ_0 -инвариантных векторов, где Γ_0 пробегает подходящий класс подгрупп конечного индекса группы Γ . Унитарное представление $\bar{\pi}^P$ группы G однозначно определяется требованием, что операторы Гекке для всех Γ_0 являются “клеточно-матричными коэффициентами” представления $\bar{\pi}^P$.

Если $\pi|_{\Gamma}$ – целое кратное регулярного представления, то существует подпространство L гильбертова пространства представления π , играющее роль фундаментальной области для Γ . В этом случае пространство Γ -инвариантных векторов отождествляется с L . Когда $\pi|_{\Gamma}$ не является целым кратным регулярного представления (например, если $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, Γ – модулярная группа, π принадлежит дискретной серии представлений группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, а Γ -инвариантные векторы являются каспидальными формами), мы считаем, что π есть ограничение на подпространство H_0 большего унитарного представления, имеющего подпространство L как выше.

Операторный угол между проекцией P_L на L (обычно являющейся характеристической функцией фундаментальной области) и проекцией P_0 на подпространство H_0 (обычно являющейся проекцией Бергмана на пространство аналитических функций) служит аналогом пространства Γ -инвариантных векторов.

Доказано, что характер унитарного представления $\bar{\pi}^P$ однозначно определяется характером представления π .

Библиография: 53 названия.

Ключевые слова: унитарные представления, операторы Гекке, формулы следа.

DOI: 10.4213/rm9713

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение и основные результаты	122
2. Схема работы	135
3. Аксиомы для построения гильбертовых пространств Γ -инвариантных векторов	142
4. Примеры представлений и ассоциированных пространств Γ -инвариантных векторов	153
5. Построение представления $\bar{\pi}_0^P$ при отсутствии Γ -блуждающего порождающего подпространства	158
6. Значения характера θ_{π_0} , ассоциированного с представлением π_0	166
7. Случай, когда представление π допускает “квадратный корень” $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$	168
Список литературы	175

1. Введение и основные результаты

Пусть G – счетная дискретная группа, Γ – почти нормальная подгруппа и $\mathcal{S}$ – минимальная решетка пересечений подгрупп конечного индекса группы Γ , замкнутая относительно операции

$$\Gamma_0 \rightarrow (\Gamma_0)_\sigma = \Gamma_0 \cap \sigma \Gamma_0 \sigma^{-1}, \quad \sigma \in G. \quad (1)$$

Всюду в этой работе предполагается, что пересечение подгрупп из $\mathcal{S}$ есть единичный элемент.

Рассмотрим унитарное (проективное) представление π группы G в гильбертовом пространстве H . Везде в этой работе мы предполагаем, что $\pi|_\Gamma$ есть кратное левого регулярного представления λ_Γ (см. [50], [44]) группы Γ (возможно, скрещенное с коциклом, если π проективно). При этом условии мы строим гильбертовы пространства H^Γ Γ -инвариантных векторов. Более общо, мы строим гильбертовы пространства H^{Γ_0} Γ_0 -инвариантных векторов, когда Γ_0 пробегает $\mathcal{S}$.

Мы называем вышеупомянутые векторы для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ “виртуальными” Γ_0 -инвариантными векторами, так как они обычно соответствуют Γ_0 -инвариантным плотно определенным линейным функционалам на H . Гильбертовы пространства H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, не являются истинными подпространствами в H ; они расположены в расширении – в смысле троек Гельфанда (см. [18]) – заданного гильбертова пространства (см. определение 14). Для всех подгрупп $\Gamma_0, \Gamma_1 \in \mathcal{S}$ таких, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$, существует каноническое изометрическое вложение $H^{\Gamma_0} \subseteq H^{\Gamma_1}$.

Проиллюстрируем это в случае левого регулярного представления λ_Γ группы Γ в унитарную группу $\mathcal{U}(l^2(\Gamma))$ гильбертова пространства $l^2(\Gamma)$. В этом случае пространство Γ -инвариантных векторов есть одномерное пространство, порожденное постоянными функциями на Γ . Это пространство можно рассматривать как пространство плотно определенных линейных функционалов на $l^2(\Gamma)$. В общем случае в этом формализме $l^2(\Gamma)^{\Gamma_0} = \ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$.

В общем случае, если унитарное представление π в гильбертово пространство H является целым кратным левого регулярного представления λ_Γ дискретной группы Γ , то существует подпространство L такое, что Γ -эквивариантным образом выполняется

$$H \cong l^2(\Gamma) \otimes L, \quad \pi|_\Gamma \cong \lambda_\Gamma \otimes \text{Id}_L.$$

В этом случае также очевидно, что можно отождествить пространство Γ -инвариантных векторов с гильбертовым пространством L . При этом отождествлении L уже не является истинным подпространством в H . Более того, L не единственно.

Если унитарное представление π не является целым кратным левого регулярного представления λ_Γ , то мы будем использовать подпространство L из большего представления группы G , которое содержит данное представление π как подпредставление. В этом случае мы докажем ниже, что операторный угол между проекцией на подпространство подпредставления и проекцией на L может быть использован для построения пространства Γ -инвариантных векторов и его скалярного произведения.

Это аналогично формуле скалярного произведения Петерссона для автоморфных форм, приведенной в [34], где для того, чтобы ввести скалярное произведение на автоморфных формах, которые являются “виртуальными” $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ -инвариантными векторами для ограничения на $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ представлений π_n , $n \geq 2$, из дискретной серии группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, была использована “измеряющая шкала”, состоящая из фундаментальной области F для действия группы $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ на верхней полуплоскости. Большее унитарное представление, содержащее представление π_n в качестве подпредставления, получается следующим образом: если π_n реализовано как унитарное представление на пространстве $H^2(\mathbb{H}, \nu_n)$, состоящем из интегрируемых с квадратом аналитических функций относительно меры ν_n на $\mathbb{H}$, то большее унитарное представление, содержащее π_n в качестве подпредставления, реализуется на соответствующем гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$. Пространство суммируемых с квадратом функций с носителями в F играет роль подпространства L как выше.

Пусть σ – групповой элемент из G . Мы используем обозначения, введенные перед формулой (1). Очевидно, что $\sigma\Gamma_{\sigma^{-1}}\sigma^{-1} = \Gamma_\sigma$. Из этого следует, что представление π индуцирует унитарное преобразование (обозначаемое $\bar{\pi}^P(\sigma)$), которое отображает $H^{\Gamma_{\sigma^{-1}}}$ на H^{Γ_σ} .

Основная проблема, которую мы рассматриваем в этой работе, – изучение унитарного представления $\bar{\pi}^P$, индуцированного унитарным представлением π на гильбертовом пространстве $\bar{H}^P$, полученном путем взятия индуктивного предела гильбертовых пространств H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Содержание классической проблемы Рамануджана–Петерссона [24], [47], [6] преобразуется в проблему гармонического анализа о слабом унитарном включении представления $\bar{\pi}^P$ в унитарное представление, полученное ограничением на G левого регулярного представления пополнения Шлихтинга [48], [26] группы G относительно подгрупп из семейства $\mathcal{S}$.

Представление $\bar{\pi}^P$ определяется ассоциированными операторами Гекке [23], [24], [46] на всех уровнях Γ_0 . Операторы Гекке являются “клеточно-матричными коэффициентами” ассоциированного унитарного представления $\bar{\pi}^P$. Обозначение $\bar{\pi}^P$ для представления на пространстве всех “виртуальных” Γ_0 -инвариантных векторов, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, мы используем, чтобы подчеркнуть, что это представление построено с помощью процедуры проконечного пополнения. Когда исходное представление π является проективным представлением с коциклом ϵ , а коцикл ϵ допускает продолжение на пополнение Шлихтинга $\bar{G}$, введенное ниже, построение в этой работе дословно так же работает и в проективном случае.

Представление $\bar{\pi}^P$ в несколько иной форме широко используется в литературе (см., например, [6], [13], [21]). В этой работе мы используем построение $\bar{\pi}^P$ в терминах операторных алгебр. Это построение дает возможность получить унитарно эквивалентные формы $\bar{\pi}^P$, которые больше подходят для вычисления следов.

Основной результат настоящей работы – это соответствие между двумя представлениями π и $\bar{\pi}^P$. Представление $\bar{\pi}^P$ имеет каноническую клеточно-матричную структуру, связанную с заданным выбором представителей смежных классов для подгрупп из $\mathcal{S}$. Следовательно, мы представляем ассоциированные операторы Гекке как клеточные матрицы, элементы которых являются “локализированными суммами” по смежным классам значений исходного представления π , ограниченного на пространство L , введенное выше (которое является аналогом фундаментальной области для действия группы Γ). В качестве следствия мы получаем точную формулу, связывающую характеры π и $\bar{\pi}^P$.

Чтобы установить связь между этими двумя представлениями, мы вводим условие суммируемости, которое обеспечивает сходимость сумм для элементов матриц в представлениях, которые мы получаем для операторов Гекке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть π_0 – унитарное представление группы G такое, что $\pi|_\Gamma$ является (не обязательно целым) кратным левого регулярного представления λ_Γ . Мы предполагаем, что существует унитарное представление π группы G в унитарную группу гильбертова пространства H , содержащего H_0 , обладающее следующими свойствами.

(i) Представление $\pi|_\Gamma$ является целым кратным левого регулярного представления λ_Γ . Следовательно, существует гильбертово подпространство L пространства H такое, что

$$H \cong l^2(\Gamma) \otimes L, \quad \pi|_\Gamma \cong \lambda_\Gamma \otimes \text{Id}_L.$$

(ii) Пусть e – единичный элемент группы G . Обозначим ортогональную проекцию из H на $L \cong \mathbb{C}e \otimes L$ через P_L . Мы считаем, что проекции из семейства $\{\pi(g)P_L\pi(g^{-1}) \mid g \in G\}$ образуют коммутативное семейство.

(iii) Предположим, что π_0 – подпредставление представления π . Тогда $H_0 \subseteq H$ является $\pi(G)$ -инвариантным и π_0 есть ограничение представления π на H_0 . Обозначим через P_0 ортогональную проекцию из H на H_0 . Ясно, что в этом случае имеем $\pi_0(g) = P_0\pi(g)P_0$, $g \in G$.

(iv) Произведение операторов P_0 и P_L является оператором со следом.

(v) Для каждых $g \in G$ и $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ сумма по смежному классу $\Gamma_0 g$

$$\sum_{\theta \in \Gamma_0 g} P_L \pi_0(\theta) P_L \quad (2)$$

сходится в пространстве операторов Гильберта–Шмидта $\mathcal{C}_2(L)$.

(vi) Сумма следов операторов в сумме (2) сходится абсолютно. Сумма (2) является оператором со следом, и его след равен сумме следов операторов в сумме.

(vii) Размерность Мюррея–фон Неймана $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H_0$ (см. [50], [44], [25]) является конечным строго положительным числом.

Условие (vii) можно интерпретировать как то, что H_0 является конечно порожденным левым гильбертовым модулем над представлением $\pi_0|_{\Gamma}$, которое является кратным левого регулярного представления группы Γ .

В основных примерах, рассматриваемых в этой работе, где представления π_0 получаются из унитарных представлений из дискретной серии (проективных) унитарных представлений группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ограничением на $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, условия (iii), (iv) следуют из вычислений в [53]. Условие (ii) выполняется автоматически, если представление π получено из унитарного представления Купмана. Действительно, в этом случае проекция P_L является оператором умножения на характеристическую функцию фундаментальной области для Γ . Кроме того, проекции из этого семейства являются операторами умножения на характеристические функции сдвигов фундаментальной области элементами из G .

Вышеупомянутое унитарное представление π_0 группы G каноническим образом определяет унитарное представление $\bar{\pi}_0^P$ пополнения Шлихтинга [48] $\bar{G}$ группы G относительно подгрупп из семейства $\mathcal{S}$. Унитарное представление $\bar{\pi}_0^P$ действует на $\bar{H}^P$, гильбертовом пространстве пополнения индуктивного предела гильбертовых пространств H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Эта конструкция строго описывается в теореме 33. Следующий результат дает явное описание клеточно-матричных коэффициентов представления $\bar{\pi}_0^P$. Это операторы Гекке, ассоциированные с исходным унитарным представлением π_0 , которые соответствуют подгруппам $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Это представление используется для того, чтобы вычислить характер представления $\bar{\pi}_0^P$. В следующей теореме мы используем обозначение $(\Gamma_0)_{\sigma} = \sigma \Gamma_0 \sigma^{-1} \cap \Gamma_0$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, $\sigma \in G$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть π_0 – унитарное представление группы G в унитарную группу $\mathcal{U}(H_0)$ гильбертова пространства H_0 . Предположим, что π_0 удовлетворяет техническим условиям (i)–(vii) из определения 1. Пусть $\bar{\pi}_0^P$ – унитарное представление группы $\bar{G}$, введенное выше.

Для каждого $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ зафиксируем семейство представителей смежных классов для Γ_0 в Γ такое, что $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{[\Gamma:\Gamma_0]} \Gamma_0 s_i$. Представим $B(l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma))$ матричной единицей

$$(e_{\Gamma_0 s_i}, e_{\Gamma_0 s_j})_{i,j=1,2,\dots,[\Gamma:\Gamma_0]}.$$

Для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и $\sigma \in G$ операторы Гекке, ассоциированные с π_0 , которые соответствуют двойному смежному классу $\Gamma_0 \sigma \Gamma_0$, таковы:

$$[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_{\sigma}] P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^P(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}}. \quad (3)$$

В силу унитарной эквивалентности

$$B(l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)) \otimes B(L) \cong B(H^{\Gamma_0})$$

и сделанного выше выбора матричной единицы, операторы Гекке в формуле (3) унитарно эквивалентны операторам из $B(l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)) \otimes B(L)$, заданным формулой

$$\sum_{i,j} \sum_{\theta \in s_i^{-1} \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_j} P_L \pi_0(\theta) P_L \otimes e_{\Gamma_0 s_i, \Gamma_0 s_j}. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет немедленно сделать следующий вывод.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для $\sigma \in G$ и $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ след оператора Гекке, введенного в (3), вычисляется по формуле

$$\mathrm{Tr} \left[[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^p(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}} \right] = \sum_{s_i} \sum_{\theta \in s_i \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_i^{-1}} \mathrm{Tr}(P_L \pi_0(\theta) P_L). \quad (5)$$

В частном случае $\Gamma_0 = \Gamma$ формула (4) дает следующее.

Предположим, что $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H_0$ конечна. Пространство H_0^Γ “виртуальных” векторов, инвариантных относительно унитарного представления $\pi|_\Gamma$, действующего на H_0 , унитарно эквивалентно образу проекции

$$\mathcal{P}_{\Gamma, L} = \sum_{\gamma \in \Gamma} P_L \pi_0(\gamma) P_L \in B(L),$$

который является конечномерным подпространством из L . Та же унитарная эквивалентность преобразует оператор Гекке, соответствующий смежному классу $\Gamma \sigma \Gamma$ и действующий на “виртуальных” Γ -инвариантных операторах, в оператор

$$\sum_{\gamma \in \Gamma \sigma \Gamma} P_L \pi_0(\gamma) P_L \in B(L), \quad \sigma \in G.$$

Сходимость в вышеприведенных формулах следует из технического предположения (v), введенного в определении 1.

В качестве следствия равенства (5) получаем формулу для характера [22], [45], [12], [17] представления $\bar{\pi}_0^p$. Это доказывает, что характер представления $\bar{\pi}_0^p$ определяется положительно определенной функцией ϕ_0 на G , заданной как

$$\phi_0(g) = \mathrm{Tr}(P_L \pi_0(g) P_L), \quad g \in G. \quad (6)$$

Мы используем обозначения и определения из формулировки теоремы 2. Мы считаем, что характер $\theta_{\bar{\pi}_0^p}$ представления $\bar{\pi}_0^p$ группы $\bar{G}$ локально интегрируем относительно меры Хаара на $\bar{G}$. Напомним, что в силу [12] и формулы (13) (см. также другое доказательство в лемме 36) имеем

$$\theta_{\bar{\pi}_0^p}(\sigma) = \lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \mathrm{Tr}(P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^p(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}}). \quad (7)$$

Для каждого элемента $g \in G$ обозначим через Γ_g^{st} его стабилизатор в Γ :

$$\Gamma_g^{\mathrm{st}} = \{\gamma \in \Gamma \mid g\gamma = \gamma g\}.$$

Используя формулы (5) и (7), получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. Значение характера $\theta_{\pi_0^R}$ на элементе $\sigma \in G$ вычисляется по формуле

$$\theta_{\pi_0^R}(\sigma) = \lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma]} \sum_{\Gamma = \bigcup_{i=1}^{[\Gamma:\Gamma_0]} \Gamma_0 s_i} \sum_{\theta \in s_i^{-1} \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_i} \text{Tr}(P_L \pi_0(\theta) P_L). \quad (8)$$

Если группа Γ_g^{st} тривиальна, то

$$\theta_{\pi_0^R}(g) = \left[\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_g]} \right] \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}(P_L \pi_0(\gamma g \gamma^{-1})), \quad g \in G. \quad (9)$$

При подходящих условиях член в правой части равенства (9) совпадает с характером унитарного представления π_0 . Предположим, что существует унитарное представление $\bar{\pi}_0^R$, продолжающее π_0 на локально компактную группу $\bar{G}^R$, содержащую G в качестве всюду плотной подгруппы. Тогда формула для следа характера представления $\bar{\pi}_0$ зависит только от следа характера представления $\bar{\pi}_0^R$.

ЛЕММА 5. Пусть π_0 – унитарное представление, удовлетворяющее условиям определения 1. Пусть $\bar{G}^R$ – большая локально компактная группа, содержащая G в качестве всюду плотной подгруппы, такая, что Γ – решетка в $\bar{G}^R$. Предположим, что выполнены следующие условия:

(а) представление π_0 продолжается до унитарного представления $\bar{\pi}_0^R$ группы $\bar{G}^R$ в унитарную группу пространства H ; более того, представление $\bar{\pi}_0^R$ имеет локально интегрируемый характер относительно меры Хаара на $\bar{G}^R$, обозначаемый через “ $\text{Tr}(\bar{\pi}_0^R(\cdot))$ ” = $\theta_{\bar{\pi}_0^R}$;

(б) представление π из определения 1 также продолжается до унитарного представления $\bar{\pi}^R$ группы $\bar{G}^R$, и равенство $\bar{\pi}_0^R(g) = P_0 \bar{\pi}^R P_0$ выполняется для всех $g \in \bar{G}^R$;

(с) множество элементов $g \in \bar{G}^R$ с нетривиальной группой Γ_g^{st} имеет нулевую меру относительно меры Хаара на $\bar{G}^R$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) для любого элемента $g \in G$ такого, как в условии (с), имеем

$$\theta_{\bar{\pi}_0^R}(g) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}_{B(L)}(P_L \pi_0(\gamma g \gamma^{-1}) P_L); \quad (10)$$

(ii) характер унитарного представления $\bar{\pi}_0$, ограниченный на G (за исключением точек $g \in G$, для которых Γ_g^{st} нетривиален), зависит только от характера представления $\bar{\pi}_0^R$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Рассмотрим сумму в формуле (8):

$$\phi_{\Gamma_0}(\sigma) = \sum_{\Gamma = \bigcup_{i=1}^{[\Gamma:\Gamma_0]} \Gamma_0 s_i} \sum_{\theta \in s_i^{-1} \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_i} \text{Tr}(P_L \pi_0(\theta) P_L), \quad \sigma \in G. \quad (11)$$

Когда $\sigma = e$ и Γ_0 – нормальная подгруппа, этот член равен

$$[\Gamma : \Gamma_0] \sum_{\substack{[\Gamma : \Gamma_0] \\ \Gamma = \bigcup_{i=1}^{\Gamma_0 s_i} \Gamma_0 s_i}} \sum_{\theta \in \Gamma_0} \text{Tr}(P_L \pi_0(\theta) P_L) = [\Gamma : \Gamma_0] \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \text{Tr}(P_L \pi_0(\gamma) P_L).$$

Нормируя и беря предел

$$\Phi_{\pi_0}(\sigma) = \lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{\phi_{\Gamma_0}(\sigma)}{\dim H^{\Gamma_0}}, \quad \sigma \in G,$$

получаем характер группы G типа, рассмотренного в [33], [16], [9], [8], [52].

Характеры, полученные в следствии 4, имеют другую природу: они принимают бесконечное значение на единице и могут принимать бесконечное значение на других элементах группы.

Ниже мы проиллюстрируем содержание теоремы 2 и следствия 4 в частном случае, когда Γ -инвариантные векторы являются автоморфными формами. Пусть $G = \text{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, p – простое число, Γ – модулярная группа, а представление $\pi_0 = \pi_n|_G$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, получено ограничением на G (проективного) унитарного представления из аналитической дискретной серии $(\pi_n)_{n \geq 2}$ полупростой группы Ли $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Пусть F – фундаментальная область для действия модулярной группы на верхней полуплоскости. Пусть $d\nu_0(z) = (\text{Im } z)^{-2} d\bar{z} dz$ – каноническая мера на $\mathbb{H}$, которая инвариантна под действием группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ преобразованиями Мёбиуса. Тогда проекция P_L , введенная в определении 1, является оператором M_{χ_F} умножения на характеристическую функцию области F на $H = L^2(\mathbb{H}, (\text{Im } z)^{-2} d\bar{z} dz)$. Унитарное представление π является унитарным представлением Купмана группы G на $L^2(\mathbb{H}, (\text{Im } z)^{-2} d\bar{z} dz)$, соответствующим действию G на $\mathbb{H}$ (см. примеры 28 и 29).

В этом частном случае проекция P_0 есть проекция Бергмана на гильбертово пространство представления π_n , которое является пространством аналитических функций на $\mathbb{H}$, суммируемых с квадратом относительно меры $d\nu_n(z) = (\text{Im } z)^{n-2} d\bar{z} dz$. Более того, техническое условие (v) из определения 1 эквивалентно условию L^2 -сходимости для воспроизводящих ядер Березина [3] операторов из суммы в (4). Это условие выполняется в описанном здесь частном случае в силу вычислений в [53] и [19; § 3.3].

Для ограниченного оператора A на гильбертовом пространстве H_n обозначим его символ Березина [3] через $\hat{A}(\bar{z}, \zeta)$, $z, \zeta \in \mathbb{H}$. Из формулы (9) тогда вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть σ – элемент из G с тривиальной группой $\Gamma_\sigma^{\text{st}}$. Тогда

$$\begin{aligned} \theta_{\pi_n^P}(\sigma) &= \left[\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_g]} \right] \int_{\mathbb{H}} \widehat{\pi_n(\sigma)}(\bar{z}, z) d\nu_0(z) \\ &= \left[\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma]} \right] \int_{\mathbb{H}} \frac{1}{\sigma z - \bar{z}} d\nu_0(z) \\ &= \left[\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma]} \right] \theta_{\pi_n}(\sigma). \end{aligned} \quad (12)$$

Тот факт, что интеграл $\int_{\mathbb{H}} \widehat{\pi_n(\sigma)}(\bar{z}, z) d\nu_0(z)$ в (12) является характером θ_{π_n} представления π_n , доказан в [32] с помощью квантизации Березина. В этом контексте формула для суммы в (9) вычислена другим методом в [53].

В разделе 7 мы применяем конструкцию Γ -инвариантных “виртуальных” векторов из теоремы 2 к диагональным представлениям группы G вида $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$, действующим на гильбертовом пространстве H_0 . Здесь π_0^{op} – комплексно сопряженное представление, ассоциированное с представлением π_0 . Мы используем унитарно эквивалентное представление гильбертовых пространств, состоящих из Γ -инвариантных векторов.

Это представление унитарно эквивалентно унитарному представлению $\text{Ad } \pi_0$, действующему на гильбертовом пространстве, состоящем из идеала операторов Гильберта–Шмидта $\mathcal{C}_2(H_0) \subseteq B(H_0)$. Пространство $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ “виртуальных” Γ_0 -инвариантных векторов является алгеброй операторов фон Неймана $X \in B(H_0)$, которые коммутируют с $\pi_0(\Gamma_0)$. Эта алгебра есть (см. пример 30) коммутант $\mathcal{A}_{\Gamma_0} = \{\pi_0(\Gamma_0)\}'$.

Для фактора M типа II_1 со следом τ мы обозначаем через $L^2(M, \tau)$ гильбертово пространство, ассоциированное с τ с помощью конструкции Гельфанда–Наймарка–Сигала [50]. Это гильбертово пространство получается с помощью гильбертова пополнения из скалярного произведения, индуцированного следом на векторном пространстве M . По предположению размерность $\dim_{\{\pi_0(\Gamma_0)\}'' H_0}$ конечна, отсюда мы заключаем [50], что $\mathcal{A}_{\Gamma_0}$ есть алгебра фон Неймана типа II . Тогда гильбертово пространство Γ_0 -инвариантных векторов является L^2 -пространством $L^2(\mathcal{A}_{\Gamma_0}, \tau)$, ассоциированным с фактором фон Неймана $\mathcal{A}_{\Gamma_0}$ типа II_1 . Индуктивный предел этих гильбертовых пространств, когда Γ_0 пробегает $\mathcal{S}$, имеет естественную интерпретацию в терминах базисной конструкции Джоунса (пример 30, см. также конструкцию в [39]).

Это особенно интересно, когда π_0 – вышеупомянутое представление π_n (т. е. $G = \text{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, p – простое, Γ – модулярная группа, π_n получено ограничением на G из дискретной серии унитарных представлений группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$). Рассмотрим унитарное представление Купмана $\pi_{\text{Куп}}$ (см. пример 28), ассоциированное с сохраняющим меру действием группы G на пространстве $\mathbb{H}$, наделенном мерой ν_0 , введенной выше.

Тогда в силу [42] или теории квантизации Березина ([3], см. также [37]) с точностью до унитарного сопряжения имеем

$$\pi_{\text{Куп}} \cong \pi_n \otimes \pi_n^{\text{op}}, \quad n \geq 2. \quad (13)$$

В силу вышеупомянутой эквивалентности анализ представления группы G на пространствах “виртуальных” Γ_0 -инвариантных векторов для представления $\pi_n \otimes \pi_n^{\text{op}}$ приводит к анализу пространств Γ_0 -инвариантных векторов, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, для представлений Купмана и соответствующего унитарного действия группы G на этих пространствах. Последнее представление соответствует действию операторов Гекке на формах Маасса [31]. Используя этот метод, мы получаем в разделе 7 (см. также [37]) конкретные алгебраические формулы, связывающие матричные коэффициенты представления π_n с выражением для операторов Гекке, ассоциированных с $\pi_{\text{Куп}}$.

Этот метод полезен для понимания унитарного представления Купмана $\pi_{\text{Коор}}$, из которого выводится действие операторов Гекке на формах Маасса. Мы используем естественный “квадратный корень” из представления $\pi_{\text{Коор}}$, задаваемый представлением из дискретной серии, как в формуле (13). Представление $\pi_n \otimes \pi_n^{\text{оп}}$ лучше поддается обработке, так как с помощью интерпретации в терминах операторных алгебр канонически определяются гильбертовы пространства “виртуальных” Γ_0 -инвариантных векторов, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Мы поясняем эту конструкцию ниже.

Пусть $\mathcal{H}(G)$ – алгебра фон Неймана, порожденная операторами правой свертки $\rho(g)$, $g \in G$, действующими на $\ell^2(G)$. Это коммутант алгебры левых свертков $\mathcal{L}(G)$, порожденной операторами левой свертки λ_g , $g \in G$, действующими на том же гильбертовом пространстве.

Рассмотрим следующие алгебры, связанные с включениями $\Gamma \subseteq G$, $K \subseteq \overline{G}$. Пусть $\mathcal{H}_0(K, \overline{G}) = \mathbb{C}(K \backslash \overline{G} / K)$ – алгебра двойных смежных классов подгруппы K в $\overline{G}$ (см. [1], [28]). Обозначим алгебру Гекке $\mathbb{C}(\Gamma \backslash G / \Gamma)$, порожденную двойными смежными классами подгруппы Γ в G , через $\mathcal{H}_0(G, \Gamma)$. Последняя алгебра изоморфна алгебре Гекке $\mathcal{H}_0(K, \overline{G})$. Алгебра Гекке обладает естественной операцией инволюции, которая индуцирует структуру $*$ -алгебры.

Алгебра Гекке обладает каноническим точным $*$ -представлением (см. [7]) в $B(\ell^2(\Gamma \backslash G))$. Обозначим элементы стандартного базиса пространства $\ell^2(\Gamma \backslash G)$ через $[\Gamma\sigma]$, $\sigma \in G$. Наложенное нами условие равенства индексов $[\Gamma : \Gamma_\sigma] = [\Gamma : \Gamma_{\sigma^{-1}}]$, $\sigma \in G$, означает, что состояние $\langle \cdot, [\Gamma], [\Gamma] \rangle$, которое определено на $B(\ell^2(\Gamma \backslash G))$, становится следом при ограничении на образ алгебры Гекке. Приведенная C^* -алгебра алгебры Гекке является замыканием по норме в представлении в $B(\ell^2(\Gamma \backslash G))$ алгебры Гекке $\mathcal{H}_0(G, \Gamma)$. Она обозначается через $\mathcal{H}_{\text{red}}(G, \Gamma)$. Ясно, что $\mathcal{H}_0(G, \Gamma) \cong \mathcal{H}_0(K, \overline{G})$.

C^* -алгебра $C^*(\overline{G})$ содержит (вводимую в определении 8 ниже) каноническую систему операторов [35], ассоциированную с максимальной компактной подгруппой K . Мы поясним ниже, что $*$ -представления этой системы операторов, указанные в формуле (18) леммы 9, содержат всю информацию о представлении π_0 . Эти морфизмы являются основными строительными блоками представления алгебр Гекке, ассоциированного с представлением вида $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{оп}}$ (см. теоремы 10 и 12). Главным инструментом для изучения унитарных представлений группы G вида $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{оп}} \cong \text{Ad } \pi_0$ является каноническое представление алгебры Гекке $\mathcal{H}_0(G, \Gamma)$ в $\mathcal{H}(G) \otimes B(L)$, которое описывается ниже.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $L(K, \overline{G}) = \mathbb{C}(\chi_{\sigma K} \mid \sigma \in G)$ – линейное подпространство пространства $C^*(\overline{G})$, порожденное характеристическими функциями правых смежных классов. Тогда $L(K, \overline{G})^* = \mathbb{C}(\chi_{K\sigma} \mid \sigma \in G)$. Введем также пространство

$$\tilde{L}(K, \overline{G}) = L^\infty(\overline{G}, \mu) L(K, \overline{G}) \subseteq C^*(\overline{G} \rtimes L^\infty(\overline{G}, \mu)).$$

Рассмотрим следующие системы операторов [35]:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(K, \overline{G}) &= L(K, \overline{G})(L(K, \overline{G}))^* \subseteq C^*(\overline{G}), \\ \tilde{\mathcal{O}}(K, \overline{G}) &= \tilde{L}(K, \overline{G})(\tilde{L}(K, \overline{G}))^* \subseteq C^*(\overline{G} \rtimes L^\infty(\overline{G}, \mu)). \end{aligned} \tag{14}$$

В этих формулах произведение вычисляется в C^* -алгебрах $C^*(\overline{G})$ и $C^*(\overline{G} \rtimes L^\infty(\overline{G}, \mu))$ соответственно.

Тогда ясно, что выполняется следующее:

- (i) система $\mathcal{O}(K, \overline{G})$ линейно порождается характеристическими функциями вида $\chi_{\sigma_1 K \sigma_2}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in G$;
- (ii) $L(K, \overline{G})$ и $(L(K, \overline{G}))^*$ – подпространства в $\mathcal{O}(K, \overline{G})$;
- (iii) имеется каноническое спаривание

$$L(K, \overline{G}) \times L(K, \overline{G}) \rightarrow \mathcal{O}(K, \overline{G}); \quad (15)$$

это спаривание отображает $x, y \in L(K, \overline{G})$ в $xy^* \in \mathcal{O}(K, \overline{G})$.

Пусть $\mathcal{E}$ есть C^* -алгебра. Будем говорить, что линейное отображение $\Phi: \mathcal{O}(K, \overline{G}) \rightarrow \mathcal{E}$ является $*$ -представлением системы операторов $\mathcal{O}(K, \overline{G})$, если

$$\Phi(xy^*) = \Phi(x)(\Phi(y))^*, \quad x, y \in L(K, \overline{G}).$$

$*$ -представление для системы операторов $\tilde{\mathcal{O}}(K, \overline{G})$ является линейным как бимодуль над алгеброй $L^\infty(\overline{G}, \mu)$.

Алгебра Гекке $\mathcal{H}_0(K, \overline{G})$ есть пересечение $L(K, \overline{G}) \cap (L(K, \overline{G}))^*$. Ясно, что она замкнута относительно вышеупомянутой операции спаривания. Очевидно, что $*$ -представление системы операторов $\mathcal{O}(K, \overline{G})$, будучи ограниченным на алгебру Гекке, становится представлением $*$ -алгебры.

Пусть G , Γ , π , π_0 , P_0 , P_L – такие, как в определении 1. В утверждениях оставшейся части этого раздела для простоты изложения будем считать, что группы Γ , G имеют бесконечные нетривиальные классы сопряженности. Из этого предположения следует, что алгебры фон Неймана, ассоциированные ниже с вышеупомянутыми группами, имеют единственные следы.

Мы строим $*$ -представления системы операторов $\mathcal{O}(K, \overline{G})$, принимающие значения в ассоциированных алгебрах фон Неймана, описываемых ниже. Рассмотрим следующие алгебры фон Неймана:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\pi(\Gamma)\}' \cong \mathcal{R}(\Gamma) \overline{\otimes} B(L) \subseteq \mathcal{B} = \mathcal{R}(G) \overline{\otimes} B(L), \\ \mathcal{A}_0 &= \pi_0(\Gamma)' = P_0 \mathcal{A} P_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются алгебрами фон Неймана типа II. Если пространство L бесконечно, то $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – алгебры фон Неймана типа II_∞ . В представлении для $\{\pi(\Gamma)\}'$, введенном в (16), проекция P_0 , которая по условию коммутирует с $\pi(\Gamma)$ и потому принадлежит $\mathcal{A}$, задается формулой

$$P_0 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(\gamma) \otimes P_L \pi_0(\gamma) P_L \in \mathcal{C}_1(\mathcal{A}). \quad (17)$$

Для заданной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, наделенной точным полуконечным следом $T = T_{\mathcal{M}}$, через $\mathcal{C}_1(\mathcal{M})$ обозначаем идеал операторов со следом, ассоциированных с $\mathcal{M}$ [50].

С унитарным представлением π_0 мы связываем $*$ -представление системы операторов, построенное в определении 8.

ЛЕММА 9. *Предположим, что $G, \Gamma, \pi_0, P_0, P_L$ – такие, как в определении 1. Для смежного класса $C = g\bar{\Gamma}_0$ в $\bar{G}$ положим по аналогии с формулой (17)*

$$\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(C) = \sum_{\theta \in C} \rho(\theta) \otimes P_L \pi_0(\theta) P_L \in \mathcal{C}_1(\mathcal{B}).$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Отображение $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$, ограниченное на $\mathcal{O}(K, G)$, является $*$ -представлением системы операторов $\mathcal{O}(K, G)$. В частности,*

$$\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{\sigma_1 K}) [\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{\sigma_2 K})]^* = \tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{\sigma_1 K \sigma_2^{-1}}), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G. \quad (18)$$

(ii) *В силу (17) имеем $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_K) = P_0$, откуда в силу (i) следует, что*

$$\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{\sigma_1 K}) = \tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{\sigma_1 K}) P_0, \quad \tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{K \sigma_1}) = P_0 \tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_{K \sigma_1}), \quad \sigma_1 \in G.$$

(iii) *В силу (ii) ограничение $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$ на алгебру Гекке $\mathcal{H}_0(K, \bar{G}) \cong \mathcal{H}_0(\Gamma, G)$ принимает значения в алгебре $\mathcal{A}_0 = P_0 \mathcal{B} P_0$.*

(iv) *$\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}|_{\mathcal{H}_0(K, \bar{G})}$ сохраняет след и, значит, распространяется по непрерывности на C^* -представление приведенной C^* -алгебры Гекке $\mathcal{H}_{\text{red}}(\Gamma, G)$ со значениями в $\mathcal{A}_0$.*

Представление $*$ -алгебр алгебры Гекке из п. (iii) используется для описания операторов Гекке на Γ -инвариантных векторах, ассоциированных с диагональным унитарным представлением $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ группы G . Как было объяснено выше, последнее представление унитарно эквивалентно $\text{Ad } \pi_0$, а гильбертово пространство Γ -инвариантных векторов канонически отождествляется с L^2 -пространством [50], ассоциированным с коммутантом $\{\pi_n(\Gamma)\}'$ алгебры фон Неймана. Формула для операторов Гекке вычисляется в следующей теореме. Случай, когда $\dim_{\mathbb{C}} L = 1$, использовался в [37] для получения оценок существенного спектра операторов Гекке, действующих на формах Маасса. Общий случай произвольной размерности Мюррея–фон Неймана был рассмотрен в работе [38].

Операторы Гекке автоматически являются вполне положительными отображениями. Они получаются с помощью математических ожиданий на алгебрах фон Неймана [44], [50]. Пусть

$$E_{P_0(\mathcal{A}(\Gamma) \otimes B(L))P_0}^{P_0(\mathcal{A}(G) \otimes B(L))P_0}$$

– каноническое нормальное условное математическое ожидание, отображающее фактор типа II_1 $P_0(\mathcal{A}(G) \otimes B(L))P_0$ на подфактор $P_0(\mathcal{A}(\Gamma) \otimes B(L))P_0$.

ТЕОРЕМА 10. *Оператор Гекке $\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])$, ассоциированный с представлением $\text{Ad } \pi_0$ и соответствующий смежному классу $[\Gamma\sigma\Gamma]$ для $\sigma \in G$, является самосопряженным оператором, действующим на пространстве $L^2(\mathcal{A}_0, \tau) = L^2(\{\pi_0(\Gamma)\}', \tau)$.*

Тогда $\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])$ определяется своими значениями на алгебре $\mathcal{A}_0$. Для $\sigma \in G$ оператор Гекке $\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])$ ставит в соответствие элементу

$$X \in \{\pi_0(\Gamma)\}' = \mathcal{A}_0 = P_0 \mathcal{B} P_0 = P_0(\mathcal{A}(\Gamma) \otimes B(L))P_0$$

оператор

$$\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])(X) = E_{P_0(\mathcal{R}(\Gamma)\otimes B(L))P_0}^{P_0(\mathcal{R}(G)\otimes B(L))P_0}(\tilde{\Phi}_{\pi_0,L}(\Gamma\sigma\Gamma)X(\tilde{\Phi}_{\pi_0,L}(\Gamma\sigma\Gamma))^*). \quad (19)$$

Это теорема 3.2 из [38], обобщающая результаты из [37]. Формулировка адаптирована к рамкам настоящей работы. Данный формализм доказывает, что, как только пространство L выбрано, представление алгебры Гекке является каноническим.

Построим каноническое $*$ -представление $\overline{\mathcal{D}\Phi}$ алгебры Гекке $\mathcal{H}_0(K, \overline{G})$ в каноническую “двойную” алгебру (см. ниже) такую, что все представления алгебры Гекке, как в формуле (19), получаются композицией $\overline{\mathcal{D}\Phi}$ с факторотображением.

Мы выполним построение представления $\overline{\mathcal{D}\Phi}$ только в случае, когда размерность фон Неймана $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H_0$ равна 1. В этом контексте $\mathcal{A}_0$ – это просто алгебра $\mathcal{R}(\Gamma)$. Рассуждение легко распространить и на случай размерности фон Неймана, большей 1, но формулы будут более сложными.

Тот факт, что размерность фон Неймана алгебры фон Неймана типа II, порожденной $\pi_0(\Gamma)$, равна 1, означает, что представление $\pi|_{\tilde{\Gamma}}$ допускает циклический следовой вектор ζ . В этом случае $*$ -представление $\tilde{\Phi}_{\pi_0,L}$, введенное в лемме 9, заменяется на построенное ниже представление t канонической системы, введенной в определении 8, принимающее значения в $\mathcal{L}(G)$. Напомним, что алгебра $\mathcal{L}(G)$ антиизоморфна $\mathcal{R}(G)$.

Для $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ и для подмножества группы G вида $A = \sigma_1\Gamma\sigma_2$ положим

$$t(\sigma_1 K \sigma_2) = \sum_{\theta \in A} \overline{\langle \pi_0(\theta)\zeta, \zeta \rangle} \lambda_\theta \in \mathcal{L}(G). \quad (20)$$

Тогда по лемме 9, полагая пространство L равным $\mathbb{C}\zeta$, мы выводим (см. замечание 42), что t определяет $*$ -представление системы операторов $\mathcal{O}(K, G)$ со значениями в алгебре фон Неймана $\mathcal{L}(G)$ (комплексное сопряжение в формуле (20) связано с тем, что через канонический антиизоморфизм мы переключаемся с алгебры $\mathcal{R}(G)$ на алгебру $\mathcal{L}(G)$).

Алгебра Гекке $*$ -представления Ψ , введенная в (19), теперь принимает значения в $\mathcal{L}(\Gamma)$ и задается формулой

$$\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])(X) = E_{\mathcal{L}(\Gamma)}^{\mathcal{L}(G)}(t(\Gamma\sigma\Gamma)X(t(\Gamma\sigma\Gamma))^*), \quad \sigma \in G. \quad (21)$$

Линейный оператор $\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])$, $\sigma \in G$, очевидным образом продолжается на пространство Гельфанда–Неймарка–Сигала $\ell^2(\Gamma)$ (см., например, [50]), рассматриваемое относительно канонического следа.

Все операторы Гекке $\Psi([\Gamma\sigma\Gamma])$, $\sigma \in G$, являются вполне положительными и унитарными. Отсюда следует, что представление в (21) продолжается, забывая структуру алгебры на пространстве образа, до $*$ -представления Ψ_0 алгебры $\mathcal{H}_0(G, \Gamma)$ со значениями в $B(\ell^2(\Gamma) \ominus \mathbb{C}1)$. Как объясняется в примере 29 (см. также [37], [39]), справедливость гипотезы Рамануджана–Петерссона на формах Маасса в частном случае $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$ эквивалентна тому, что представление Ψ_0 продолжается до представления приведенной C^* -алгебры Гекке $\mathcal{H}_{\mathrm{red}}(G, \Gamma)$.

Мы докажем, что представление Ψ алгебры Гекке, введенное в (21), получается из канонического представления $\overline{\mathcal{D}\Phi}$ алгебры Гекке.

Введем следующие два скрещенных произведения C^* -алгебр. Они являются расширением с двумя переменными алгебр Рое [43], [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Рассмотрим скрещенные произведения C^* -алгебр:

$$\mathcal{DR}(G) = \chi_K(C^*((G \times G^{\text{op}}) \rtimes L^\infty(\overline{G}, \mu)))\chi_K, \quad (22)$$

$$\mathcal{DR}(\overline{G}) = \chi_K(C^*((\overline{G} \times \overline{G}^{\text{op}}) \rtimes L^\infty(\overline{G}, \mu)))\chi_K. \quad (23)$$

C^* -алгебра $\mathcal{DR}(G)$ обладает каноническим представлением типа Купмана α в $B(\ell^2(\Gamma))$, получающимся следующим образом: пусть $G \times G^{\text{op}}$ действует как группоид на Γ левым и правым умножением, причем операция определена, как только результат умножения принадлежит Γ . С другой стороны, $C(K)$ действует умножением на $\ell^\infty(\Gamma)$ и потому на $\ell^2(\Gamma)$.

Заметим, что алгебры, введенные в определении 11, являются углами (приведенными проекцией $\chi_K \in L^\infty(\overline{G}, \mu)$) в большем скрещенном произведении C^* -алгебр, соответствующими сохраняющим меру действиям $G \times G^{\text{op}}$ и $\overline{G} \times \overline{G}^{\text{op}}$ на $\overline{G}$. Поскольку действие сохраняет меру, эти две алгебры обладают очевидными соответствующими приведенными скрещенными произведениями C^* -алгебр.

Приводимая ниже теорема 12 утверждает, что представление алгебр Гекке Ψ , введенное в (21), которое на самом деле является представлением алгебр Гекке, ассоциированным с представлением $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$, получается из внутреннего представления алгебры Гекке (обозначаемого через $\mathcal{D}\Phi$) со значениями в “двойной” алгебре $\mathcal{DR}(G)$. Чтобы получить представление алгебр Гекке Ψ , берут композицию представления $*$ -алгебр $\mathcal{D}\Phi$ с представлением типа Купмана α алгебры $\mathcal{DR}(G)$, введенным в определении 11.

Так как представление $*$ -алгебр $\mathcal{D}\Phi$ продолжается (ввиду того, что оно сохраняет след) на приведенную C^* -алгебру Гекке, препятствие (если оно есть) к продолжению представления Ψ_0 на приведенную C^* -алгебру Гекке $\mathcal{H}_{\text{red}}(G, \Gamma)$ (которое, как пояснено выше, в случае представления π_n является препятствием к выполнению гипотезы Рамануджана–Петерссона на формах Маасса [37]) лежит в ядре вышеупомянутого канонического представления α , пересеченном с образом представления $\mathcal{D}\Phi$.

Если f – функция на $\overline{G}$, обозначим соответствующий сверточный элемент в $C^*(\overline{G})$ через $L(f)$. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 12. (i) *Соответствие*

$$[K\sigma K] \rightarrow \chi_K(L(\chi_{K\sigma K}) \otimes L(\chi_{K\sigma K})^{\text{op}})\chi_K, \quad \sigma \in G,$$

продолжается по линейности на $*$ -алгебру представления $\overline{\mathcal{D}\Phi}$ алгебры Гекке $\mathcal{H}_0(K, G)$ в $\mathcal{DR}(\overline{G})$. Это представление сохраняет след, и, следовательно, оно очевидным образом продолжается на $\mathcal{H}_{\text{red}}(\Gamma, G)$, когда значения рассматриваются в приведенной C^* -алгебре со скрещенным произведением, ассоциированной с $\mathcal{DR}(\overline{G})$.

(ii) $*$ -представление t системы операторов $\mathcal{O}(K, \overline{G})$, введенное в (20), продолжается до $\mathcal{DR}(G)$ -значного $*$ -представления t_2 системы операторов $\mathcal{O}$, содержащейся в $\mathcal{DR}(\overline{G})$. Система операторов $\mathcal{O}$ содержит образ $\overline{\mathcal{DF}}$.

(iii) Композиция $\mathcal{DF} = t_2 \circ \overline{\mathcal{DF}}$, действующая по формуле

$$[\Gamma\sigma\Gamma] \rightarrow \chi_K(t(\Gamma\sigma\Gamma) \otimes (t(\Gamma\sigma\Gamma))^{\text{op}})\chi_K,$$

продолжается до представления $*$ -алгебр алгебры Гекке $\mathcal{H}_{\text{red}}(\Gamma, G)$ в приведенную C^* -алгебру скрещенного произведения, ассоциированную с $\mathcal{DR}(G)$.

(iv) Пусть α – представление из определения 11, и пусть Ψ – алгебра Гекке, введенная формулой (21). Тогда

$$\Psi = \alpha \circ \mathcal{DF} = \alpha \circ t_2 \circ \overline{\mathcal{DF}}. \quad (24)$$

Автор глубоко признателен Р. И. Григорчуку, А. Любоцки и Л. Паунеску, воодушевившим его на написание этой работы. Автор выражает искреннюю благодарность У. Хаагерупу, П. де ля Арпу, П. Куцко, Х. Московичи, Р. Несту, Т. Стигеру, Полу Гаретту, Виченциу Пашолу, Александру Попа и пользователю plusepsilon.de на [mathoverflow](https://mathoverflow.net) за ряд комментариев по вопросам, связанным с этой работой, Р. И. Григорчуку и Татьяне Смирновой-Нагнибеда за обсуждения по теме этой работы и, в частности, по центральным характеристам группы, Дж. Петерссону и А. Тому за объяснение значения результатов работы [33], Н. Озаве за предоставление автору для опубликования его отредактированных заметок [40] по работе автора [37], а также Ф. Бока за комментарии по этой работе и за помощь в улучшении стиля изложения. Автор благодарен факультету математических наук Копенгагенского университета за теплый прием на последних этапах этой работы.

2. Схема работы

Мы описываем схему построения гильбертовых пространств “виртуальных” Γ -инвариантных векторов и унитарного действия группы G на индуктивном пределе этих пространств. Напомним (см. введение), что Γ – почти нормальная подгруппа группы G , т.е. для всех $\sigma \in G$ группа $\Gamma_\sigma = \sigma\Gamma\sigma^{-1} \cap \Gamma$ имеет конечный индекс в Γ . В этой работе мы предполагаем, что для всех $\sigma \in G$ значения групповых индексов $[\Gamma : \Gamma_\sigma]$ и $[\Gamma : \Gamma_{\sigma^{-1}}]$ равны. Это предположение выполняется автоматически, если Γ – группа с бесконечными нетривиальными классами сопряженности при наличии представления π_0 как в определении 1 (например, в силу теории индексов Джоунса [25]). Мы также предполагаем, что семейство $\mathcal{S}$, порожденное через операцию пересечения подгруппами Γ_σ , $\sigma \in G$, разделяет точки из Γ . Пусть K – проконечное пополнение группы Γ относительно семейства $\mathcal{S}$.

Сначала рассмотрим унитарное представление π группы G , обладающее свойствами (i), (ii) из определения 1. В этом случае $\pi|_\Gamma$ является целым кратным регулярного представления. Чтобы построить Γ -инвариантные векторы, предположим, что H содержится в большем векторном пространстве $\mathcal{V}$ и что представление π продолжается до представления $\pi_\mathcal{V}$ группы G в группу

линейных изоморфизмов пространства $\mathcal{V}$. Мы предполагаем, что пространство $\mathcal{V}^\Gamma$, состоящее из векторов пространства $\mathcal{V}$, неподвижных относительно $\pi_\mathcal{V}(\Gamma)$, нетривиально. Чтобы построить представление $\bar{\pi}^P$, одновременно рассматриваются пространства $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ векторов из $\mathcal{V}$, неподвижных относительно действия $\pi_\mathcal{V}(\Gamma_0)$, где Γ_0 – любая группа, сопряженная в G с подгруппой из $\mathcal{S}$. Заметим, что $\pi_\mathcal{V}(\sigma)$ для $\sigma \in G$ переводит векторное пространство $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ в $\mathcal{V}^{\sigma\Gamma_0\sigma^{-1}}$.

Мы строим структуру гильбертова пространства на пространствах $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$, которая определяет гильбертовы пространства H^{Γ_0} векторов, неподвижных относительно Γ_0 , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. На скалярное произведение в пространствах инвариантных векторов мы налагаем следующее условие: включения

$$H^{\Gamma_0} \subseteq H^{\Gamma_1}, \quad \Gamma_0, \Gamma_1 \in \mathcal{S}, \quad \Gamma_1 \subseteq \Gamma_0,$$

являются изометрическими и $\pi_\mathcal{V}(\sigma)$ для $\sigma \in G$ изометрически отображает $H^{\Gamma_0 \cap \Gamma_{\sigma^{-1}}}$ на $H^{\sigma\Gamma_0\sigma^{-1} \cap \Gamma_\sigma}$.

Используя эту процедуру, получаем (см. формулу (35)) структуру предгильбертова пространства на объединении $\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} H^{\Gamma_0}$. Пусть $\bar{H}^P$ – гильбертово пространство пополнения этого объединения. Ясно, что $\pi_\mathcal{V}$ индуцирует представление группы G в изоморфизмы пространства $\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} \mathcal{V}^{\Gamma_0}$.

Из условий, налагаемых нами на скалярные произведения в гильбертовых пространствах H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, следует, что $\pi_\mathcal{V}$ индуцирует унитарное представление $\bar{\pi}^P$ группы G в унитарную группу $\mathcal{U}(\bar{H}^P)$ гильбертова пространства $\bar{H}^P$. Обозначение $\bar{\pi}^P$ над π означает вышеупомянутую операцию пополнения, состоящую в переходе от π к унитарному представлению $\bar{\pi}^P$ на пополненном гильбертовом пространстве объединения пространств Γ_0 -инвариантных векторов, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$.

Напомним, что пополнение Шлихтинга $\bar{G}$ (см., например, [48], [51], [26], [29]) дискретной группы G относительно подгрупп из $\mathcal{S}$ является локально компактной вполне несвязной группой, полученной как объединение непересекающихся двойных смежных классов $K\sigma K$, с очевидным отношением умножения, где $\Gamma\sigma\Gamma$ пробегает множество представителей двойных смежных классов для Γ в G (см. также [4], [7], [21]).

Пусть $d_\pi = \dim_{\{\pi(\Gamma)\}''} H_0 \in \mathbb{N}$ – размерность фон Неймана пространства H_0 как модуля над фактором типа II $\{\pi(\Gamma)\}''$ (определения и обозначения см. в [19; § 3.3]). Мы докажем (лемма 26), что левое регулярное представление λ_K группы K в унитарную группу $\mathcal{U}(L^2(K, \mu))$ имеет кратность d_π в $\bar{\pi}^P|_K$.

Пусть μ – нормированная мера Хаара на K ; продолжим ее на локально компактную группу $\bar{G}$ – до меры Хаара μ , нормированной условием $\mu(K) = 1$. Из предположения, что $[\Gamma : \Gamma_\sigma] = [\Gamma : \Gamma_{\sigma^{-1}}]$ для всех σ в G , следует, что мера μ бивариантна относительно левых и правых сдвигов элементами группы $\bar{G}$.

Распространим построение вышеупомянутого унитарного представления на случай, когда π_0 – унитарное представление из определения 1. В этом случае унитарное представление $\pi|_\Gamma$ уже не является кратным левому регулярному представлению группы Γ , но оно является подпредставлением большего представления π с упомянутыми выше свойствами.

Мы доказываем, что описанное выше построение, которое мы провели для того, чтобы получить унитарное представление $\bar{\pi}^P$, можно повторить для π_0 . Мы получаем унитарное представление $\bar{\pi}_0^P$ группы $\bar{G}$, ассоциированное с действием исходной группы G на пространствах Γ_0 -инвариантных векторов, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Представление $\bar{\pi}_0^P$ естественным образом продолжается на C^* -алгебру локально компактной группы $\bar{G}$. Оно также продолжается до представления C^* -алгебр полной C^* -алгебры, ассоциированной одновременно с группами G и $\bar{G}$ (см. определение 16).

В теореме 34 отмечается, что “клеточно-матричные коэффициенты” представления $\bar{\pi}_0^P$ являются операторами Гекке, ассоциированными с представлением $\bar{\pi}_0^P$ и соответствующими уровню Γ_0 , где группа $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ определяется размером “клетки”. Мы используем это в теореме 2, чтобы найти явную формулу (см. формулу (4)) для операторов Гекке в терминах параметров из представления π_0 .

Один из результатов этой работы – связь между представлениями π_0 и $\bar{\pi}_0^P$. Представление $\bar{\pi}_0^P$ является представлением типа I группы $\bar{G}$. Поэтому оно имеет ассоциированный характер [22], [45], [17], который мы обозначаем через $\theta_{\bar{\pi}_0^P} = \text{“Tr”}\bar{\pi}_0^P$. Мы доказываем (см. следствие 4), что значения характера $\theta_{\bar{\pi}_0^P}(g)$, вычисленные на $g \in G$, определяются суммированием по смежным классам значений положительно определенной функции ϕ_0 на G , введенной в (6). Та же положительно определенная функция определяет формулу для “Tr $\pi_0(g)$ ” исходного представления π_0 .

Основная модель унитарных представлений, рассмотренных выше, – представление пространств Γ_0 -инвариантных векторов в случае левого регулярного представления λ_G группы G в $\mathcal{U}(l^2(G))$ (более подробное изложение см. в примере 27 раздела 4). В этом случае гильбертовы пространства H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, являются гильбертовыми пространствами $l^2(\Gamma_0 \backslash G)$ со скалярным произведением, нормированным так, что включения $l^2(\Gamma_0 \backslash G) \subseteq l^2(\Gamma_1 \backslash G)$ изометричны для $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$. Гильбертово пространство $\bar{H}^P$ есть просто $L^2(\bar{G}, \mu)$, и в этом частном случае представление $\bar{\pi}^P$ есть просто левое регулярное представление группы $\bar{G}$ в унитарную группу $\mathcal{U}(L^2(\bar{G}, \mu))$.

Напомним (см. раздел 1), что алгебра Гекке $\mathcal{H}_0(\Gamma, G)$ двойных смежных классов подгруппы Γ в G имеет каноническое вложение $*$ -алгебр в $B(l^2(\Gamma \backslash G))$. Ее замыкание в равномерной норме является C^* -алгеброй $\mathcal{H}_{\text{red}}(\Gamma, G)$, называемой приведенной C^* -алгеброй Гекке – по аналогии с приведенной C^* -алгеброй дискретной группы [7], [20], [51], [2], [14]). Представление

$$\mathcal{H}_{\text{red}}(\Gamma, G) \subseteq B(l^2(\Gamma \backslash G))$$

называется левым регулярным представлением алгебры Гекке. Коммутант порождается правым квазирегулярным представлением $\rho_{\Gamma \backslash G}$ группы G в унитарную группу пространства $l^2(\Gamma \backslash G)$ (см., например, [7]).

Содержание проблемы Рамануджана–Петерссона состоит в нахождении ограничений на рост матричных коэффициентов и собственных значений для представлений алгебры Гекке на гильбертовых пространствах Γ -инвариантных

векторов, ассоциированных с унитарным представлением π группы G , рассмотренным выше. Гипотеза Рамануджана–Петерссона фактически предлагает ответ на вопрос [37], когда матричные коэффициенты представления алгебры $\mathcal{H}_0(\Gamma, G)$, ассоциированного с унитарным представлением π , являются слабыми пределами выпуклых комбинаций матричных коэффициентов алгебры Гекке для левого регулярного представления алгебры Гекке.

В терминологии данной работы это эквивалентно выяснению, когда сферические функции (матричные коэффициенты, соответствующие векторам, неподвижным относительно K), ассоциированные с представлением $\bar{\pi}_0^P$ группы $\bar{G}$, слабо содержатся в левом регулярном представлении алгебры Гекке. Ясно, что это эквивалентно тому, что представление $\bar{\pi}_0^P$ слабо содержится в левом регулярном представлении группы $\bar{G}$, действующей левыми сдвигами на $L^2(\bar{G}, \mu)$. Гипотеза Рамануджана–Петерссона доказана для автоморфных форм П. Делинем [15]. Для форм Маасса [31] в общей постановке проблема открыта (см. [49], [47], [24], [11], [37]). Мы формулируем следующую проблему.

ПРОБЛЕМА (обобщенная проблема Рамануджана–Петерссона). *Найти условия на представление π_0 , при которых $\bar{\pi}_0^P$ слабо содержится в левом регулярном представлении $\lambda_{\bar{G}}$ группы $\bar{G}$ на $L^2(\bar{G}, \mu)$. (Достаточно найти условия на унитарное представление π группы G , при которых унитарное представление $\bar{\pi}_0^P|_G$ группы G слабо содержится в унитарном представлении $\lambda_{\bar{G}}|_G$.)*

В случае унитарного представления π_n группы $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$ (p – простое число, $n \in \mathbb{N}$), полученного ограничением из дискретной серии представлений группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, представления $\bar{\pi}_n^P$ содержат всю информацию группового гармонического анализа о пространствах автоморфных форм (здесь группа Γ – это $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$). Сферические матричные коэффициенты группы $\bar{\pi}_n^P$ кодируют информацию о собственных значениях операторов Гекке.

Ниже мы приводим примеры представлений π и ассоциированного представления $\bar{\pi}^P$. Более детальное изложение см. в разделе 4. Самый простой случай – когда указанное выше унитарное представление π группы G имеет также то свойство, что $\pi|_{\Gamma}$ есть целое кратное левого регулярного представления группы Γ . В терминологии размерности Мюррея–фон Неймана (см. [19; § 3.3]) это случай, когда $\dim_{\{\pi(\Gamma)\}''} H$ – целое число. В этом случае, как объяснено выше, существует гильбертово подпространство L пространства H со свойством, вводимым следующим определением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть π – указанное выше унитарное представление группы G . Рассмотрим подпространство L пространства H такое, что $\pi(\gamma)L$ ортогонально L для $\gamma \neq e$. Назовем такое пространство Γ -блуждающим подпространством для π . Если вдобавок $H = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma)L$, то такое подпространство будем называть Γ -блуждающим порождающим подпространством.

В описанном выше контексте гильбертовы пространства Γ_0 -инвариантных векторов канонически отождествляются с гильбертовыми пространствами $L \otimes l^2(\Gamma_0 \backslash G)$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Напомним, что K – проконечное пополнение группы Γ относительно подгрупп из $\mathcal{S}$. Пространство $\bar{H}^P$ отождествляется с $L \otimes L^2(K, \mu)$. Проблема состоит в отождествлении представления групп G и $\bar{G}$ на $\bar{H}^P$.

Описанная выше ситуация имеет место, например, в случае (см. пример 28), когда $(\mathcal{X}, \nu)$ – бесконечномерное пространство, на котором G действует сохраняющими меру преобразованиями. В этом случае $H = L^2(\mathcal{X}, \nu)$ и π – представление Купмана $\pi_{\text{Куп}}$ (см., например, [27]):

$$(\pi_{\text{Куп}}(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad g \in G, \quad f \in L^2(\mathcal{X}, \nu). \quad (25)$$

Предположим, что ограничение действия группы G на Γ допускает фундаментальную область F . Тогда можно положить $L = L^2(F, \nu|_F)$. Это Γ -блуждающее порождающее подпространство, ассоциированное с представлением $\pi_{\text{Куп}}$. В этом случае $\dim_{\{\pi_{\text{Куп}}(\Gamma)\}''} H = \infty$. Тогда $\overline{H}^p = L^2(F, \nu|_F) \otimes L^2(K, \mu)$. Представление $\overline{\pi}_{\text{Куп}}^p$ определяется Γ -значным коциклом на $G \times F$, определяемым действием группы G на $\mathcal{X}$ при отождествлении $\mathcal{X} \cong F \times \Gamma$. Чтобы получить представление $\overline{\pi}_{\text{Куп}}^p$, этот коцикл рассматривают как имеющий значения в K .

Пусть π_0 – представление группы G , обладающее свойствами, перечисленными в определении 1. Они обычно выполняются, когда $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H$ не целое. А последнее имеет место, когда Γ -инвариантные векторы являются автоморфными формами.

В этом случае $G = \text{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, p – простое, Γ – модулярная группа и $H_n = H^2(\mathbb{H}, \nu_n)$. Здесь ν_n – это мера $(\text{Im } z)^{n-2} d\bar{z} dz$ на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. Представления $\pi_0 = \pi_n$ получаются ограничением на G представлений из дискретной серии $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2}$ унитарных представлений группы $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ (см., например, [30]). В этом случае нет канонического блуждающего подпространства L , поскольку, как доказано в [19; § 3.3.d],

$$\dim_{\{\pi_n(\Gamma)\}''} H_n = \dim_{\Gamma} H_n = \frac{n-1}{12}.$$

Основанием для предыдущего утверждения о несуществовании служит то, что если такое пространство L существует, то

$$\dim_{\mathbb{C}} L = \dim_{\Gamma} H_n.$$

Это невозможно, если $(n-1)/12$ не целое.

В теории автоморфных форм проблема построения гильбертовых пространств Γ -инвариантных векторов решается с помощью фундаментальной области и скалярного произведения Петерссона [34], которое состоит в интегрировании по фундаментальной области действием проекции P_L на пространство L .

Предполагается, что существует унитарное представление $\hat{\pi}_n$ на большем гильбертовом пространстве, содержащее π_n в качестве подпредставления из определения 1. В этом случае (см. пример 29) большее гильбертово пространство – это $H = L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$. Унитарное представление $\hat{\pi}_n$ действует на функциях на $\mathbb{H}$ по той же формуле, что и π_n . Из свойства инвариантности меры ν_n следует, как и в случае π_n , что $\hat{\pi}_n$ является унитарным представлением группы G .

Мы пользуемся обозначениями из определения 1. Пусть P_0 – ортогональная проекция из $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$ на пространство H_n суммируемых с квадратом аналитических функций. Имеем $[P_0, \hat{\pi}_n(g)] = 0$ для всех $g \in G$. Отсюда следует,

что $\pi_n(g) = P_0 \hat{\pi}_n(g) P_0$, $g \in G$. Возьмем пространство $L = L^2(F, \nu_n)$ в качестве канонического выбора Γ -блуждающего порождающего подпространства L для $\hat{\pi}_n$. Напомним, что P_L – ортогональная проекция на L . Очевидно, что в этом случае P_L – это в точности M_{χ_F} , оператор умножения на характеристическую функцию фундаментальной области F , действующий на $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$.

Из вычислений в [19; § 3.3] следует, что произведение $P_0 M_{\chi_F}$ является оператором со следом, причем его след равен размерности Мюррея–фон Неймана $\dim_{\{\pi_n(\Gamma)\}''} H_n$.

Чтобы абстрактно определить пространство Γ -инвариантных векторов, мы используем относительное положение (операторный угол) проекций P_0 и M_{χ_F} . В этой ситуации техническое условие (определение 1) состоит в сходимости в пространстве операторов Гильберта–Шмидта рядов

$$\sum_{\theta \in \Gamma \sigma \Gamma} P_L \pi_n(\theta) P_L, \quad \sigma \in G.$$

В рассматриваемом примере это условие выполняется, так как воспроизводящее ядро для проекции на пространство автоморфных форм и воспроизводящие ядра ассоциированных операторов Гекке являются суммой операторных ядер (воспроизводящих ядер Березина [3], [36]) операторов

$$\sum_{\theta \in \Gamma \sigma \Gamma} M_{\chi_F} \pi_n(\theta) M_{\chi_F}, \quad \sigma \in G. \quad (26)$$

Более того, сумма следов соответствующих операторов также абсолютно сходится. Это следует из вычислений в [53] и [19; § 3.3].

Мы доказываем (см. теорему 34), что сумма (26) является проекцией, когда сумма берется по Γ (например, σ – единичный элемент). Мы показываем также, что образ этой проекции (который является подпространством из L) унитарно эквивалентен гильбертову пространству Γ -инвариантных векторов. Более того, та же унитарная эквивалентность преобразует оператор Гекке, соответствующий двойному смежному классу $[\Gamma \sigma \Gamma]$, в сумму (26).

Преимущество этой точки зрения на пространства автоморфных форм состоит в том, что формула (26) делает возможным прямое вычисление следов операторов Гекке на любом уровне $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Это используется для того, чтобы вычислить (следствие 7) значения характера $\theta_{\pi_n^p}(g)$, $g \in G$. Эти значения являются частичными суммами следов операторов, имеющими вид (26) (см. теорему 34 и замечание 35).

Пространства Γ -инвариантных векторов для унитарного представления $\overline{\pi_{\text{Коор}}^p}$ можно получить другим способом, если вышеупомянутое представление допускает “квадратный корень”, как описано ниже (см. пример 30 в разделе 4). Пусть пространством бесконечной меры будет $\mathbb{H}$, наделенное $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ -инвариантной мерой $d\nu_0(z) = (\text{Im } z)^{-2} d\bar{z} dz$. Пусть $\pi = \pi_{\text{Коор}}$ – соответствующее унитарное представление Купмана группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ в унитарную группу пространства $L^2(\mathbb{H}, \nu_0)$. Обозначим через π_n^{op} сопряженное представление представления π_n . В силу метода квантизации Березина (см. [42], [3]) представление $\pi_{\text{Коор}}$ факторизуется следующим образом:

$$\pi_{\text{Коор}} \cong \pi_n \otimes \pi_n^{\text{op}}.$$

Как и в предыдущем примере, пусть $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, p – простое, а Γ – модулярная группа. Факторизация представления $\pi_{\mathrm{Коор}}$ дает канонический выбор для гильбертовых пространств Γ_0 -инвариантных векторов, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Действительно, представление $\pi_n \otimes \pi_n^{\mathrm{op}}$ унитарно эквивалентно присоединенному представлению $\mathrm{Ad} \pi_n(g)$ в унитарную группу операторов Гильберта–Шмидта $\mathcal{C}_2(H_n) \cong H_n \otimes \overline{H}_n^{\mathrm{p}}$.

Большее векторное пространство, содержащее $\mathcal{C}_2(H_n)$, – это $\mathcal{V} = B(H_n)$, пространство ограниченных линейных операторов на H_n . Тогда присоединенное представление $\mathrm{Ad} \pi_n(g)$ продолжается до представления в группу внутренних автоморфизмов алгебры $B(H_n)$. Пространство Γ_0 -инвариантных векторов $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ в этой ситуации является фактором типа Π_1 :

$$\mathcal{A}_n(\Gamma_0) = \{\pi_n(\Gamma_0)\}' = \{X \in B(H_n) \mid [X, \pi_n(\gamma)] = 0, \gamma \in \Gamma_0\}.$$

Тот факт, что коммутант $\mathcal{A}_n(\Gamma_0)$ является фактором типа Π_1 , – следствие того, что $\dim_{\Gamma} H_n$ конечна (см. [19; § 3.3.d]).

Тогда гильбертово пространство H^{Γ_0} – это просто $L^2(\mathcal{A}_n(\Gamma_0), \tau)$, гильбертово пространство Гельфанда–Наймарка–Сигала, ассоциированное с единственным следом τ на $\mathcal{A}_n(\Gamma_0)$. Семейство $\{\mathcal{A}_n(\Gamma_0)\}_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}}$ является направленным семейством факторов типа Π_1 . Пусть $\mathcal{A}_n^{\infty}$ – фактор типа Π_1 , полученный как индуктивный предел этого направленного семейства факторов типа Π_1 . Обозначим через τ единственный след на $\mathcal{A}_n^{\infty}$.

Тогда пространство $\overline{H}^{\mathrm{p}}$ есть $L^2(\mathcal{A}_n^{\infty}, \tau)$, а $\overline{\mathrm{Ad} \pi_n}^{\mathrm{p}}$ – продолжение представления $\mathrm{Ad} \pi_n(g)$. В теореме 10 [38; теорема 3.2] мы доказали, что K -сферические матричные коэффициенты для $\overline{\mathrm{Ad} \pi_n}^{\mathrm{p}}$ явно вычисляются по C^* -представлению, определяемому K -сферическими матричными коэффициентами для $\overline{\pi_n}^{\mathrm{p}}$. Это представление на самом деле является главным алгебраическим инструментом в [37].

Пусть снова π_0 – представление группы G как в определении 1. Во всех построениях выше главным строительным блоком для представлений $\overline{\pi_0}^{\mathrm{p}}$ является вполне положительное отображение Φ (см. теорему 37) с носителем $C^*(G)$ и со значениями в $B(L)$, продолжающееся на $C^*(\overline{G})$. Отображение Φ кодирует суммы в формуле (26). Продолжим Φ на $C^*(\overline{G})$, для характеристической функции замкнутого подмножества C из $\overline{G}$ полагаая

$$\Phi(\chi_C) = \sum_{\theta \in C} P_L \pi(\theta) P_L.$$

Тогда Φ – вполне положительное отображение на $C^*(\overline{G})$ со значениями в $B(L)$; кроме того, Φ является $*$ -сохраняющим мультипликативным представлением системы операторов (определение 13)

$$\mathcal{O}(K, G) = [\mathbb{C}(\chi_{\sigma K} \mid \sigma \in G)] \cdot [\mathbb{C}(\chi_{\sigma K} \mid \sigma \in G)]^* \subseteq C^*(\overline{G});$$

под $*$ -сохраняющим мультипликативным свойством понимается следующее: для любых двух K -смежных классов $K\sigma_1, K\sigma_2$ в $\overline{G}$

$$\Phi(\chi_{K\sigma_1})^* \Phi(\chi_{K\sigma_2}) = \Phi(\chi_{\sigma_1 K}) \Phi(\chi_{K\sigma_2}) = \Phi(\chi_{\sigma_1 K \sigma_2}).$$

Мы докажем (см. предложение 40), что представление $\bar{\pi}_0^P$ полностью восстанавливается по вполне положительному отображению Φ .

Тогда Φ – “операторнозначный собственный вектор” для алгебры Гекке. Действительно, в силу свойства мультипликативности, обозначая операцию свертки на функциях на G через $\cdot$, получаем, что

$$\Phi(\chi_{K\sigma_1 K})\Phi(\chi_{K\sigma_2}) = \Phi(\chi_{K\sigma_1 K \cdot \chi_{K\sigma_2}}), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G. \quad (27)$$

3. Аксиомы для построения гильбертовых пространств Γ -инвариантных векторов

Пусть $\Gamma \subseteq G$ – почти нормальная подгруппа как во введении, удовлетворяющая условию $[\Gamma : \Gamma_\sigma] = [\Gamma : \Gamma_{\sigma^{-1}}]$ для всех σ в G . Пусть π – (проективное) унитарное представление группы G в унитарную группу $\mathcal{U}(H)$ гильбертова пространства H , обладающее свойствами (i) и (ii) из определения 1. В частности, $\dim\{\pi(\Gamma)\}'' H$ – целое или ∞ . Как замечено в предыдущем разделе, отсюда следует существование Γ -блуждающего порождающего подпространства L для $\pi|_\Gamma$ (определение 13). Напомним, что это означает, что L ортогонально к $\pi(\gamma)L$ при $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$, и что $H = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma)L$.

Мы строим гильбертовы пространства H^{Γ_0} Γ_0 -инвариантных векторов, где $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Такие пространства H^{Γ_0} будут изометрично изоморфны $l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma) \otimes L$ при $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Основная проблема, которую мы сначала рассмотрим в этом разделе, состоит в построении представления группы G на объединении пространств Γ_0 -инвариантных векторов.

Частные примеры, приведенные в предыдущем разделе, подсказывают, что возможный подход к этой проблеме состоит в нахождении вложения гильбертова пространства H в большее векторное пространство $\mathcal{V}$ такое, что представление π продолжается до представления $\pi_{\mathcal{V}}$ группы G в группу линейных изоморфизмов пространства $\mathcal{V}$ и подпространство H пространства $\mathcal{V}$ инвариантно относительно $\pi_{\mathcal{V}}$. Сначала мы поясняем построение в этом случае, затем выполняем построение на основе свойств (i) и (ii) из определения 1.

Мы будем работать с подгруппами Γ_0 , которые сопряжены в G с подгруппами из $\mathcal{S}$. Обозначим этот расширенный класс подгрупп группы G через $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Для $\Gamma_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}$ рассмотрим пространство $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ $\pi_{\mathcal{V}}(\Gamma_0)$ -инвариантных векторов из $\mathcal{V}$. Тогда $\pi_{\mathcal{V}}$ обладает очевидным продолжением на

$$\mathcal{V}_{\infty} = \bigvee_{\Gamma_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}} \mathcal{V}^{\Gamma_0} = \bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} \mathcal{V}^{\Gamma_0}. \quad (28)$$

Остается проблема нахождения $\pi_{\mathcal{V}}(G)$ -инвариантного подпространства из $\mathcal{V}_{\infty}$, которое наделено $\pi_{\mathcal{V}}(G)$ -инвариантным предгильбертовым скалярным произведением. Используя это скалярное произведение, мы определяем гильбертовы пространства $H^{\Gamma_0} \subseteq \mathcal{V}^{\Gamma_0}$, $\Gamma_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}$. Тогда $\pi_{\mathcal{V}}$ индуцирует унитарное представление группы G на $\bigvee_{\Gamma_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}} H^{\Gamma_0}$.

Построение в этом разделе, конечно, похоже на другие построения в литературе (см., например, [6], [21]). Однако в теореме 22 мы используем это построение, чтобы ввести специфические $*$ -представления алгебры Гекке, включающие выражения вида (26)). Они обобщаются в следующем разделе на случай, когда $\dim_{\pi(\Gamma)} H$ не целое и потому не существует Γ -блуждающего порождающего подпространства.

В следующем определении мы вводим общий формализм, используемый для построения представления $\bar{\pi}^P$, начиная с продолжения заданного представления π на большее векторное пространство, которое содержит векторы, инвариантные под действием подгрупп из $\mathcal{S}$. На практике, как будет сделано и ниже в этом разделе, непосредственно строятся гильбертовы пространства, соответствующие “виртуальным” Γ_0 -инвариантным векторам, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 (формализм Γ -инвариантных векторов). Пусть $\Gamma \subseteq G$ — как во введении, а π — представление (возможно, проективное) группы G в унитарную группу гильбертова пространства H . Сделаем следующие предположения.

(i) Существуют большее векторное пространство $\mathcal{V}$, содержащее H , и представление $\pi_{\mathcal{V}}$ группы G в линейные изоморфизмы пространства $\mathcal{V}$ такие, что $\pi_{\mathcal{V}}(g)$ оставляет на месте H и для всех $g \in G$ выполнено равенство $\pi_{\mathcal{V}}(g)|_H = \pi(g)$. Как и выше, для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ обозначаем через $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ подпространство из $\mathcal{V}$, состоящее из векторов, неподвижных относительно действия группы Γ_0 . Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{V}_{\infty}$, введенное в (28).

(ii) Существуют всюду плотное $\pi(G)$ -инвариантное подпространство $\mathcal{D}_{\mathcal{V}} \subseteq H$ и комплекснозначная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty}$ на

$$\mathcal{V}_{\infty} \times (\mathcal{V}_{\infty} \vee \mathcal{D}_{\mathcal{V}})$$

со следующими свойствами:

(ii.1) ограничение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty}$ на $\mathcal{V}_{\infty} \times \mathcal{V}_{\infty}$ является положительно определенным предгильбертовым скалярным произведением;

(ii.2) для каждых $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и $v \in \mathcal{V}^{\Gamma_0}$ линейное отображение на $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}$, определяемое ограничением линейной формы $\langle v, \cdot \rangle_{\infty}$ на $\mathcal{D}_{\mathcal{V}}$, является Γ_0 -инвариантным;

(ii.3) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty}$ является $\pi_{\mathcal{V}}(G)$ -инвариантным:

$$\langle \pi_{\mathcal{V}}(g)v_1, \pi_{\mathcal{V}}(g)v_2 \rangle_{\infty} = \langle v_1, v_2 \rangle_{\infty}, \quad g \in G, \quad v_1 \in \mathcal{V}_{\infty}, \quad v_2 \in \mathcal{V}_{\infty} \vee \mathcal{D}_{\mathcal{V}}.$$

Если выполняются вышеперечисленные предположения, обозначим через H^{Γ_0} гильбертово пространство пополнения $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\infty}$, и пусть $\bar{H}^P$ — гильбертово пространство пополнения пространства $\mathcal{V}_{\infty}$ относительно этого скалярного произведения.

Следующая лемма является очевидным следствием предположений из определения 14.

ЛЕММА 15. *Предположим, что выполняются условия определения 14. Тогда ограничение $\pi_{\mathcal{V}}$ на $\mathcal{V}_{\infty}$ продолжается до унитарного представления $\bar{\pi}^P$ группы G в унитарную группу пространства $\bar{H}^P$. Более того, $\bar{\pi}^P$ изометрически отображает H^{Γ_0} на $H^{\sigma\Gamma_0\sigma^{-1}}$ для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, $\sigma \in G$.*

Если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$, $\Gamma_1, \Gamma_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}$, то включение H^{Γ_0} в H^{Γ_1} изометрическое по построению. Ортогональная проекция из H^{Γ_1} на H^{Γ_0} получается усреднением по смежным классам группы Γ_0 в Γ_1 .

Если исходное представление π проективно (см., например, [5] и ссылки там) с коциклом $\epsilon \in H^2(G, \mathbb{T})$, то при условии, что продолжение π_{χ} имеет тот же коцикл, проведенное выше построение все еще работает.

Впоследствии мы будем работать одновременно с представлениями группы G и пополнения Шлихтинга $\overline{G}$ [48]. Поэтому мы вводим универсальную C^* -алгебру, содержащую и $C^*(G)$, и $C^*(\overline{G})$ как C^* -подалгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть G и $\overline{G}$ – такие, как выше, и пусть $\mathcal{A}(G, \overline{G})$ – факторалгебра универсального скрещенного произведения C^* -алгебр $C^*(G \rtimes C^*(\overline{G}))$, где G действует сопряжением на $C^*(\overline{G})$, по замкнутому по норме идеалу, порожденному соотношениями вида

$$g\chi_{K_0} = \chi_{gK_0}, \quad g \in G, \quad K_0 = \overline{\Gamma_0}, \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}.$$

Здесь χ_{gK_0} обозначает характеристическую функцию смежного класса

$$gK_0 = \overline{g\Gamma_0},$$

где операция замыкания рассматривается в $\overline{G}$.

Тогда $\mathcal{A}(G, \overline{G})$ является замыканием по норме оболочки

$$\text{Sp}\{g\chi_{K_0} \mid g \in G, \quad K_0 = \overline{\Gamma_0}, \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}\}.$$

Пусть задан коцикл $\epsilon \in H^2(G, \mathbb{T})$, который продолжается на $H^2(\overline{G}, \mathbb{T})$. Тогда, работая со скрещенными произведениями с коциклом, получаем аналогичную C^* -алгебру, которую обозначим через $\mathcal{A}_{\epsilon}(G, \overline{G})$.

Используя два предыдущих определения, докажем, что представление $\overline{\pi}^P$ одновременно продолжается на G и на $\overline{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть π – представление из определения 14. Тогда соответствующее представление $\overline{\pi}^P$ из леммы 15 продолжается до представления C^* -алгебры $\mathcal{A}_{\epsilon}(G, \overline{G})$ в $B(\overline{H}^P)$ (которое мы также будем обозначать через $\overline{\pi}^P$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ_0 – подгруппа группы G , принадлежащая классу $\widetilde{\mathcal{S}}$. Пусть $K_0 = \overline{\Gamma_0}$, где замыкание берется в топологии группы $\overline{G}$. Пусть $P_{H^{\Gamma_0}}$ – ортогональная проекция из $\overline{H}^P$ на гильбертово пространство H^{Γ_0} . Продолженное представление $\overline{\pi}^P$ строится отображением $\frac{1}{\mu(K_0)}\chi_{K_0}$. Нормировка необходима, так как в $C^*(\overline{G})$ свертка с подгруппой K_0 группы K является нетривиальным скалярным кратным проекции, поскольку $(\chi_{K_0})^2 = \mu(K_0)\chi_{K_0}$. Элементы из G представлены унитарными операторами на $\overline{H}^P$ с помощью представления $\overline{\pi}^P$ из леммы 15. При таком выборе все соотношения, определяющие универсальную C^* -алгебру $\mathcal{A}_{\epsilon}(G, \overline{G})$, очевидно, выполняются. Предложение доказано.

Для заданного представления π группы G такого, что $\pi|_{\Gamma}$ допускает Γ -блуждающее порождающее подпространство, мы построим представление из определения 14. Гильбертовы пространства H^{Γ_0} -инвариантных векторов мы построим непосредственно, без построения пространства $\mathcal{U}$ из определения 14.

ЛЕММА 18. Пусть π – унитарное представление группы G , обладающее свойствами (i) и (ii) из определения 1. В частности, $\pi|_{\Gamma}$ – целое кратное левого регулярного представления λ_{Γ} . Мы используем обозначения из определения 1. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Для всех $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и $g \in G$ сумма по смежному классу $\Gamma_0 g$

$$\sum_{\theta \in \Gamma_0 g} P_L \pi(\theta) P_L \quad (29)$$

сходится в $B(L)$.

(ii) Подпространство

$$\mathcal{D}_{L,\pi} = \left\{ h \in H \mid \sum_{\gamma \in \Gamma_0} P_L \pi(\gamma) h \text{ сходится для всех } \Gamma_0 \in \mathcal{S} \right\} \quad (30)$$

является всюду плотным $\pi(G)$ -инвариантным подпространством из H , содержащим L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Чтобы доказать утверждение (i), заметим, что достаточно доказать его для $\Gamma_0 = \Gamma$, так как $\pi|_{\Gamma_0}$ остается целым кратным левого регулярного представления λ_{Γ_0} группы Γ_0 . Если просуммировать по двойному смежному классу $\Gamma \sigma \Gamma$, то получится в точности оператор Гекке, ассоциированный с двойным смежным классом, действующий на пространстве L , которое унитарно эквивалентно пространству Γ -инвариантных векторов.

Если представление π таково, как в примере 28 из раздела 4, то сумма (29) совпадает с представлением в унитарном представлении Купмана кусочно биективного преобразования $\hat{\Gamma}g$, введенного в [41; лемма 4, (i)]. Сумма сходится, так как мы добавляем частичные изометрии, соответствующие преобразованиям с попарно непересекающимися областями. Следовательно [41], оператор, ассоциированный с кусочно биективным преобразованием $\hat{\Gamma}g$, является конечной суммой (мощности $[\Gamma : \Gamma_g]$) частичных изометрий с ортогональными исходными пространствами. Это рассуждение дословно переносится на наш случай благодаря предположению (ii) в определении 1. Ключевое свойство, в силу которого рассуждение работает, – это то, что $\pi(\sigma)L$ является $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ -блуждающим подпространством.

(ii) Заметим, что для того, чтобы доказать всюду плотность, достаточно предположить, что Γ -эквивариантным образом выполняется $H = \ell^2(\Gamma)$. В этом случае область $\mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ – это просто $\ell^1(\Gamma) \cap \ell^2(\Gamma)$. Теперь $\pi(G)$ -инвариантность пространства H следует из утверждения (i).

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. Мы используем обозначения и определения, введенные выше. Пусть Γ_0 – подгруппа из $\mathcal{S}$. Предположим, что Γ имеет разложение

на смежные классы по Γ_0 вида $\Gamma = \bigcup \Gamma_0 r_j$, где r_j – представители смежных классов для Γ_0 . Пусть L^{Γ_0} – подпространство пространства H , полученное суммированием следующих ортогональных подпространств пространства H :

$$L^{\Gamma_0} = \sum \pi(r_j)L. \quad (31)$$

Обозначим ортогональную проекцию из H на L^{Γ_0} через $P_{L^{\Gamma_0}}$.

Определим гильбертово пространство $H^{\Gamma_0} = \mathcal{V}^{\Gamma_0}$ как пространство формальных сумм

$$\left\{ \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0)h \mid h \in \mathcal{D}_{L,\pi} \right\} \quad (32)$$

при отождествлении

$$\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0)h = \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0)l_0, \quad (33)$$

если $h \in \mathcal{D}_{L,\pi}$ и l_0 – вектор из L^{Γ_0} , заданный формулой

$$l_0 = \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} P_{L^{\Gamma_0}}(\pi(\gamma_0)h). \quad (34)$$

Бесконечная сумма в (34) сходится, так как h принадлежит $\mathcal{D}_{L,\pi}$.

Условие (33) соответствует тому, что сумма по Γ_0 инвариантна относительно замены переменной суммирования γ на $\gamma\gamma_0$ для фиксированного γ_0 из Γ_0 . Это условие должно обязательно выполняться, если вектор h является суммой сдвигов векторов из L^{Γ_0} на элементы из Γ_0 . Используя вышеупомянутое построение, мы можем ввести унитарное представление группы $\overline{G}$, действующее на векторах, инвариантных относительно подгрупп из $\mathcal{S}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Положительно определенное предгильбертово скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ на $\mathcal{V}_\infty = \bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} H^{\Gamma_0}$ определяется для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, $l_1 \in \mathcal{D}_{L,\pi}$, $l_2 \in L^{\Gamma_0}$ формулой

$$\left\langle \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0)l_1, \sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma'_0)l_2 \right\rangle_\infty = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0]} \left\langle \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0)l_1, l_2 \right\rangle. \quad (35)$$

В правой части этого равенства используется скалярное произведение на H . Ясно, что $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ изометрически вкладывается в $\mathcal{V}^{\Gamma_1}$ для $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$. Пусть $\overline{H}^P$ – гильбертово пространство пополнения пространства $\mathcal{V}_\infty$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$.

Тогда унитарное представление π определяет унитарное представление $\overline{\pi}^P$ в унитарную группу пространства $\overline{H}^P$, обладающее свойствами из леммы 15.

Прежде чем доказывать это предложение, заметим, что формула (35), эквивалентная формуле (36) ниже, является обобщением формулы скалярного произведения Петерссона [34].

Действительно, придерживаясь обозначений из введения, рассмотрим случай двух автоморфных форм веса $n \in \mathbb{N}$, которые поэтому являются Γ -инвариантными векторами, как выше, для представления π_n . Чтобы получить

скалярное произведение двух автоморфных форм, одну из них умножают на характеристическую функцию χ_F фундаментальной области и затем используют обычное скалярное произведение из $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$, которое продолжает скалярное произведение на H_n . Именно это осуществляется в следующей формуле путем замены оператора M_{χ_F} (из формулы (26)) на проекцию P_L , которая имеет сходие с M_{χ_F} свойства.

Формулу (35) можно переписать в эквивалентном виде, аналогичном формуле скалярного произведения Петерссона. Для $h_1, h_2 \in \mathcal{D}_{L,\pi}$ положим

$$l_i = \sum_{\gamma \in \Gamma} P_L \pi(\gamma) h_i, \quad i = 1, 2.$$

Используя отождествление (33), получаем, что формула (35) эквивалентна следующей:

$$\left\langle \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma) h_1, \sum_{\gamma' \in \Gamma} \pi(\gamma') h_2 \right\rangle_{\infty} = \left\langle P_L \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma) \right) h_1, \sum_{\gamma' \in \Gamma} \pi(\gamma') h_2 \right\rangle. \quad (36)$$

Это равно

$$\left\langle P_L \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma) \right) h_1, P_L \left(\sum_{\gamma' \in \Gamma} \pi(\gamma') h_2 \right) \right\rangle = \langle l_1, l_2 \rangle.$$

Для более общих подгрупп $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ формула (36) скалярного произведения аналогична, с той разницей, что вместо P_L используется проекция $P_{L\Gamma_0}$ на Γ_0 -блуждающее порождающее подпространство π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 20. Пусть Γ_0, Γ_1 – две подгруппы из $\mathcal{S}$ такие, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$. Сначала разобьем Γ_0 на смежные классы по Γ_1 . Используя представителей смежных классов, разобьем сумму в формуле (32) для векторов из $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ на $[\Gamma_0 : \Gamma_1]$ векторов, которые все принадлежат $\mathcal{V}^{\Gamma_1}$. Тогда $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ вложено в $\mathcal{V}^{\Gamma_1}$. Действительно, если $\Gamma_0 = \bigcup r_j \Gamma_1$, то вложение реализуется следующим образом: если

$$\eta = \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0) l_0, \quad l_0 \in L^{\Gamma_0}, \quad (37)$$

– вектор общего положения из $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$, то мы отождествляем η со следующим элементом векторного пространства $\mathcal{V}^{\Gamma_1}$:

$$\eta_1 = \sum_j \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_1} \pi(\gamma_1) l_0 = \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_1} \pi(\gamma_1) \left[\sum_j \pi(r_j) l_0 \right] \in \mathcal{V}^{\Gamma_1}.$$

Вложение $\mathcal{V}^{\Gamma_0} \subseteq \mathcal{V}^{\Gamma_1}$ изометрическое. Действительно, для l_0 из L^{Γ_0} квадрат нормы вектора $\eta \in H^{\Gamma_0}$, введенного в (37), определяется в соответствии с формулой (35) и равен

$$\frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0]} \langle l_0, l_0 \rangle,$$

где скалярное произведение вычисляется в H .

С другой стороны, в соответствии с той же формулой норма вектора η_1 из $\mathcal{V}^{\Gamma_1}$ равна

$$\frac{1}{[\Gamma : \Gamma_1]} \left\langle \left[\sum_j \pi(r_j) l_0 \right], \left[\sum_k \pi(r_k) l_0 \right] \right\rangle.$$

Множество $\{r_j\}$ имеет мощность $[\Gamma_0 : \Gamma_1]$. Более того, векторы $\pi(r_j) l_0$ попарно ортогональны. Отсюда следует, что квадрат нормы вектора η_1 равен

$$\frac{1}{[\Gamma : \Gamma_1]} [\Gamma_0 : \Gamma_1] \langle l_0, l_0 \rangle = [\Gamma : \Gamma_1] \langle l_0, l_0 \rangle,$$

а значит, вложение $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ в $\mathcal{V}^{\Gamma_1}$ изометрическое.

Представление $\pi_{\mathcal{V}}$ определяется следующим образом. Пусть $g \in G$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, $l \in L$; рассмотрим вектор

$$\eta = \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0) l \in \mathcal{V}^{\Gamma_0}.$$

Представим смежный класс $g\Gamma_0$ как объединение

$$g\Gamma_0 = \bigcup_j \Gamma_0^j y_j$$

попарно непересекающихся смежных классов меньших подгрупп Γ_0^j из $\mathcal{S}$ таких, что

$$g\Gamma_0^j g^{-1} = \Gamma_1^j \subseteq \Gamma, \quad \Gamma_1^j \in \mathcal{S}.$$

Это всегда можно сделать, рассматривая смежные классы Γ_0 по подгруппам из $\Gamma_0 \cap \Gamma_{g^{-1}}$. Тогда мы определяем

$$\pi_{\mathcal{V}}(g)\eta = \sum_j \sum_{\gamma_j \in \Gamma_1^j} \pi(\gamma_j) (\pi(g y_j) l). \quad (38)$$

В силу предположений на область (30) получаем, что $\pi_{\mathcal{V}}(g)\eta$ лежит в $\mathcal{V}_{\infty}$. Это верно потому, что $\pi_{\mathcal{V}}(g)$ отображает $\mathcal{V}^{\Gamma_0^j \cap \Gamma_{g^{-1}}}$ на $\mathcal{V}^{\Gamma_1^j \cap \Gamma_g}$. Поскольку для всех $g \in G$ индексы подгрупп $\Gamma_{g^{-1}}$ и Γ_g равны, определение скалярного произведения доказывает, что $\pi_{\mathcal{V}}$ изометрически отображает $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ в $\mathcal{V}_{\infty}$. Очевидно, что если $g \in G$ и $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, то $\mathcal{V}^{g\Gamma_0 g^{-1}}$ содержится в $\mathcal{V}^{g\Gamma_0 g^{-1} \cap \Gamma_0}$. Но $g\Gamma_0 g^{-1} \cap \Gamma_0$ является подгруппой из $\mathcal{S}$, поэтому мы получаем альтернативную формулу $\mathcal{V}_{\infty} = \bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{F}} H^{\Gamma_0}$.

Следовательно, получено унитарное представление $\bar{\pi}^P$ в унитарную группу гильбертова пространства $\bar{H}^P$ из определения 14. Предложение доказано.

Напомним, что для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и $\sigma \in G$ мы обозначаем

$$(\Gamma_0)_{\sigma} = \sigma \Gamma_0 \sigma^{-1} \cap \Gamma_0.$$

Индекс $[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_{\sigma}]$ встретится в дальнейших вычислениях.

Для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ пусть $K_0 = \bar{\Gamma}_0$ – замыкание группы Γ_0 в проконечном пополнении K группы Γ . Следующее утверждение описывает явный вид матричного

представления образа при представлении $\bar{\pi}^P$ оператора свертки с характеристической функцией двойного смежного класса $K_0\sigma K_0$. Это, очевидно, оператор Гекке на Γ_0 -инвариантных векторах, ассоциированный с двойным смежным классом $\Gamma_0\sigma\Gamma_0$ и нормированный константой. Мы получим сначала точную константу нормировки, требуемую для операторов Гекке. Полученный нормирующий множитель является индексом подгруппы $(\Gamma_0)_\sigma$ в Γ_0 . Он нужен потому, что в C^* -алгебре $C^*(\bar{G}, G)$, если K_0 – подгруппа из K , то оператор свертки с $\chi_{K_0\sigma K_0}$ является скалярным кратным с множителем $[K_0 : (\Gamma_0)_\sigma]$ упорядоченного произведения операторов свертки с χ_{K_0} , σ и χ_{K_0} .

ЛЕММА 21. *Во введенных выше обозначениях для каждого $\sigma \in G$ и каждой подгруппы K_0 как выше имеем*

$$\bar{\pi}^P(\chi_{K_0\sigma K_0}) = [\Gamma : (\Gamma_0)_\sigma] (\bar{\pi}^P(\chi_{K_0}) \bar{\pi}^P(\sigma) \bar{\pi}^P(\chi_{K_0})). \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы работаем в универсальной алгебре $\mathcal{A} = C^*(G, \bar{G})$. Для $\sigma \in \bar{G}$ обозначим свертку с σ через L_σ . Обозначим оператор свертки с непрерывной функцией f на $\bar{G}$ через $L(f)$. Ясно, что для каждого измеримого подмножества A из $\bar{G}$

$$L(\chi_A)L_\sigma = L(\chi_{A\sigma}), \quad L_\sigma L(\chi_A) = L(\chi_{\sigma A}), \quad \sigma \in G.$$

Тогда очевидно, что

$$L(f) = \int_{\bar{G}} f(g) L_g dg \quad (40)$$

и

$$(L(\chi_{K_0}))^2 = \nu(K_0) L(\chi_{K_0}). \quad (41)$$

В частности, $\nu(K_0)^{-1} L(\chi_{K_0})$ – проекция.

То же рассуждение дает, что если K_0, K_1 – подгруппы как выше, а K_1 – подгруппа из K_0 , то

$$L(\chi_{K_1}) L(\chi_{K_0}) = L(\chi_{K_0}) L(\chi_{K_1}) = \nu(K_1) L(\chi_{K_0}). \quad (42)$$

Разложим K_0 в объединение правых смежных классов для подгрупп $(K_0)_\sigma = K_0 \cap \sigma K_0 \sigma^{-1}$ с представителями смежных классов $s_i \in K_0$, $i = 1, 2, \dots$, $[K_0 : (K_0)_\sigma]$. Это те же представители смежных классов, что и для $(\Gamma_0)_\sigma$ в Γ_0 . Используя формулу (42), получаем

$$\begin{aligned} L(\chi_{K_0}) L_\sigma L(\chi_{K_0}) &= \sum_i L(s_i \chi_{(K_0)_\sigma}) L_\sigma L(\chi_{K_0}) = \sum_i L(s_i \sigma) L(\chi_{(K_0)_{\sigma^{-1}}}) L(\chi_{K_0}) \\ &= \nu((K_0)_{\sigma^{-1}}) \sum_i L(s_i \sigma) L(\chi_{K_0}) = \nu((K_0)_{\sigma^{-1}}) L(\chi_{K_0 \sigma K_0}). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Как было отмечено выше, гильбертовы пространства H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, изометрически изоморфны $l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma) \otimes L$, где скалярное произведение на $l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)$ выбирается так, чтобы вложения $l^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma) \subseteq l^2(\Gamma_1 \backslash \Gamma_0)$ были изометрическими

для всех $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$. Оказывается, что элементы матриц, представляющих операторы Гекке, являются суммами вида (29). Лемма 31 ясно показывает, что после нормировки формула классического оператора Гекке, соответствующего сумме по смежным классам, – это

$$[\Gamma : \Gamma_\sigma] P_{H\Gamma_0} \bar{\pi}^P(\sigma) P_{H\Gamma_0}, \quad \sigma \in G, \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}.$$

ТЕОРЕМА 22. Мы используем обозначения и определения, введенные выше в этом разделе. Зафиксируем подгруппу Γ_0 из $\mathcal{S}$. Выберем семейство (s_i) представителей правых смежных классов для $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Рассмотрим, как и в (31), гильбертово пространство

$$L^{\Gamma_0} = \bigoplus_{i=1}^{[\Gamma:\Gamma_0]} \pi(s_i)L. \quad (43)$$

Норма гильбертова пространства на L^{Γ_0} нормирована так, что вложение L в L^{Γ_0} , определенное соответствием

$$l \in L \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{[\Gamma:\Gamma_0]} \pi(s_i)l \in L^{\Gamma_0} = \bigoplus_{i=1}^{[\Gamma:\Gamma_0]} \pi(s_i)L, \quad (44)$$

изометрическое. Пространство L^{Γ_0} очевидным образом отождествляется с подпространством пространства H . В этом случае пространство L^{Γ_0} наделено ненормированным скалярным произведением, унаследованным из H . Пусть $P_{L^{\Gamma_0}}$ – ортогональная проекция из H на L^{Γ_0} .

Тогда для $\sigma \in G$ оператор Гекке $[\Gamma : \Gamma_\sigma] P_{H\Gamma_0} \bar{\pi}^P(\sigma) P_{H\Gamma_0}$ унитарно эквивалентен ограниченному оператору

$$A(\Gamma_0 \sigma \Gamma_0) = \sum_{\theta \in \Gamma_0 \sigma \Gamma_0} P_{L^{\Gamma_0}} \pi(\theta) P_{L^{\Gamma_0}}. \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданных $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и выбора представителей смежных классов,

$$\Gamma = \bigcup \Gamma_0 s_i,$$

построим унитарный оператор W^{Γ_0} из $L^{\Gamma_0} = \bigoplus \pi(s_i)L$ в H^{Γ_0} следующим образом. Для векторов $l_i \in L$ определим следующую изометрию:

$$W^{\Gamma_0} \left(\bigoplus \pi(s_i)l_i \right) = \sum_i \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0) \pi(s_i)l_i.$$

Докажем, что для $\sigma \in G$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} H^{\Gamma_0} & \xleftarrow{W^{\Gamma_0}} & \bigoplus \pi(s_i)L \\ \downarrow [\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] P_{H\Gamma_0} \bar{\pi}^P(\sigma) P_{H\Gamma_0} & & \downarrow \sum_{\theta \in \Gamma_0 \sigma \Gamma_0} P_{L^{\Gamma_0}} \pi(\theta) P_{L^{\Gamma_0}} \\ H^{\Gamma_0} & \xleftarrow{W^{\Gamma_0}} & \bigoplus \pi(s_i)L \end{array}$$

Для этого воспользуемся формулой для унитарных операторов $\bar{\pi}^p(\theta)$, $\theta \in G$, определенных в доказательстве предложения 20.

Достаточно проверить коммутативность этой диаграммы в случае $\Gamma = \Gamma_0$; случаи, соответствующие другим подгруппам $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, являются следствием. Рассмотрим вектор $l \in L$. Имеем

$$W^\Gamma l = \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma)l \in \mathcal{V}^\Gamma.$$

Если разложение группы Γ на правые смежные классы по $\Gamma_{\sigma^{-1}}$ есть $\Gamma = \bigcup \Gamma_{\sigma^{-1}} r_j$, то

$$W^\Gamma l = \sum_j \sum_{\gamma \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi(\gamma) \pi(r_j) l.$$

Тогда, применяя $\bar{\pi}^p(\sigma)$, получим

$$\sum_j \sum_{\gamma_1 \in \Gamma_\sigma} \pi(\gamma_1) \pi(\sigma r_j) l.$$

Проектируя на H^Γ , откуда получаем

$$\frac{1}{[\Gamma : \Gamma_\sigma]} \sum_j \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma) \pi(\sigma r_j) l,$$

что равно

$$\frac{1}{[\Gamma : \Gamma_\sigma]} \sum_{\theta \in \Gamma_\sigma \Gamma} \pi(\theta) l.$$

С другой стороны, сумма

$$\sum_{\theta \in \Gamma_\sigma \Gamma} P_L \pi(\theta) P_L,$$

примененная к вектору l , дает

$$\sum_{\theta \in \Gamma_\sigma \Gamma} P_L \pi(\theta) l = \sum_j \sum_{\gamma \in \Gamma} P_L \pi(\gamma) \pi(\sigma r_j) l.$$

Применим изометрию W^Γ к этому вектору. Воспользуемся отождествлениями, принятыми в структуре пространства H^Γ (см. формулу (33) в определении 19). Тогда вышеупомянутая сумма соответствует вектору

$$\sum_{r_j} \sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma \sigma r_j) l = \sum_{\theta \in \Gamma_\sigma \Gamma} \pi(\theta) l.$$

Теорема доказана.

Ниже мы опишем несложные включения между пространствами векторов, инвариантных относительно подгрупп из $\mathcal{S}$.

ЛЕММА 23. Рассмотрим семейство гильбертовых пространств $l^2(\Gamma_0 \setminus \Gamma)$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. На этом семействе гильбертовых пространств скалярное произведение нормировано так, что вложения $l^2(\Gamma_0 \setminus \Gamma) \subseteq l^2(\Gamma_1 \setminus \Gamma)$ изометрические для всех $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1$. Тогда выполняется следующее.

(i) Гильбертовы пространства H^{Γ_0} изометрически изоморфны $l^2(\Gamma_0 \setminus \Gamma) \otimes L$ для всех $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, при этом имеют место включения

$$H^{\Gamma_0} \subseteq H^{\Gamma_1},$$

полученное для $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$ с помощью взятия тензорного произведения с L , и изометрическое включение

$$l^2(\Gamma_0 \setminus \Gamma) \subseteq l^2(\Gamma_1 \setminus \Gamma).$$

(ii) Пусть π – представление, обладающее свойствами (i), (ii) из определения 1. Тогда гильбертово пространство $\overline{H}^P$ является Γ -эквиариантно изометрически изоморфными $L^2(K, \mu) \otimes L$. Отсюда следует, что $\overline{\pi}^P|_K$ является кратным левому регулярного представления.

Используя вышеупомянутое отождествление, мы построим клеточно-матричное представление для операторов Гекке.

СЛЕДСТВИЕ 24. Мы используем обозначения, введенные в лемме 23. Обозначим каноническую матричную единицу алгебры $B(l^2(\Gamma_0 \setminus \Gamma))$ через

$$(e_{\Gamma_0 s_i, \Gamma_0 s_j})_{i, j=1, 2, \dots, [\Gamma: \Gamma_0]}.$$

Мы используем изоморфизм

$$B(H^{\Gamma_0}) \cong B(l^2(\Gamma_0 \setminus \Gamma)) \otimes B(L),$$

определенный выше. Тогда оператор Гекке $[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] P_{H^{\Gamma_0}} \overline{\pi}^P(\sigma) P_{H^{\Gamma_0}}$ представляется в виде

$$\sum_{i, j} \sum_{\theta \in s_i^{-1} \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_j} P_L \pi(\theta) P_L \otimes e_{\Gamma_0 s_i, \Gamma_0 s_j}. \quad (46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из того, что проекция на $L^{\Gamma_0} = \bigoplus \pi(s_i) L$ – это $\sum \pi(s_i) P_L \pi(s_i)^*$, где s_i – представители смежных классов, введенные в формулировке теоремы 22. Мы используем представителей смежных классов, чтобы построить унитарный оператор, отображающий L^{Γ_0} на $l^2(\Gamma_0) \otimes L$. Он будет отображать $\bigoplus \pi(s_i) l_i$ на $\bigoplus [\Gamma_0 s_i] \otimes l_i$ для всех $l_i \in L$. Сопрягая оператор, заданный формулой (45), с помощью этого унитарного, получим (46).

Никакой дальнейшей перенормировки в формуле (46) не требуется, что можно непосредственно проверить, полагая σ равным единичному элементу из G . Тогда для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ левая часть равенства (47) ниже есть $\dim H^{\Gamma_0}$. Так как L является Γ -блуждающим подпространством пространства H , правая часть в (47) подсчитывает, сколько раз единичный элемент попадает в $s_i^{-1} \Gamma_0 s_i$, и умножает результат на размерность пространства L . Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 25. В частности, если L имеет конечную размерность, то справедлива следующая формула для следов операторов Гекке:

$$\mathrm{Tr}([\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] [P_{H\Gamma_0} \bar{\pi}(\sigma) P_{H\Gamma_0}]) = \sum_i \sum_{\theta \in s_i^{-1} \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_i} \mathrm{Tr}(P_L \pi(\theta) P_L). \quad (47)$$

Заметим, что соответствие $\pi \rightarrow \bar{\pi}^P$ также сохраняет функцию размерности $\dim_{\{\pi(\Gamma)\}'' H}$. Это объясняется следующим результатом.

ЛЕММА 26. Пусть π – унитарное представление как выше. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Унитарное представление $\bar{\pi}^P$ продолжается до представления C^* -алгебр полного свободного произведения с объединением C^* -алгебр

$$C^*(\bar{G}) *_{C^*(K)} B(L^2(K))$$

в $B(\bar{H}^P)$.

(ii) Унитарное представление $\bar{\pi}^P$ группы $\bar{G}$ обладает тем свойством, что $\bar{\pi}_0^P|_K$ является конечным кратным левого регулярного представления группы K на $L^2(K, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать п. (i), нужно построить представление алгебры $B(L^2(K))$ в $B(\bar{H}^P)$. Так как $B(L^2(K))$ порождается алгеброй свертков с непрерывными функциями на K и функциями из $C(K)$, рассматриваемыми как операторы умножения, достаточно описать представление алгебры $C(K)$ в $B(\bar{H}^P)$, которое согласовано с представлением алгебры $C^*(K)$ в $B(\bar{H}^P)$, полученным ограничением $\bar{\pi}^P$ на $C^*(K)$. В силу инвариантности относительно сдвигов достаточно рассмотреть следующий случай. Пусть K_0 – замыкание в проконечной топологии подгруппы $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Тогда χ_{K_0} , рассматриваемый как элемент алгебры $C(K)$, будет действовать на векторе вида $\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_1} \pi(\gamma_0)l$, $\Gamma_1 \in \mathcal{S}$, $l \in L$, отображая его в $\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1} \pi(\gamma_0)l$. Легко проверить, что это определяет

представление C^* -алгебры $C^*(\bar{G}) *_{C^*(K)} B(L^2(K))$.

Чтобы доказать п. (ii), заметим, что при ограничении $\bar{\pi}^P$ на K операторы W^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, становятся сплетающими операторами между $\bar{\pi}|_K$ и представлением $\lambda_K \otimes \mathrm{Id}_L$, действующими на $L^2(K) \otimes L$. Лемма доказана.

4. Примеры представлений и ассоциированных пространств Γ -инвариантных векторов

В этом разделе мы обсудим конкретные примеры, которые удовлетворяют аксиомам, введенным в определении 14, и к которым можно применить построение из предложения 20. В этом разделе мы будем свободно использовать обозначения из вышеупомянутого определения и последующие утверждения.

Следующий пример играет для унитарных представлений на пространствах Γ -инвариантных векторов ту же роль, которую левое регулярное представление дискретной группы играет в пространстве представлений дискретной группы. Заманчиво назвать это представление регулярным.

ПРИМЕР 27. Пусть $\pi = \lambda_G$ – левое регулярное представление группы G , действующей на $H = l^2(G)$. В этом случае векторное пространство $\mathcal{V}$ есть линейное пространство функций на G . Для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ пространство $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ есть пространство лево- Γ_0 -инвариантных функций на G , т.е. функций на $\Gamma_0 \backslash G$. Тогда гильбертово пространство H^{Γ_0} есть $l^2(\Gamma_0 \backslash G)$. Скалярное произведение определено так, что если $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$, $\Gamma_0, \Gamma_1 \in \mathcal{S}$, то включения

$$l^2(\Gamma_0 \backslash G) \subseteq l^2(\Gamma_1 \backslash G)$$

изометрические.

Ясно, что в этом случае $\mathcal{V}_\infty$ – гильбертово пространство пополнения пространства

$$\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} l^2(\Gamma_0 \backslash G)$$

и совпадает с $L^2(\overline{G}, \mu)$. Тогда представление $\bar{\pi}^P$ есть левое регулярное представление $\lambda_{\overline{G}}$, действующее на $L^2(\overline{G}, \mu)$.

Заметим, что здесь мы неявно использовали отождествление на векторных пространствах, имеющих в качестве базиса множество смежных классов. Это отождествление состоит в следующем:

$$[\Gamma_0 g] = \sum_i [\Gamma_1 s_i g], \quad g \in G.$$

Это равенство, после перенормировки скалярного произведения, влечет за собой существование изометрического вложения

$$l^2(\Gamma_0 \backslash G) \subseteq l^2(\Gamma_1 \backslash G).$$

В частности, все квазирегулярные представления λ_{G/Γ_0} группы G на пространствах смежных классов являются подпредставлениями из $\lambda_{\overline{G}}|_G$. Действительно, используя приведенное выше равенство, получаем, что для всех $\Gamma_1 \in \mathcal{S}$

$$l^2(G/\Gamma_1) \subseteq \bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} l^2(\Gamma_0 \backslash G).$$

Квазирегулярные представления входят с бесконечной кратностью в левое регулярное представление $\lambda_{\overline{G}}|_G$, так как они коммутируют с правым действием группы G .

Стандартный выбор Γ -блуждающего порождающего подпространства из $l^2(G)$ состоит в выборе представителей правых смежных классов $\mathcal{C} \subseteq G$ группы Γ в G (так что G – объединение попарно непересекающихся подмножеств $\bigcup_{\sigma \in \mathcal{C}} \Gamma \sigma$).

Так как $P_{H^{\Gamma_0}}$ – проекция на $l^2(\Gamma_0 \backslash G)$, то используя вышеупомянутое построение, получаем стандартное представление операторов Гекке и алгебр Гекке [7], [4], [21], [51], [29].

Опишем второй стандартный пример конструкции из предложения 20, соответствующий случаю $\dim_{\{\pi(\Gamma)\}''} H = \infty$.

ПРИМЕР 28. Пусть $(\mathcal{X}, \nu)$ – бесконечномерное пространство, на котором G действует сохраняющими меру преобразованиями. Предположим, что ограничение действия группы G на Γ допускает фундаментальную область F в $\mathcal{X}$ с мерой $\nu(F) = 1$. Для каждого $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ зафиксируем систему представителей смежных классов:

$$\Gamma = \bigcup \Gamma_0 s_i.$$

Пусть

$$F_{\Gamma_0} = \bigcup s_i F.$$

Тогда F_{Γ_0} является фундаментальной областью для Γ_0 . Перенормируем меру ν на F_{Γ_0} :

$$\nu_{\Gamma_0} = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0]} \nu.$$

Выбор представителей индуцирует проекцию $\pi_{\Gamma_0} : F_{\Gamma_0} \rightarrow F$, которая отображает $s_i f$ в f для $f \in F$. Рассматривая двойственные пространства, получаем изометрическое включение

$$L^2(F, \nu) \subseteq L^2(F_{\Gamma_0}, \nu_{\Gamma_0}).$$

Унитарное представление группы G на $L^2(\mathcal{X}, \nu)$ является представлением Купмана

$$\pi_{\text{Кoop}}(g)f(x) = f(g^{-1}x), \quad x \in \mathcal{X}, \quad g \in G, \quad f \in L^2(\mathcal{X}, \nu).$$

Мы используем формализм из определения 14, и пусть $\mathcal{V}$ – линейное пространство измеримых функций на $\mathcal{X}$. Ясно, что подпространство $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ составляют функции из $\mathcal{V}$, которые Γ_0 -эquivariantны. Тогда H^{Γ_0} канонически отождествляется с гильбертовым пространством $L^2(F_{\Gamma_0}, \nu_{\Gamma_0})$. Это пространство также отождествляется с подпространством Γ_0 -инвариантных функций на $\mathcal{X}$.

Ясно, что в этом случае гильбертово пространство $\overline{H}^{\text{P}}$ изометрически изоморфно

$$L^2(K, \mu) \otimes L^2(F, \nu) = L^2(K \times F, \mu \times \nu)$$

и совпадает с $\overline{\pi}^{\text{P}}|_K$ – это просто $\text{Id}_{L^2(F)} \otimes \lambda_K$, где λ_K – левое регулярное представление группы K на $L^2(K, \mu)$.

Вышеприведенное построение также доказывает, что представление $\overline{\pi}_{\text{Кoop}}^{\text{P}}|_G$ само является унитарным представлением Купмана. Его несложно восстановить по исходному представлению π . Действительно, беря считающую меру ε на Γ , получаем изоморфизм пространств с мерой:

$$(\mathcal{X}, \nu) \cong (\Gamma, \varepsilon) \times (F, \nu).$$

Действие группы G на $\mathcal{X}$ при вышеупомянутом отождествлении описывается в терминах коцикла на $G \times F$ со значениями в Γ , где Γ действует левым умножением на сомножитель Γ в произведении $\Gamma \times F$. Заменяя сомножитель Γ в этом произведении сомножителем K в произведении $K \times F$, получаем сохраняющее меру действие группы G на пространстве с мерой $(K \times F, \mu \times \nu)$, имеющее

тот же коцикл, что и действие группы G на $\Gamma \times F$. Тогда унитарное представление $\bar{\pi}_{\text{Коор}}^p|_G$ на самом деле является унитарным представлением Купмана, соответствующим действию группы G на $(K \times F, \mu \times \nu)$.

В вышеупомянутом построении проекция P_L является оператором умножения на характеристическую функцию χ_F . Условие сходимости, требующее, чтобы сумма

$$\sum_{\theta \in \Gamma \sigma \Gamma} P_L \pi_{\text{Коор}}(\theta) P_L$$

сходилась, очевидно в этом случае, так как эта сумма есть оператор Гекке (см., например, [41]).

Ниже мы кратко опишем, как схему из предложения 20 можно использовать для пространств автоморфных форм. В следующем разделе это будет подробно изучено в более общей постановке.

ПРИМЕР 29. Рассмотрим меры $d\nu_n(z) = (\text{Im } z)^{n-2} d\bar{z} dz$ на $\mathbb{H}$. Пусть π_n , $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$, – дискретная серия [30] (проективных) унитарных представлений группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Эти представления действуют на гильбертовом пространстве $H_n = H^2(\mathbb{H}, \nu_n)$. Формула для них похожа на унитарное представление Купмана за исключением множителя модулярности (см., например, [30]). Рассмотрим также большее гильбертово пространство $\hat{H}_n = L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$, $n \geq 1$.

Положим $G = \text{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, где p – простое число, и пусть $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Если π_n – проективное унитарное представление, т. е. если n нечетно, то также задан 2-коцикл (выражающий проективность представления π_n). Этот коцикл в данном случае является $\mathbb{Z}_2$ -значным и потому продолжается до 2-коцикла на пополнении Шлихтинга. В данном случае это пополнение есть $\text{PGL}(2, \mathbb{Q}_p)$, где $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел.

В силу результатов работы [19; § 3.3] отсюда следует, что $\pi_n|_\Gamma$ является (не обязательно целым) кратным левого регулярного представления λ_Γ . Действительно,

$$\dim_{\{\pi_n(\Gamma)\}''} H_n = \frac{n-1}{12}.$$

Следовательно, если $(n-1)/12$ не целое, то не существует гильбертова пространства L такого, что H_n и $l^2(\Gamma) \otimes L$ изоморфны как Γ -модули. Более того, даже если $(n-1)/12$ целое, не существует канонического выбора L , который позволил бы действовать так же, как в предложении 20.

Чтобы преодолеть эту трудность, мы используем Γ -блуждающее порождающее подпространство представления $\hat{\pi}_n$, которое содержит π_n в качестве подпредставления. Положим $\hat{\pi}_n$ равным унитарному представлению группы $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, заданному той же алгебраической формулой на функциях на $\mathbb{H}$, что определяет представление π_n . То же самое вычисление, которое показывает, что π_n – унитарное представление, так же просто доказывает, что $\hat{\pi}_n$ – унитарное представление.

Хорошо известно (см., например, [23], [34]), что ассоциированное гильбертово пространство H_n^Γ является конечномерным гильбертовым пространством, состоящим из автоморфных форм веса n для группы $\Gamma = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Чтобы применить формализм из определения 14, положим $\mathcal{V}$ равным пространству

аналитических функций на $\mathbb{H}$. В следующем разделе мы используем эту схему для вычисления следов операторов Гекке.

Затем для того, чтобы описать скалярное произведение на H_n^Γ , мы используем скалярное произведение гильбертова пространства из предыдущего примера для унитарного представления $\hat{\pi}_n$. Если F – фундаментальная область для действия группы Γ на $\mathbb{H}$, то положим P_L равным оператору умножения M_{χ_F} на характеристическую функцию χ_F , действующему на $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$. Скалярное произведение в явном виде будет построено в следующем разделе (см. формулу (50)). В частном случае, рассматриваемом в настоящем примере, эта формула для скалярного произведения оказывается каноническим скалярным произведением Петерссона [34]. Описанная выше процедура будет использоваться ниже для получения явного описания операторов Гекке и для вычисления их следов.

Приведем еще один пример, где конструкция из предложения 20 применяется для построения Γ -инвариантных векторов. Этот пример соответствует представлениям вида $\pi \otimes \pi^{\text{op}}$, где π^{op} – комплексно-сопряженное.

ПРИМЕР 30. Пусть $\Gamma \subseteq G$, π , π_0 , P_0 , P_L такие же, как в определении 1. Рассмотрим диагональное унитарное представление $\tilde{\pi} = \pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ группы G . В этом примере для простоты изложения мы предполагаем, что все подгруппы из $\mathcal{S}$ имеют бесконечные нетривиальные классы сопряженности. Это соответствует тому, что все ассоциированные алгебры фон Неймана имеют единственные следы (являются факторами, т. е. не имеют центра).

Заметим, что даже если π_0 проективное, то представление $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ унитарное, без коцикла. Более того, так как в этом случае размерность Мюррея–фон Неймана бесконечна, унитарное представление $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ удовлетворяет условиям предложения 20. Так как мы зарезервировали обозначение $\bar{H}_0^{\text{p}}$ для других целей, мы используем здесь обозначение H_0^{op} для гильбертова пространства, сопряженного к H_0 .

Тогда представление $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ унитарно эквивалентно представлению $\text{Ad } \pi_0$, определенному на G , со значениями в унитарной группе гильбертова пространства

$$H_0 \otimes H_0^{\text{op}} \cong \mathcal{C}_2(H_0) \subseteq B(H_0).$$

Здесь $\mathcal{C}_2(H_0)$ – идеал, состоящий из операторов Гильберта–Шмидта, действующих на H_0 (см. [50]). Формула для представления $\text{Ad } \pi_0$ такова:

$$\text{Ad } \pi_0(g)(X) = \pi_0(g)X\pi_0(g)^{-1}, \quad X \in \mathcal{C}_2(H_0), \quad g \in G.$$

Оно очевидным образом продолжается до (неунитарного) представления группы G во (внутренние) автоморфизмы алгебры $B(H_0)$.

В схеме определения 14 положим пространство $\mathcal{V}$ равным $B(H_0)$. Тогда

$$\mathcal{V}^\Gamma = \{\pi_0(\Gamma)\}' = \{X \mid [X, \pi(\gamma)] = 0 \text{ для всех } \gamma \in \Gamma\} \subseteq B(H_0).$$

Более общо, для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ имеем

$$\mathcal{V}^{\Gamma_0} = \{\pi(\Gamma_0)\}' \subseteq B(H_0).$$

Так как мы предположили, что все группы Γ_0 из $\mathcal{S}$ имеют бесконечные нетривиальные классы сопряженности, то алгебры $\{\pi_0(\Gamma_0)\}'$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, являются факторами типа II_1 и, следовательно, каждая из них наделена единственным нормированным следом τ_{Γ_0} .

Пусть $\mathcal{A}_\infty$ – фактор типа II_1 , полученный как индуктивный, сохраняющий следы, направленный предел факторов $\{\pi_0(\Gamma_0)\}'$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Тогда $\mathcal{A}_\infty$ имеет единственный след τ , определяемый требованием

$$\tau|_{\{\pi_0(\Gamma_0)\}'} = \tau_{\Gamma_0}, \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}.$$

Если $\sigma \in G$ и $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, то оператор $\text{Ad } \pi_0(\sigma)$ отображает $\{\pi_0(\Gamma_0 \cap \Gamma_{\sigma^{-1}})\}'$ в $\{\pi_0(\sigma\Gamma_0\sigma^{-1} \cap \Gamma_\sigma)\}'$. Значит, $\text{Ad } \pi_0(\sigma)$ отображает $\mathcal{A}_\infty$ на $\mathcal{A}_\infty$. Таким образом, $\text{Ad } \pi_0(\sigma)$, $\sigma \in G$, продолжается до элемента группы автоморфизмов $\text{Aut } \mathcal{A}_\infty$ фактора $\mathcal{A}_\infty$.

Чтобы получить гильбертово пространство Γ_0 -инвариантных векторов, мы используем стандартные L^2 -пространства, ассоциированные с соответствующими II_1 -факторами (обозначения см., например, в [50]). Таким образом,

$$(H_0 \otimes H_0^{\text{op}})^{\Gamma_0} = L^2(\{\pi(\Gamma_0)\}', \tau_{\Gamma_0}) \quad \text{и} \quad \overline{(H_0 \otimes H_0^{\text{op}})}^{\text{p}} = L^2(\mathcal{A}_\infty, \tau).$$

В частности, если $\dim_{\{\pi(\Gamma)\}''} H_0 = 1$, то

$$(H_0 \otimes H_0^{\text{op}})^\Gamma \cong L^2(\mathcal{L}(\Gamma), \tau) \cong \ell^2(\Gamma).$$

Следовательно, унитарное представление $\text{Ad } \pi(\sigma)$, $\sigma \in G$, индуцирует унитарное представление

$$\overline{\text{Ad } \pi}^{\text{op}} = \overline{\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}},$$

соответствующее $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$, как определяется в предложении 20.

Хотя это не используется в настоящей работе, заметим, что в силу теории индексов Джоунса [25], отождествляя проекции Джоунса для включения

$$\{\pi_0(\Gamma_0)\}'' \subseteq \{\pi_0(\Gamma)\}''$$

с характеристической функцией замыкания подгруппы Γ_0 в K , получаем (см. [39]), что $\mathcal{A}_\infty$ изоморфен алгебре фон Неймана со скрещенным произведением $\mathcal{L}(\Gamma \rtimes L^\infty(K, \nu))$, где Γ действует левыми сдвигами на K . Представление $\overline{\text{Ad } \pi}^{\text{p}}|_\Gamma$ действует тождественно на $\mathcal{L}(\Gamma) \subseteq \mathcal{A}_\infty$ и правыми сдвигами на K .

5. Построение представления $\overline{\pi}_0^{\text{p}}$ при отсутствии Γ -блуждающего порождающего подпространства

В этом разделе мы анализируем случай унитарного представления π_0 группы G на гильбертовом пространстве H_0 , для которого $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H_0$ не обязательно целое. Мы предполагаем, что эта размерность – конечное положительное число. Таким образом, Γ -блуждающее порождающее подпространство $L \subseteq H_0$ из определения 13 может не существовать.

Мы предполагаем, что выполняются условия из определения 1. Напомним, что в определении 1 требуется, чтобы существовало унитарное представление π группы G на большем гильбертовом пространстве H , обладающее

Γ -блуждающим порождающим подпространством L . Исходное представление π_0 должно быть подпредставлением представления π . Напомним, что, как и в определении 1, мы обозначаем через P_L и P_0 ортогональные проекции из H на L и H_0 соответственно.

Пространства Γ_0 -инвариантных векторов строятся (см. предложение 20) как пространства формальных сумм по группе $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Следовательно, Γ_0 -инвариантные векторы отождествляются, как и в разделе 3, с Γ_0 -инвариантными неограниченными линейными формами на гильбертовом пространстве H_0 .

Использование вспомогательного представления π , обладающего Γ -блуждающим порождающим подпространством и содержащего исходное представление π_0 в качестве подпредставления, подсказывается случаем автоморфных форм (см. описание в примере 29). Формально автоморфные формы – это векторы, неподвижные относительно $\pi_n|_{\Gamma}$, действующего на гильбертовом пространстве H_n . Невозможно найти настоящие векторы с этим свойством, так как нет суммируемости с квадратом. С другой стороны, алгебраическая формула, определяющая представление π_n , допускает Γ -инвариантные аналитические функции. Они являются автоморфными формами [23]. Чтобы построить структуру гильбертова пространства на пространстве автоморфных форм заданного веса, используется скалярное произведение Петерссона. Чтобы разделить скалярное произведение Петерссона [34], используется фундаментальная область F для действия группы Γ на $\mathbb{H}$. Пространство $L^2(F, \nu_n)$ является Γ -блуждающим порождающим подпространством для большего унитарного представления, содержащего π_n в качестве подпредставления и действующего на $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$.

В рамках этого раздела унитарное представление π_0 есть π_n , а большее представление, обладающее Γ -блуждающим порождающим подпространством, действует на $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$. Проекция P_L есть оператор на $L^2(\mathbb{H}, \nu_n)$, действующий умножением на характеристическую функцию χ_F фундаментальной области. Кроме того, проекция P_0 есть проекция (Бергмана) на пространство аналитических функций $H^2(\mathbb{H}, \nu_n)$.

Ниже мы описываем изменения процедуры из предложения 20 и определения 14, которые нужны для рассмотрения настоящей ситуации. Мы начинаем с построения пространства Γ_0 -инвариантных векторов.

ЛЕММА 31. *Рассмотрим группы $\Gamma \subseteq G$ и представление π_0 группы G со свойствами из определения 1. Мы используем обозначения, введенные в этом определении.*

Для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ зафиксируем систему представителей s_i правых смежных классов для Γ_0 в Γ , так что $\Gamma = \bigcup \Gamma_0 s_i$. Пусть L^{Γ_0} – гильбертово пространство, введенное в (43), с нормой, подчиненной условию перенормировки из формулы (44) в теореме 22. Пусть $P_{L^{\Gamma_0}}$ – ортогональная проекция из H на L^{Γ_0} .

Тогда формула

$$\mathcal{P}_{\Gamma_0, L} = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} P_{L^{\Gamma_0}} \pi_0(\gamma) P_{L^{\Gamma_0}} \in B(L^{\Gamma_0}) \quad (48)$$

определяет проекцию в $B(L^{\Gamma_0})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что $\mathcal{P}_{\Gamma_0, L}$ – проекция и, более общо, тот факт, что формула (55) в теореме 34 определяет представление алгебры Гекке двойных смежных классов для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, вытекает непосредственно из следующего тождества, которое справедливо для $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ и $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_0} P_{L\Gamma_0} \pi_0(\sigma_1 \gamma) P_{L\Gamma_0} \pi_0(\gamma^{-1} \sigma_2) P_{L\Gamma_0} = P_{L\Gamma_0} \pi_0(\sigma_1 \sigma_2) P_{L\Gamma_0}. \quad (49)$$

Сходимость ряда в левой части этого равенства следует из технического условия (v), налагаемого в определении 1. Здесь мы берем поточечное операторное произведение двух операторных рядов, которые сходятся в $\mathcal{C}_2(L)$. Формула (49) сразу следует из того, что

$$\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma) P_{L\Gamma_0} \pi(\gamma^{-1})$$

– единичный оператор на H . Лемма доказана.

Ниже мы адаптируем предложение 20 к контексту представления π_0 со свойствами, введенными в определении 1. В следующей лемме мы строим гильбертово пространство “виртуальных” Γ_0 -инвариантных векторов, ассоциированное с π_0 (мы используем обозначения и определения из леммы 31).

ЛЕММА 32. Пусть $H_0^{\Gamma_0}$ есть пространство формальных рядов следующего вида:

$$H_0^{\Gamma_0} = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma) l \mid l \in L^{\Gamma_0} \right\}.$$

Пусть $\mathcal{D}_{L, \pi}$ определено формулой (30) из леммы 18. К пространству $H_0^{\Gamma_0}$ применяется то же отождествление, что и в формуле (33) из определения 19. Отсюда следует, что

(i) имеет место равенство

$$H_0^{\Gamma_0} = \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma) h \mid h \in \mathcal{D}_{L, \pi} \right\};$$

(ii) представление π_0 продолжается до канонического представления π_0^P группы G в группу линейных изоморфизмов векторного пространства $\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} H_0^{\Gamma_0}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) является непосредственным следствием отождествления в формуле (33). Представление π_0^P из утверждения (ii) строится с помощью той же процедуры, что и в доказательстве предложения 20 (см. формулу (38)).

В следующей теореме мы определяем согласованное скалярное произведение на пространствах Γ_0 -инвариантных векторов, введенных выше, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Мы также строим унитарное представление на индуктивном пределе гильбертовых пространств Γ_0 -инвариантных векторов.

ТЕОРЕМА 33. *Во введенном выше контексте справедливы следующие утверждения.*

(i) Пусть $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и $h_1, h_2 \in \mathcal{D}_{L, \pi}$. По аналогии с формулой (36) определим

$$\left\langle \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma_0) h_1, \sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma'_0) h_2 \right\rangle_\infty = \left\langle P_{L^{\Gamma_0}} \left(\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma_0) h_1 \right), \sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma'_0) h_2 \right\rangle_\infty. \quad (50)$$

Для подгрупп $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$ из $\mathcal{S}$ включения $H_0^{\Gamma_0} \subseteq H_0^{\Gamma_1}$ изометрические. Поэтому (50) продолжается до скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ на $\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} H^{\Gamma_0}$.

(ii) Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ на пространстве $\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} H^{\Gamma_0}$ удовлетворяет условиям определения 14.

(iii) Напомним, что пространство L^{Γ_0} , введенное в (43), есть Γ_0 -блуждающее порождающее подпространство для представления $\pi|_{\Gamma_0}$. Пусть $\tilde{L}^{\Gamma_0}$ – другое Γ_0 -блуждающее порождающее подпространство пространства H для представления $\pi|_{\Gamma_0}$. Предположим, что существуют два ортогональных разбиения

$$\tilde{L}^{\Gamma_0} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_0} \tilde{L}_\gamma \quad \text{и} \quad L^{\Gamma_0} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma_0} L_\gamma$$

такие, что $\tilde{L}_\gamma = \pi(\gamma) L_\gamma$ для $\gamma \in \Gamma_0$. Тогда при замене в формуле (50) пространства L^{Γ_0} на $\tilde{L}^{\Gamma_0}$ значение скалярного произведения не изменяется.

(iv) Пусть $\bar{H}_0^P$ – гильбертово пространство пополнения индуктивного предела $\bigvee_{\Gamma_0 \in \mathcal{S}} H^{\Gamma_0}$ пространств, построенных в п. (i). Для $g \in G$ определим унитарное преобразование $\bar{\pi}_0^P(g)$ на $\bar{H}_0^P$ формулой (38) из доказательства предложения 20. Тогда $\bar{\pi}_0^P$ – унитарное представление группы G в унитарную группу гильбертова пространства $\bar{H}_0^P$.

Прежде чем доказывать теорему, сделаем несколько замечаний. Формулу (50) в определении скалярного произведения можно также продолжить формулой

$$\left\langle \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0) P_0 h, \sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma'_0) P_0 l \right\rangle_\infty.$$

Это доказывает, что скалярное произведение, которое мы определяем на $H_0^{\Gamma_0}$, согласуется со скалярным произведением на пространстве H^{Γ_0} , введенным в предложении 20.

В случае автоморфных форм, когда π_0 – представление π_n и P_0 – проекция Бергмана на ассоциированное пространство интегрируемых с квадратом аналитических функций, технические условия (v), (vi) в определении 1 следуют из того, что воспроизводящее ядро для пространства автоморфных форм является суммой по Γ воспроизводящих ядер, ограниченных на фундаментальную область, для операторов $\chi_F \pi_0(\gamma) \chi_F$, $\gamma \in \Gamma$. То же справедливо для суммы по любому двойному смежному классу – в этом случае сумма ядер равна воспроизводящему ядру для оператора Гекке, ассоциированного с двойным смежным классом. Сходимость воспроизводящих ядер выполняется в норме Гильберта–Шмидта [53]. Заметим, что в этой же работе [53] доказана абсолютная сходимость для суммы следов.

Подобие формуле скалярного произведения Петерссона следует из того, что в частном случае, соответствующем автоморфным формам, проекция P_L заменяется оператором проекции M_{χ_F} , полученным умножением на характеристическую функцию χ_F фундаментальной области F . Тот факт, что $P_0 M_{\chi_F}$ – оператор со следом, проверен в [19; § 3.3]. Формула (50) напоминает скалярное произведение Петерссона. Действительно, чтобы определить скалярное произведение Петерссона двух автоморфных форм f, g , используют L^2 -скалярное произведение $\chi_F f$ и g .

Заметим, что операторы Гекке можно было определить непосредственно с помощью формулы (55) из теоремы 34 ниже. Там (см. также [40]) мы дадим прямое доказательство того, что (55) является представлением алгебры Гекке двойных смежных классов подгруппы Γ_0 в G . С другой стороны, использование пространства $H_0^{\Gamma_0}$ в качестве пространства усредненных сумм по Γ влечет, что пространства Γ -инвариантных векторов, которые мы рассматриваем в теореме 33, соответствуют пространствам автоморфных форм.

Преимущество подхода, рассматриваемого в теореме 33, состоит в том, что мы имеем конкретные формулы для унитарного представления $\bar{\pi}_0^P$, описанные непосредственно в терминах исходных представлений π_n и их взаимодействия с $P_0 M_{\chi_F}$. Это будет использовано в настоящей работе для вычислений следов и характеров ассоциированных унитарных представлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 33. Мы используем тот факт, что сумма в формуле (48) из леммы 31 определяет конечномерную проекцию. Тогда скалярное произведение (50) равно

$$\begin{aligned} & \left\langle P_{L\Gamma_0} \left(\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma_0) h_1 \right), P_{L\Gamma_0} \left(\sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma'_0) h_2 \right) \right\rangle \\ &= \langle \mathcal{P}_{\Gamma_0, L} h_1, \mathcal{P}_{\Gamma_0, L} h_2 \rangle = \langle \mathcal{P}_{\Gamma_0, L} h_1, h_2 \rangle, \end{aligned} \quad (51)$$

что – ввиду того, что $\mathcal{P}_{\Gamma_0, L}$ – конечномерная проекция в L^{Γ_0} , – является корректно определенным скалярным произведением на пространстве $H_0^{\Gamma_0}$.

Тот факт, что для $\Gamma_0, \Gamma_1 \in \mathcal{S}$ таких, что $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$, включения $H_0^{\Gamma_0} \subseteq H_0^{\Gamma_1}$ изометрические, доказывается в точности так же, как в предложении 20. Утверждение (ii) является несложным следствием определения (50) скалярного произведения на Γ_0 -инвариантных векторах. Оно соответствует независимости от выбора фундаментальной области в формуле скалярного произведения Петерссона.

Докажем, что выполнено условие инвариантности (ii.3) из определения 14. Мы покажем, что $\pi_0^P(\sigma)$, $\sigma \in G$, изометрически отображает $H_0^{\Gamma_0 \sigma^{-1}}$ на $H_0^{\Gamma_0 \sigma}$. Как и выше, зафиксируем h_1, h_2 в $\mathcal{D}_{L, \pi}$. Тогда, используя формулу (51) и конструкцию представления π_0^P , получаем

$$\begin{aligned} & \left\langle \pi_0^P(\sigma) \left(\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi_0(\gamma_0) h_1 \right), \pi_0^P(\sigma) \left(\sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi_0(\gamma'_0) h_2 \right) \right\rangle_{\infty} \\ &= \left\langle \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_{\sigma}} \pi_0(\gamma_0) (\pi_0(\sigma) h_1), \sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_{\sigma}} \pi_0(\gamma'_0) (\pi_0(\sigma) h_2) \right\rangle_{\infty} \\ &= \left\langle P_{L\Gamma_{\sigma}} \left[\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_{\sigma}} \pi_0(\gamma_0) (\pi_0(\sigma) h_1) \right], (\pi_0(\sigma) h_2) \right\rangle, \end{aligned}$$

что, в силу унитарности $\pi_0(\sigma)$ на H_0 , равно

$$\left\langle [\pi(\sigma^{-1})P_{L^{\Gamma_\sigma}}\pi(\sigma)]\pi_0(\sigma^{-1})\left[\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_\sigma} \pi_0(\gamma_0)(\pi_0(\sigma)h_1)\right], h_2 \right\rangle. \quad (52)$$

Здесь $\pi(\sigma^{-1})P_{L^{\Gamma_\sigma}}\pi(\sigma)$ – проекция на пространство $\tilde{L} = \pi(\sigma^{-1})L^{\Gamma_\sigma}$. Это пространство является $\Gamma_{\sigma^{-1}}$ -блуждающим порождающим подпространством для представления $\pi|_{\Gamma_{\sigma^{-1}}}$. Обозначим через $P_{\tilde{L}}$ ортогональную проекцию на $\tilde{L}$. Тогда (52) равно

$$\left\langle P_{\tilde{L}}\left(\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi_0(\gamma_0)h_1\right), h_2 \right\rangle. \quad (53)$$

В силу технического условия (ii) определения 1 подпространство $\tilde{L}$ эквивалентно подпространству $L^{\Gamma_{\sigma^{-1}}}$ в смысле п. (iii) настоящей теоремы. Поэтому, ввиду п. (iii), получаем, что (53) равно

$$\left\langle P_{L^{\Gamma_{\sigma^{-1}}}}\left(\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi_0(\gamma_0)h_1\right), h_2 \right\rangle = \left\langle \sum_{\gamma_0 \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi_0(\gamma_0)h_1, \sum_{\gamma'_0 \in \Gamma_{\sigma^{-1}}} \pi_0(\gamma'_0)h_2 \right\rangle_\infty.$$

В силу определения скалярного произведения в п. (i), эта цепочка равенств доказывает, что $\pi_0^p(\sigma)$ изометрически отображает $H_0^{\Gamma_{\sigma^{-1}}}$ на $H_0^{\Gamma_\sigma}$. Более общо, для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ рассуждение того же типа дает, что $\pi_0^p(\sigma)$ отображает $H_0^{\Gamma_{\sigma^{-1}} \cap \Gamma_0}$ на $H_0^{\Gamma_\sigma \cap \Gamma_0 \sigma^{-1}}$. Поэтому условие инвариантности (ii.3) из определения 14 в данном случае выполняется. Пункт (iv) является несложным следствием предыдущего рассуждения. Теорема доказана.

В следующей теореме мы описываем унитарно эквивалентное представление операторов Гекке, действующих на пространствах Γ_0 -инвариантных векторов, введенных в теореме 33. Ниже мы докажем, что проекция $\mathcal{P}_{\Gamma_0, L} \in B(L^{\Gamma_0})$, определенная формулой (48), унитарно эквивалентна другой проекции, определенной формулой (56). Это полезно для вычисления размерностей Γ_0 -инвариантных векторов. Дело в том, что мы доказываем, что образ $\mathcal{P}_{\Gamma_0, L}$, который является подпространством из L^{Γ_0} , унитарно эквивалентен пространству векторов, ассоциированных с H_0 , которые неподвижны относительно Γ_0 .

Формула воспроизводящего ядра для проекции на пространство автоморфных форм и формула воспроизводящего ядра для операторов Гекке, полученные в [53], доказывают, что пространства $H_0^{\Gamma_0}$ и соответствующее действие операторов Гекке на пространствах Γ_0 -инвариантных векторов, введенные в лемме 32 и в следующей теореме, такие же (для верхней полуплоскости), как в классическом случае.

ТЕОРЕМА 34. *Предположим, что выполнены условия теоремы 33. Пусть $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. По лемме 21 представление алгебры Гекке $\mathcal{H}_0(\Gamma_0, G)$, ассоциированное с представлением π_0 , определяется соответствием*

$$[\Gamma_0 \sigma \Gamma_0] \rightarrow [\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^p(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}}, \quad \sigma \in G. \quad (54)$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Рассмотрим бесконечные суммы по смежным классам подгруппы Γ_0 , которые сходятся в силу условий (v), (vi) определения 1:

$$A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0) = \sum_{\theta \in \Gamma_0\sigma\Gamma_0} P_{L^{\Gamma_0}}\pi_0(\theta)P_{L^{\Gamma_0}}, \quad \sigma \in G; \quad (55)$$

тогда

$$A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0) = \mathcal{P}_{\Gamma_0,L}A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0)\mathcal{P}_{\Gamma_0,L},$$

и поэтому $A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0)$ лежит в $B(\mathcal{P}_{\Gamma_0,L}L^{\Gamma_0})$.

(ii) Соответствие

$$[\Gamma_0\sigma\Gamma_0] \rightarrow A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0), \quad \sigma \in G,$$

определяет $*$ -представление алгебры $\mathcal{H}_0(\Gamma_0, G)$ в $B(P_{\Gamma_0,L}L^{\Gamma_0})$. Это представление унитарно эквивалентно $*$ -представлению (см. (54)) алгебры Гекке с помощью операторов Гекке, ассоциированных с представлением π_0 .

Заметим, что оператор $A(\Gamma_0) = \mathcal{P}_{\Gamma_0,L}$ унитарно эквивалентен проекции на Γ_0 -инвариантные векторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сходно с доказательством теоремы 22. Так же, как в теореме 22 и ее доказательстве, задавая скалярное произведение формулой (50), для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ можно определить частичные изометрии $W^{\Gamma_0}: L^{\Gamma_0} \rightarrow H^{\Gamma_0}$ формулой

$$W^{\Gamma_0}l = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \pi_0(\gamma)l, \quad l \in L^{\Gamma_0}.$$

В отличие от случая, рассмотренного в теореме 22, операторы W^{Γ_0} являются частичными изометриями, имеющими в качестве исходного пространства проекцию $\mathcal{P}_{\Gamma_0,L}$, введенную в (48), с образами, равными пространствам H^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$.

Мы используем частичные изометрии W^{Γ_0} с исходным пространством, являющимся проекцией $\mathcal{P}_{\Gamma_0,L}$ в $B(L^{\Gamma_0})$. Тогда W^{Γ_0} унитарно преобразует оператор Гекке $P_{H^{\Gamma_0}}\bar{\pi}^p(\sigma)P_{H^{\Gamma_0}}$, $\sigma \in G$, в выражение в формуле (55).

Формула (49) показывает, что для всех $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и $\sigma \in G$

$$A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0) = A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0)\mathcal{P}_{\Gamma_0,L} = \mathcal{P}_{\Gamma_0,L}A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0).$$

В силу той же формулы операторы

$$A_0(\Gamma_0\sigma\Gamma_0), \quad \sigma \in G,$$

определяют представление алгебры Гекке двойных смежных классов подгруппы Γ_0 в G . Теорема доказана.

Теорема 34 дает явное представление операторов Гекке, ассоциированных с представлением $\bar{\pi}_0^p$ группы $\bar{G}$ в $\bar{H}_0^p$, напрямую используя информацию из исходного представления $\bar{\pi}_0^p$. Мы подытоживаем это в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть L^{Γ_0} – подпространство, заданное формулой (43) и наделенное нормированным скалярным произведением, заданным формулой (44). С использованием теоремы 34 доказательство формулы (4) становится идентичным доказательству соответствующей формулы (46) в следствии 24. Мы выбираем представителей смежных классов так, как указано в формулировке теоремы. Для перехода от формулы (55) к формуле (4) надо просто использовать унитарный оператор

$$\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma) \otimes L \cong \bigoplus [\Gamma_0 s_i] \otimes L, \quad L^{\Gamma_0} = \bigoplus \pi(s_i)L,$$

отображающий $\bigoplus [\Gamma_0 s_i] \otimes l_i$ на $\bigoplus \pi(s_i)l_i$ при $l_i \in L$.

Когда σ является единицей в формуле (4), получаем проекцию

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{\Gamma_0, L} = \sum_{i, j} \sum_{\gamma \in s_i^{-1} \Gamma_0 s_j} P_L \pi_0(\gamma) P_L \otimes e_{\Gamma_0 s_i, \Gamma_0 s_j}. \quad (56)$$

Следовательно, операторы в формуле (4) принадлежат алгебре

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{\Gamma_0, L} [B(\ell^2(\Gamma_0 \backslash \Gamma)) \otimes B(L)] \widetilde{\mathcal{P}}_{\Gamma_0, L}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 35. Пусть выполнены условия теоремы 34. В силу формулы (4) один из эквивалентных методов построения представления операторов Гекке состоит в следующем. Как и в примере 27, рассмотрим векторное пространство

$$\mathcal{V}^{\Gamma_0} = \ell^2(\Gamma_0 \backslash G), \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}.$$

На $\mathcal{V}^{\Gamma_0}$ определим скалярное произведение как линейное продолжение следующей билинейной формы:

$$\langle \Gamma_0 \sigma_1, \Gamma_0 \sigma_2 \rangle_{\pi_0} = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0]} \sum_{\theta \in \sigma_1^{-1} \Gamma_0 \sigma_2} \text{Tr}(P_L \pi_0(\theta) P_L), \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G.$$

Для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ рассмотрим обычное алгебраическое представление операторов Гекке на $\mathbb{C}(\Gamma_0 \backslash G)$. Рассматривая на $\mathbb{C}(\Gamma_0 \backslash G)$ введенное выше скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\pi_0}$, получаем представление алгебры Гекке, унитарно эквивалентное представлению, заданному формулой (4).

Это соответствует рассмотрению состояния ε на $C^*(\overline{G})$, определенного формулой

$$\varepsilon(\chi_{\sigma_1^{-1} \Gamma_0 \sigma_2}) = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0]} \sum_{\theta \in \sigma_1^{-1} \Gamma_0 \sigma_2} \text{Tr}(P_L \pi_0(\theta) P_L), \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G.$$

Состояние ε не может быть одновременно использовано на всех уровнях $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ из-за перенормировочного множителя $1/[\Gamma : \Gamma_0]$. Заметим, что состояние ε фактически является композицией следа с семейством вполне положительных отображений, построенных в теореме 37.

6. Значения характера θ_{π_0} , ассоциированного с представлением π_0

В этом разделе мы выводим формулу следа для представления $\bar{\pi}_0^P$. Заметим, что $\bar{\pi}_0^P$ есть представление типа I C^* -алгебры $C^*(\bar{G})$. Согласно предложению 17, представление $\bar{\pi}_0^P$ продолжается до представления алгебры $\mathcal{A}(G, \bar{G})$ (или $\mathcal{A}_\epsilon(G, \bar{G})$, если имеется 2-коцикл). По теореме 2 имеем формулу для оператора Гекке $P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^P(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}}$, ассоциированного с представлением $\bar{\pi}_0^P$. Как объясняется ниже, это связывает формулу следа для представления $\bar{\pi}_0^P$ с формулой следа для представления π_0 .

Следующая лемма доказана в [12] (см. [12; формула (13)]). Здесь мы приводим другое доказательство.

ЛЕММА 36. *Характер $\theta_{\bar{\pi}_0^P} = \text{“Tr } \bar{\pi}_0^P\text{”}$ представления $\bar{\pi}_0^P$ вычисляется по формуле (7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тот факт, что характер локально интегрируем [45], получаем следующую формулу:

$$\theta_{\bar{\pi}_0^P}(\sigma) = \lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{\mu(\bar{\Gamma}_0 \sigma \bar{\Gamma}_0)} \text{Tr}(\bar{\pi}_0^P(\chi_{\bar{\Gamma}_0 \sigma \bar{\Gamma}_0})), \quad \sigma \in G. \quad (57)$$

В обозначениях, введенных перед леммой 21, имеем

$$\mu(\bar{\Gamma}_0 \sigma \bar{\Gamma}_0) = [\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] \mu(\bar{\Gamma}_0 \sigma), \quad \Gamma_0 \in \mathcal{S}, \quad \sigma \in G.$$

Мера μ получена из меры Хаара на проконечном пополнении группы Γ и, в силу общих предположений, бивариантна на $\bar{G}$; поэтому правая часть последнего равенства есть

$$[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] \frac{1}{[\Gamma : \Gamma_0]}.$$

Следовательно, правая часть в (57) равна

$$\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{[\Gamma : \Gamma_0]}{[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma]} \text{Tr}(\bar{\pi}_0^P(\chi_{\bar{\Gamma}_0 \sigma \bar{\Gamma}_0})).$$

Принимая во внимание формулу (39) леммы 21, получаем, что последнее выражение равно

$$\begin{aligned} & \lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} [\Gamma : \Gamma_0]^2 \text{Tr}(\bar{\pi}_0^P(\chi_{\bar{\Gamma}_0}) \bar{\pi}_0^P(\sigma) \bar{\pi}_0^P(\chi_{\bar{\Gamma}_0})) \\ &= \lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \frac{1}{(\mu(\bar{\Gamma}_0))^2} \text{Tr}(\bar{\pi}_0^P(\chi_{\bar{\Gamma}_0}) \bar{\pi}_0^P(\sigma) \bar{\pi}_0^P(\chi_{\bar{\Gamma}_0})). \end{aligned} \quad (58)$$

Если K_0 – замыкание подгруппы из $\mathcal{S}$, то в $C^*(\bar{G})$, используя произведение сверточных операторов, имеем $(\chi_{K_0})^2 = \mu(K_0) \chi_{K_0}$. Поэтому $\frac{1}{\mu(K_0)} \chi_{K_0}$ является проекцией. Обозначим через $\tilde{\chi}_{K_0}$ перенормированный сверточный оператор $\frac{1}{\mu(K_0)} \chi_{K_0}$. Тогда правая часть в (58) принимает вид

$$\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \text{Tr}(\bar{\pi}_0^P(\tilde{\chi}_{\bar{\Gamma}_0}) \bar{\pi}_0^P(\sigma) \bar{\pi}_0^P(\tilde{\chi}_{\bar{\Gamma}_0})).$$

Так как $\bar{\pi}_0^p$ – представление алгебры $C^*(G, \bar{G})$, это равно

$$\lim_{\Gamma_0 \downarrow e, \Gamma_0 \in \mathcal{S}} \text{Tr}(P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^p(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}}).$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4. Формула (8) вытекает непосредственно из (7) и (5). Сгруппируем слагаемые суммы из формулы (8) в соответствии с классами сопряженности и возьмем предел. Тот факт, что группа Γ_g^{st} тривиальна, запрещает любому $\gamma \in \Gamma$ появляться более одного раза в сумме из формулы (8). Абсолютная сходимости сумм, участвующих в предельном переходе (определение 1), влечет второе утверждение следствия.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 7. Напомним, что для группового элемента $g \in G$ стабилизатор Γ_g^{st} – это подгруппа $\{\gamma \mid \gamma g = g\gamma\}$. Пусть σ – элемент из $G = \text{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$ такой, что $\Gamma_\sigma^{\text{st}}$ тривиален. Тогда в формуле (9) сумму

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}(P_L \pi_n(\gamma \sigma \gamma^{-1})) \quad (59)$$

можно вычислить напрямую, используя функцию символа Березина [3].

Действительно, эту сумму можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}_{B(H_n)}(M_{\chi_F} \pi_0(\gamma) \pi_0(\sigma) \pi_0(\gamma^{-1})) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}_{B(H_n)}(M_{\chi_F} \pi(\gamma) \pi_0(\sigma) \pi(\gamma^{-1})) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}_{B(H_n)}(\pi(\gamma^{-1}) M_{\chi_F} \pi(\gamma) \pi_0(\sigma)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \text{Tr}_{B(H_n)}(M_{\gamma \chi_F} \pi_0(\sigma)). \end{aligned}$$

Пусть $d\nu_0(z) = (\text{Im } z)^{-2} d\bar{z} dz$ – каноническая $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ -инвариантная мера на $\mathbb{H}$ и $\widehat{\pi_n(\theta)}(\bar{z}, z)$, $z \in \mathbb{H}$, – контравариантный символ Березина [3] унитарного оператора $\pi_n(\theta)$. Тогда правая часть приведенной выше цепочки равенств есть не что иное, как

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma F} \widehat{\pi_n(\theta)}(\bar{z}, z) d\nu_0(z),$$

что, в свою очередь, равно

$$\int_{\mathbb{H}} \widehat{\pi_n(\theta)}(\bar{z}, z) d\nu_0(z).$$

Это последнее выражение – характер “ $\text{Tr } \pi_n(\sigma)$ ” представления π_n (см. [32]). (Формула для суммы (59) другим способом получена в [53].) Следствие 7 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Обозначим гильбертово пространство, на котором действует представление $\bar{\pi}_0^R$, через H_0^R . Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{B(H_0^R)} \left(\int_{\bar{G}^R} f(g) \bar{\pi}_0^R(g) dg \right) &= \sum_{\gamma} \mathrm{Tr}_{B(H_0^R)} \left(P_{[\pi(\gamma)L]} \int_{\bar{G}^R} f(g) \bar{\pi}_0^R(g) dg \right) \\ &= \sum_{\gamma} \int_{\bar{G}^R} f(g) \mathrm{Tr}_{B(H_0^R)} (P_{\pi(\gamma)L} \bar{\pi}_0^R(g)) dg \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\bar{G}^R} f(g) \mathrm{Tr}_{B(L)} (P_L \bar{\pi}_0^R(\gamma g \gamma^{-1}) P_L) dg \\ &= \int_{\bar{G}^R} f(g) \sum_{\gamma} \mathrm{Tr}_{B(L)} (P_L \bar{\pi}_0^R(\gamma g \gamma^{-1}) P_L) dg. \end{aligned}$$

Утверждение (ii) вытекает из следствия 4. Лемма доказана.

7. Случай, когда представление π допускает “квадратный корень” $\pi_0 \otimes \pi_0^{\mathrm{op}}$

В этом разделе изучается случай, когда унитарное представление π из раздела 3 допускает квадратный корень $\pi_0 \otimes \pi_0^{\mathrm{op}}$, где π_0 – (проективное) унитарное представление, рассмотренное в разделе 5. Так как обозначение $\bar{\pi}^P$ закреплено за продолжением представления π на пополнение Шлихтинга, мы используем в этом разделе обозначение π^{op} для представления, сопряженного к π_0 .

Это ситуация примера 28 в разделе 4, когда $G = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}[1/p])$, p простое, Γ – модулярная группа, $\mathcal{X} = \mathbb{H}$, а $\pi_{\mathrm{Коор}}$ – представление Купмана на $L^2(\mathbb{H}, \nu_0)$, соответствующее действию группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ преобразованиями Мёбиуса на верхней полуплоскости. Используя технику квантизации Березина [3], независимо отмеченную в [3] (см. также [36]), получаем

$$\pi_{\mathrm{Коор}} = \pi_n \otimes \pi_n^{\mathrm{op}}, \quad n \geq 1,$$

где π_n – любое представление из дискретной серии группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Мы используем это в качестве мотивации для непосредственного изучения представлений вида $\pi_0 \otimes \pi_0^{\mathrm{op}}$, где π_0 такое же, как в предыдущем разделе.

Прежде чем приступить к этому анализу, отметим одно дополнительное свойство, присущее всем представлениям $\bar{\pi}_0^P, \bar{\pi}^P$, построенным в разделах 5 и 6. Мы докажем, что эти представления находятся во взаимно однозначном соответствии со вполне положительными отображениями Φ – с *-представлениями системы операторов, введенными в определении 14.

Введем следующие обозначения. Если $g \in G$, положим $L_g \in C^*(G)$ равным свертке с g . Если f – функция из $C(\bar{G})$, обозначим через $L_f \in C^*(\bar{G})$ оператор свертки с f . Такое представление играет роль “операторнозначного собственного вектора” для алгебры Гекке.

Действительно, мы докажем, в частности, следующее свойство отображения Φ . Если $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ и

$$[\Gamma \sigma_1 \Gamma][\Gamma \sigma_2] = \sum_j [\Gamma \theta_j],$$

то

$$\Phi(L_{\chi_{[\Gamma\sigma_1\Gamma]}})\Phi(L_{\chi_{[\Gamma\sigma_2\Gamma]}}) = \sum_j \Phi(L_{\chi_{[\Gamma\theta_j\Gamma]}}).$$

Если бы Φ принимало скалярные значения, то данное свойство было бы в точности тем свойством, которым обладало бы собственное значение для действия алгебры Гекке на $\ell^2(\Gamma \backslash G)$.

Пусть $\mathcal{A}_0(G, \overline{G}) \subseteq \mathcal{A}(G, \overline{G})$ – всюду плотная подалгебра, порожденная операторами свертки с элементами из G и операторами свертки с характеристическими функциями смежных классов подгрупп из $\mathcal{S}$. В этом разделе мы обозначаем через $\mathcal{P}_{\pi_0, L}$ введенную в формуле (48) проекцию, соответствующую $\Gamma_0 = \Gamma$.

ТЕОРЕМА 37. Пусть π_0 – представление группы G из определения 1. Определим линейное отображение $\Phi: \mathcal{A}_0(G, \overline{G}) \rightarrow B(L)$ следующим образом. Пусть $g \in G$, $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, и пусть $g\overline{\Gamma}_0$ – соответствующий смежный класс. Положим

$$\begin{aligned} \Phi(L_{\chi_{g\overline{\Gamma}_0}}) &= \sum_{\theta \in g\Gamma_0} P_L \pi_0(\theta) P_L, \\ \Phi(L_g) &= P_L \pi(L_g) P_L. \end{aligned} \tag{60}$$

Тогда Φ обладает следующими свойствами.

- (i) Представление $\Phi|_{\mathcal{O}(K, G)}$ является $*$ -представлением введенной в определении 8 системы операторов $\mathcal{O}(K, G)$, принимающим значения в $B(L)$.
- (ii) Рассмотрим векторное пространство $L(K, \overline{G}) \subseteq \mathcal{O}(K, G)$, введенное в определении 8. Тогда $\Phi|_{L(K, \overline{G})}$ принимает значения в $B(L)\mathcal{P}_{\pi_0, L}$ и $\Phi|_{\mathcal{H}_0(K, \overline{G})}$ является представлением $*$ -алгебр алгебры $\mathcal{H}_0(K, \overline{G})$ в $\mathcal{P}_{\pi_0, L}B(L)\mathcal{P}_{\pi_0, L}$. Следовательно, $\Phi|_{\mathcal{O}(K, G)}$ принимает значения в $B(L)\mathcal{P}_{\pi_0, L}B(L)$.
- (iii) Отображение Φ вполне положительно на $\mathcal{A}_0(G, \overline{G})$, т. е. оно отображает положительные элементы вида X^*X , $X \in \mathcal{A}_0(G, \overline{G})$, в положительные элементы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из формулы (49). Формула (18) из леммы 9 в сочетании с леммой 41 также дает доказательство утверждения (i).

Утверждение (ii) следует из утверждения (i).

Докажем утверждение (iii). Используется тот факт, что свойство (i) доказывает положительность отображения Φ на положительных элементах X^*X , где $X \in \mathbb{C}(\chi_{\sigma K} \mid \sigma \in G)$. Для подгруппы $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ мы рассуждаем следующим образом. Положим K_0 равным замыканию в $\overline{G}$ подгруппы Γ_0 . Сначала используем лемму 38, чтобы установить положительность отображения $\Phi_{\Gamma_0}(X_0^*X_0)$ для X_0 из $\mathbb{C}(\chi_{\sigma K_0} \mid \sigma \in G)$. Из формулы сведения (61) следует, что $\Phi(X_0^*X_0)$ также положительно. Теорема 37 доказана.

Данную теорему легко обобщить, заменяя Γ на подгруппу $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. В этом случае имеется очевидное соотношение между соответствующими представлениями систем операторов (мы используем определения и обозначения из теоремы 37).

ЛЕММА 38. Пусть Γ_0 – любая подгруппа из $\mathcal{S}$, и пусть L^{Γ_0} определено в теореме 33. Тогда, используя L^{Γ_0} вместо L , можно повторить описанное выше построение для Γ_0 вместо группы Γ . Соответствующее вполне положительное отображение Φ_{Γ_0} , построенное в теореме 37, будет иметь те же свойства, что и Φ , с заменой Γ , K на Γ_0 , $\bar{\Gamma}_0$.

Вложим L в $L_0^\Gamma = \bigoplus_i \pi(s_i)L \subseteq H_0$, отображая $l \in L$ в вектор $l \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots$.

(Заметим, что это вложение отлично от диагонального вложения пространства L в L_0^Γ , которое мы использовали в теореме 33.) Обозначим через $\tilde{P}_L$ проекцию из L^{Γ_0} на L . Тогда

$$\Phi = \tilde{P}_L \Phi_{\Gamma_0} \tilde{P}_L. \quad (61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это легко следует из формулы (60).

ЗАМЕЧАНИЕ 39. Операторы $\Phi(\chi_{\sigma K}) \in B(L)$, $\sigma \in G$, не являются изометриями, так как Φ не является представлением $*$ -алгебр. Однако, как мы сейчас покажем, операторы $\Phi(\chi_{\sigma K})$ являются произведениями проекции и изометрии.

Действительно, для $\sigma \in G$ частичная изометрия $L(\chi_{\sigma K})$ имеет в качестве исходного пространства проекцию $L(\chi_{\sigma K \sigma^{-1}})$, а в качестве образа $L(\chi_K)$.

Рассмотрим пространства L^{Γ_0} , $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$, введенные в определении 19. Эти пространства были определены там только в случае, когда Γ_0 – подгруппа группы Γ . Определим $L^{\sigma \Gamma \sigma^{-1}} \subseteq L^{\Gamma_\sigma}$ формулой

$$L^{\sigma \Gamma \sigma^{-1}} = \pi_0(\sigma)L.$$

Тогда

$$\bar{\pi}^P(L(\chi_{\sigma K})) = P_{L^{\sigma \Gamma \sigma^{-1}}} \bar{\pi}_0^P(L(\chi_{\sigma K})) P_L.$$

С другой стороны, используя скрещенное вложение пространства L в L^{Γ_σ} из леммы 38, получаем, что

$$\Phi(\chi_{\sigma K}) = \tilde{P}_L \bar{\pi}_0^P(L(\chi_{\sigma K})) P_L.$$

Здесь проекция P_L соответствует стандартному вложению пространства L в L^{Γ_σ} , описанному в определении 19, а $\tilde{P}_L$ – проекция из леммы 38.

Вполне положительные отображения, определенные в теореме 37, являются строительными блоками операторов Гекке. Следующий результат показывает, что представление из теоремы 37 кодирует все свойства представления $\bar{\pi}_0^P$. Поэтому, зная Φ , можно восстановить представление $\bar{\pi}_0^P$, а значит, и представление π .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 40. В контексте теоремы 37 формула для операторов Гекке, предложенная в теореме 33, имеет следующий вид. Зафиксируем $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$ и выберем разложение на смежные классы $\Gamma = \bigcup s_i \Gamma_0$. Тогда

$$[\Gamma_0 : (\Gamma_0)_\sigma] P_{H_0^{\Gamma_0}} \bar{\pi}_0^P(\sigma) P_{H_0^{\Gamma_0}} = \sum_{i,j} \Phi(\chi_{s_i^{-1} \Gamma_0 \sigma \Gamma_0 s_j}) \otimes e_{\Gamma_0 s_i, \Gamma_0 s_j}, \quad \sigma \in G. \quad (62)$$

Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между представлениями π_0 из определения 1 и вполне положительными отображениями Φ со свойствами (i)–(iii) из теоремы 37.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (62) есть не что иное, как формула (55) из теоремы 34, переписанная в новом контексте с помощью формулы (60) из теоремы 37.

Предположим, что имеют место свойства (i)–(iii) из теоремы 37. Докажем, что операторы в формуле (62) определяют представление алгебры Гекке двойных смежных классов для всех $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$.

Проверка мультипликативности операторов Гекке, заданных формулой (62), сводится к проверке тождества вида

$$\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} P_{L\Gamma_0} \pi_0(\sigma_1 \gamma_0) P_{L\Gamma_0} (\pi_0(\gamma_0^{-1} \sigma_2)) P_{L\Gamma_0} = P_{L\Gamma_0} (\pi_0(\sigma_1 \sigma_2)) P_{L\Gamma_0}. \quad (63)$$

Причина, по которой выполняется это равенство, состоит в том, что $P_{L\Gamma_0}$ – проекция на Γ_0 -блуждающее порождающее подпространство пространства H (см. также приводимое далее доказательство леммы 9). Таким образом, единственное тождество, в силу которого представление в формуле (62) является представлением алгебры Гекке, – это тождество

$$\sum_{\gamma_0 \in \Gamma_0} \pi(\gamma_0) P_{L\Gamma_0} \pi(\gamma_0^{-1}) = \text{Id}_{H_0}.$$

В силу разложения $P_{L\Gamma_0} = \sum_i \pi(s_i) P_L \pi(s_i)$, это вытекает из тождества

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \pi(\gamma) P_L \pi(\gamma^{-1}) = \text{Id}_{H_0}.$$

Но это есть в точности тождество, доказывающее свойство мультипликативности (ii) в теореме 37.

Таким образом, если мы знаем, что Φ обладает свойством мультипликативности (ii) из теоремы 37, то мы автоматически получаем, что вполне положительные отображения Φ_{Γ_0} обладают соответствующим свойством мультипликативности из п. (ii) на соответствующих системах операторов $\mathcal{O}(\bar{\Gamma}_0, \bar{G})$ для $\Gamma_0 \in \mathcal{S}$. Пусть $\mathcal{P}_{\Gamma_0, L}$ – проекция, введенная в (48).

Поскольку системы операторов содержат соответствующие алгебры Гекке $\mathcal{H}_0(\bar{\Gamma}_0, \bar{G})$, то представление в формуле (62) является представлением *-алгебр индуктивного предела всех вышеупомянутых алгебр Гекке в индуктивном пределе пространств $\mathcal{P}_{\Gamma_0, L} B(L^{\Gamma_0}) \mathcal{P}_{\Gamma_0, L}$. Но этот индуктивный предел есть в точности пространств ограниченных операторов, действующих на гильбертовом пространстве $\bar{H}_0^P$. Так как наряду с алгебрами Гекке у нас также есть представление пространств смежных классов, получаем, что мы восстановили унитарное представление $\bar{\pi}_0^P$ алгебры $C^*(\bar{G})$. Отсюда можно восстановить π_0 в силу теоремы 37. Предложение доказано.

В обсуждаемых ниже утверждениях (леммы 9, 41 и теорема 10) мы напомним результаты из [38], см. также [37], [40] (мы адаптируем формулировки этих результатов к рамкам настоящей работы). Лемма 9 дополняет утверждение теоремы 37. Мы доказываем, что вполне положительные отображения из теоремы 37 обладают естественным поднятием на алгебру $\mathcal{L}(G) \otimes B(L)$. Это поднятие послужило важным инструментом при доказательстве в работе [37]

оценок спектра операторов Гекке в существенной норме. В частности, мы даем другую интерпретацию свойства (ii) из теоремы 37.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9 (доказательство можно также найти в [38; предложение 2.2 и лемма 3.1]). Основной шаг вывода свойства мультипликативности в формуле (18) состоит в следующем: отождествляя коэффициенты элементов $\rho(g)$, $g \in G$, в обеих частях равенства, мы сводим доказательство свойства мультипликативности к доказательству следующего равенства (используемого также в доказательстве предложения 40):

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \Gamma} P_L \pi_0(\sigma_1 \gamma) P_L \pi_0(\gamma^{-1} \sigma_2) P_L &= \sum_{\gamma \in \Gamma} P_L \pi_0(\sigma_1) \pi(\gamma) P_L \pi(\gamma^{-1}) \pi_0(\sigma_2) P_L \\ &= P_L \pi_0(\sigma_1) \pi_0(\sigma_2) P_L = P_L \pi_0(\sigma_1 \sigma_2) P_L, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G. \end{aligned}$$

Операторы $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$, определенные в лемме 9, допускают интерпретацию, аналогичную приведенной в замечании 39. Более того, в силу сделанного в теореме 33 предположения о сходимости, для сумм вида $\sum_{\theta \in C} P_L \pi_0(\theta) P_L$ со смежными классами C в $\bar{G}$ операторы $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(C)$ являются поднятиями операторов $\Phi(C)$, определенных в теореме 37.

Это доказывается в следующем утверждении, которое является несложным следствием теоремы 37 и леммы 9.

ЛЕММА 41. Пусть ε – неограниченный характер на $\ell^1(G) \subseteq \mathcal{L}(G)$, который ставит в соответствие элементу $x \in \ell^1(G)$ сумму его коэффициентов. Продолжим ε до неограниченного характера $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \otimes \text{Id}_{B(L)}$:

$$\tilde{\varepsilon}: \ell^1(G) \otimes B(L) \subseteq \mathcal{R}(G) \otimes B(L) \rightarrow B(L).$$

Из предположения о сходимости (v) в определении 1 следует, что образ $*$ -представления $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$, построенного в лемме 9, содержится в области определения характера $\tilde{\varepsilon}$. Поэтому для Φ , определенного в теореме 37, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\tilde{\varepsilon} \circ \tilde{\Phi}_{\pi_0, L}|_{\mathcal{O}(K, \bar{G})} = \Phi|_{\mathcal{O}(K, \bar{G})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение сразу следует из формул для Φ и $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$ в теореме 37 и лемме 9 соответственно.

Операторы $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$ используются для построения унитарно эквивалентного представления (см. формулу (19) для операторов Гекке, ассоциированных с унитарным диагональным представлением $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ группы G , где π_0 – такое, как в определении 1). Это было впервые доказано (в случае размерности Мюррея–фон Неймана, равной единице) в [37; теорема 22] (см. также более краткое изложение в [40]) и затем обобщено на произвольную размерность в [38; теорема 3.2]. Для удобства читателя (так как мы объясняем пример представления алгебры Гекке, ассоциированной с унитарным представлением $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ группы G) мы напоминаем формулировку теоремы 3.2 из [38]. В теореме 12 мы приводим другое доказательство того, что формула (19) дает представление алгебры Гекке двойных смежных классов подгруппы Γ в G .

Мы используем отождествления, доказанные в примере 30, и операторы $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$, введенные в лемме 9, чтобы явно описать операторы Гекке на Γ -инвариантных векторах, ассоциированные с унитарным диагональным представлением $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$ группы G . В этом случае легче работать с гильбертовыми пространствами Γ -инвариантных векторов, так как эти пространства можно канонически отождествить с L^2 -пространствами алгебры фон Неймана операторов, коммутирующих с образом представления группы Γ .

В [37], используя методы квантизации Березина [3] или же результаты из [42], мы доказали, что вышеописанная модель для операторов Гекке, действующих на Γ -инвариантных векторах для $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$, унитарно эквивалентна представлению операторов Гекке ассоциированной алгебры фон Неймана форм Маасса.

Содержание теоремы 10 заключается в явной модели в терминах операторных алгебр для предыдущего представления, ассоциированного с $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$.

Мы приводим прямое доказательство в частном случае $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H = 1$ (теорема 12) того факта, что операторы Гекке, введенные формулой (19) в теореме 10, определяют мультипликативное представление алгебры Гекке двойных смежных классов группы Γ в G . Это доказательство показывает, что представление алгебры Гекке, определяемое операторами Гекке для $\pi_0 \otimes \pi_0^{\text{op}}$, получается из канонического представления алгебры Гекке, которое далее берется в композиции с факторотображением. Для простоты изложения предполагаем далее, что группы Γ и G имеют бесконечные нетривиальные классы сопряженности и, значит, ассоциированные алгебры фон Неймана имеют единственные следы.

ЗАМЕЧАНИЕ 42. Предположим, что $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H = 1$. В постановке теоремы 22 в разделе 3 мы берем $L = L_0 = \mathbb{C}\xi$, где $\xi \in H_0$ – циклический следовой вектор для $\pi|_{\Gamma}$. Построение в лемме 9 дает линейное отображение $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L_0}$, которое мы теперь обозначаем через t :

$$t: \mathcal{H}_{\text{red}}(\Gamma, G) \rightarrow \mathcal{R}(G) \otimes B(L_0) \cong \mathcal{R}(G).$$

Так как L_0 одномерно, то с помощью вектора ξ отождествляя $L_0 = \mathbb{C}\xi$ с $\mathbb{C}$, получаем, что можно заменить $P_{L_0}\pi_0(\theta)P_{L_0}$ на

$$\text{Tr}(P_{L_0}\pi_0(\theta)P_{L_0}) = \langle \pi_0(\theta)\xi, \xi \rangle, \quad \theta \in G.$$

Для смежного класса C подгруппы из $\mathcal{S}$ формула для $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L_0}(\chi_C)$ из леммы 9 теперь имеет вид

$$t(\chi_C) = \sum_{\theta \in C} \langle \pi_0(\theta)\xi, \xi \rangle \rho(\theta).$$

Рассмотрим композицию отображения t с каноническим антиизоморфизмом между $\mathcal{L}(G)$ и $\mathcal{R}(G)$ (для простоты обозначим ее снова через t). Таким образом, t – линейное отображение из $C^*(G)$ со значениями в $\mathcal{L}(G)$. Обозначим через λ_g левые свертки элементами $g \in G$. Тогда t задается формулой

$$t(\chi_C) = \sum_{\theta \in C} \overline{\langle \pi_0(\theta)\xi, \xi \rangle} \lambda(\theta).$$

В силу леммы 9 отображение t является $*$ -сохраняющим мультипликативным представлением системы операторов $\mathcal{O}_{\Gamma, G} = \mathcal{O}(K, \overline{G})$, введенной в определении 8:

$$\mathcal{O}_{\Gamma, G} = [\mathrm{Sp}\{\chi_{\sigma_1 K} \mid \sigma_1 \in G\}] [\mathrm{Sp}\{\chi_{\sigma_2 K} \mid \sigma_2 \in G\}]^*.$$

Воспользуемся соответствием между характеристическими функциями $\chi_{\sigma_1 K}$, $\chi_{K\sigma_2}$, $\chi_{\sigma_1 K\sigma_2}$ для $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ и смежными классами $\sigma_1\Gamma$, $\Gamma\sigma_2$, $\sigma_1\Gamma\sigma_2$ в G . Тогда $*$ -сохраняющее свойство мультипликативности для $t|_{\mathcal{O}_{\Gamma, G}}$ примет вид

$$t(\sigma_1\Gamma)t(\sigma_2^{-1}\Gamma)^* = t(\sigma_1\Gamma)t(\Gamma\sigma_2) = t(\sigma_1\Gamma\sigma_2), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 43. На практике трудно найти циклический следовой вектор ξ фигурирующий выше. Поэтому предпочтительнее использовать построение из теоремы 33 раздела 5. Таким образом, π_0 получается из большого представления π группы G в унитарную группу гильбертова пространства H ограничением на пространство $H_0 \subseteq H$, которое инвариантно относительно $\pi(G)$. В этом случае мы используем выбор Γ -блуждающего порождающего подпространства L для $\pi|_{\Gamma}$. В аналитической дискретной серии унитарных представлений π_n , $n \geq 1$, группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ такой выбор является почти каноническим, так как он состоит в выборе фундаментальной области для действия группы Γ на $\mathbb{H}$.

Чтобы непосредственно получить из $\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}$ представление t , можно действовать напрямую следующим образом [38]. Рассмотрим условные математические ожидания

$$E_{\mathcal{R}(G) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}}^{\mathcal{R}(G) \otimes B(L)}, \quad E_{\mathcal{R}(\Gamma) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}}^{\mathcal{R}(\Gamma) \otimes B(L)}$$

соответственно из $\mathcal{B} = \mathcal{R}(G) \otimes B(L)$ и $\mathcal{A} = \mathcal{R}(\Gamma) \otimes B(L)$ на алгебры $\mathcal{R}(G) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}$ и $\mathcal{R}(\Gamma) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}$. Условные математические ожидания просто вычисляются взятием операторного следа на тензорном множителе, соответствующем $B(L)$.

Для смежного класса C , указанного в замечании 42, имеем

$$\tilde{t}(\chi_C) = E_{\mathcal{R}(\Gamma) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}}^{\mathcal{R}(G) \otimes B(L)}(\tilde{\Phi}_{\pi_0, L}(\chi_C)) = \sum_{\theta \in C} \mathrm{Tr}(P_L \pi_0(\theta)) \rho(\theta). \quad (64)$$

Мы используем формулу (17) для проекции P_0 и определяем

$$\xi_0 = E_{\mathcal{R}(\Gamma) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}}^{\mathcal{R}(\Gamma) \otimes B(L)}(P_0) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Tr}(P_L \pi_0(\gamma)) \rho(\gamma).$$

Так как $\dim_{\{\pi_0(\Gamma)\}''} H_0 = 1$, а P_0 – проекция из $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ со следом 1, получаем, что ξ_0 имеет нулевое ядро. Более того (см. [38; предложение 3.3]), отображение условного математического ожидания, подправленное обратным квадратного корня из ξ_0 , является изоморфизмом алгебр фон Неймана, будучи ограниченным на $P_0 \mathcal{B} P_0$. Таким образом,

$$\tilde{E} = (\xi_0)^{-1/2} E_{\mathcal{R}(\Gamma) \otimes \mathbb{C} \mathrm{Id}_{B(L)}}^{\mathcal{R}(G) \otimes B(L)}|_{P_0 \mathcal{B} P_0} (\xi_0)^{-1/2} \quad (65)$$

является изоморфизмом алгебр фон Неймана из $P_0 \mathcal{B} P_0$ на $\mathcal{R}(G)$. Определим

$$t(\chi_C) = \tilde{E}(\tilde{t}(C)).$$

Тогда $t|_{\mathcal{O}_{\Gamma,G}}$ – изоморфизм из $\mathcal{H}(\Gamma, G)$ в $\mathcal{R}(G)$ (см. [38; доказательство леммы 3.3]). Объединяя формулы (64) и (65), получаем следующую альтернативную формулу для представления t из замечания 42:

$$t(\chi_C) = (\xi_0)^{-1/2} \left[\sum_{\theta \in C} \text{Tr}(P_L \pi_0(\theta)) \rho(\theta) \right] (\xi_0)^{-1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Зафиксируем $\sigma \in G$. Тогда двойной смежный класс $\Gamma\sigma\Gamma$ допускает следующее разложение: $\Gamma\sigma\Gamma = \bigcup \Gamma\sigma s_i = \bigcup r_j\sigma\Gamma$. Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \chi_K(L(\chi_{K\sigma K}) \otimes L(\chi_{K\sigma K})^{\text{op}}) \chi_K &= \sum_{i,j} [L(\chi_{K\sigma s_i}) \otimes L(\chi_{K\sigma s_j})^{\text{op}}] \chi_{s_i\sigma^{-1}K\sigma s_j^{-1} \cap K} \\ &= \sum_{a,b} \chi_{r_a\sigma K\sigma^{-1}r_b \cap K} [L(\chi_{r_a\sigma K}) \otimes L(\chi_{r_b\sigma K})^{\text{op}}] \\ &= \sum_{i,j,a,b} \chi_{r_a\sigma K\sigma^{-1}r_b \cap K} [L(\chi_{r_a\sigma K_{\sigma^{-1}s_i}}) \otimes L(\chi_{r_b\sigma K_{\sigma^{-1}s_j}})^{\text{op}}] \chi_{s_i\sigma^{-1}K\sigma s_j \cap K}. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь $K_{\sigma^{-1}}$ – замыкание в K подгруппы $\Gamma_{\sigma^{-1}} = \sigma^{-1}\Gamma\sigma \cap \Gamma$.

С использованием равенства (66) немедленно доказывается (см., например, вычисления в [37; § 5] или [40]), что линейное отображение в данном утверждении мультипликативно. Это завершает доказательство части (i).

Представление t системы операторов $\mathcal{O}_{\Gamma,G} = \mathcal{O}(K, \overline{G})$ продолжается очевидным образом до представления $\tilde{t}$ системы операторов

$$(L^\infty(\overline{G}, \mu) \text{Sp}\{L(\chi_{\sigma_1 K}) \mid \sigma_1 \in G\}) (L^\infty(\overline{G}, \mu) \text{Sp}\{L(\chi_{\sigma_2 K}) \mid \sigma_2 \in G\})^*.$$

Тогда $\tilde{t}$ продолжается до “двойного” представления t_2 системы операторов, содержащейся в алгебре $C^*((G \times G^{\text{op}}) \rtimes L^\infty(\overline{G}), \mu)$, которая содержит образ алгебры Гекке, построенной в п. (i). Это завершает доказательство части (ii).

Важное наблюдение для доказательства части (iii) состоит в том, что все операции, вовлеченные в умножении двух элементов вида $\chi_K(L(\chi_{K\sigma_1 K}) \otimes L(\chi_{K\sigma_1 K})^{\text{op}}) \chi_K$, остаются внутри области определения представления t_2 (см. первое равенство в (66)). Действительно, эти операции включают только свертки вида

$$L(\chi_{\sigma_1 K}) L(\chi_{K\sigma_2}), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G,$$

или их противоположные.

Следовательно, композиция t_2 с отображением $\overline{\mathcal{D}\Phi}$, введенным в утверждении (i) теоремы, дает представление алгебры Гекке. Теорема 12 доказана.

Список литературы

- [1] A. N. Andrianov, *Quadratic forms and Hecke operators*, Grundlehren Math. Wiss., **286**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, xii+374 pp.
- [2] M. B. Bekka, R. Curtis, P. de la Harpe, “Familles de graphes expanseurs et paires de Hecke”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **335**:5 (2002), 463–468.

- [3] Ф. А. Березин, “Квантование”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:5 (1974), 1116–1175; англ. пер.: F. A. Berezin, “Quantization”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:5 (1974), 1109–1165.
- [4] M. W. Binder, “Induced factor representations of discrete groups and their types”, *J. Funct. Anal.*, **115**:2 (1993), 294–312.
- [5] F. Boca, V. Nițică, “Combinatorial properties of groups and simple C^* -algebras with a unique trace”, *J. Operator Theory*, **20**:1 (1988), 183–196.
- [6] A. Borel, “Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup”, *Invent. Math.*, **35** (1976), 233–259.
- [7] J.-B. Bost, A. Connes, “Hecke algebras, type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory”, *Selecta Math. (N. S.)*, **1**:3 (1995), 411–457.
- [8] L. Bowen, “Invariant random subgroups of the free group”, *Groups Geom. Dyn.*, **9**:3 (2015), 891–916; 2014 (v1 – 2012), 17 pp., arXiv:1204.5939.
- [9] L. Bowen, R. Grigorchuk, R. Kravchenko, *Characteristic random subgroups of geometric groups and free abelian groups of infinite rank*, 2015 (v1 – 2014), 32 pp., arXiv:1402.3705.
- [10] N. P. Brown, N. Ozawa, *C^* -algebras and finite-dimensional approximations*, Grad. Texts in Math., **88**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, xvi+509 pp.
- [11] M. Burger, J.-S. Li, P. Sarnak, “Ramanujan duals and automorphic spectrum”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **26**:2 (1992), 253–257.
- [12] P. Cartier, “Representations of p -adic groups: a survey”, *Automorphic forms, representations and L -functions*, Part 1 (Oregon State Univ., Corvallis, OR, 1977), Proc. Sympos. Pure Math., **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, 111–155.
- [13] W. Casselman, “Harmonic analysis of the Schwartz space of $\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ”, *Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004, 163–192.
- [14] R. Curtis, “Hecke algebras associated with induced representations”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334**:1 (2002), 31–35.
- [15] P. Deligne, “La conjecture de Weil. I”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 273–307.
- [16] A. Dudko, K. Medynets, “Finite factor representations of Higman–Thompson groups”, *Groups Geom. Dyn.*, **8**:2 (2014), 375–389.
- [17] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятацкий-Шапиро, *Обобщенные функции*, т. 6: *Теория представлений и автоморфные функции*, Наука, М., 1966, 512 с.; англ. пер.: I. M. Gel’fand, M. I. Graev, I. Pyatetskii-Shapiro, *Representation theory and automorphic functions*, W. B. Saunders Co., Philadelphia, PA–London–Toronto, ON, 1969, xvi+426 pp.
- [18] И. М. Гельфанд, *Обобщенные функции*, т. 4: *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, Наука, М., 1961, 472 с.; англ. пер.: I. M. Gel’fand, N. Ja. Vilenkin, *Generalized functions*, v. 4: *Applications of harmonic analysis*, Academic Press, New York–London, 1964, xiv+384 pp.
- [19] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **14**, Springer-Verlag, New York, 1989, x+288 pp.
- [20] U. Haagerup, T. Steenstrup, R. Szwarc, “Schur multipliers and spherical functions on homogeneous trees”, *Internat. J. Math.*, **21**:10 (2010), 1337–1382.
- [21] R. W. Hall, *Hecke C^* -algebras*, Thesis (Ph.D.), Pennsylvania State Univ., 1999, 128 pp.

- [22] Harish-Chandra, “Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **38** (1952), 337–342.
- [23] E. Hecke, *Lectures on Dirichlet series, modular functions and quadratic forms*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1983, 98 pp.
- [24] D. A. Hejhal, *The Selberg trace formula for $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$* , v. I, Lecture Notes in Math., **548**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976, vi+516 pp.
- [25] V. F. R. Jones, “Index for subfactors”, *Invent. Math.*, **72**:1 (1983), 1–25.
- [26] S. Kaliszewski, B. L. Magnus, J. Quigg, “Hecke C^* -algebras and semi-direct products”, *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **52**:1 (2009), 127–153.
- [27] A. S. Kechris, “Unitary representations and modular actions”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. XIII, Зап. науч. сем. ПОМИ, **326**, ПОМИ, СПб., 2005, 97–144; *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **140**:3 (2007), 398–425.
- [28] A. Krieg, *Hecke algebras*, Mem. Amer. Math. Soc., **87**, № 435, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, x+158 pp.
- [29] M. Laca, N. S. Larsen, S. Neshveyev, “Phase transition in the Connes–Marcolli GL_2 -system”, *J. Noncommut. Geom.*, **1**:4 (2007), 397–430.
- [30] S. Lang, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, Grad. Texts in Math., **105**, Springer-Verlag, New York, 1985, xiv+428 pp.
- [31] H. Maass, *Lectures on modular functions of one complex variable*, With notes by S. Lal, 2nd ed., Tata Inst. Fund. Res. Stud. Lectures on Math. and Phys., **29**, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1983, iii+262 pp.
- [32] Yu. A. Neretin, “Plancherel formula for Berezin deformation of L^2 on Riemannian symmetric space”, *J. Funct. Anal.*, **189**:2 (2002), 336–408.
- [33] J. Peterson, A. Thom, “Character rigidity for special linear groups”, *J. Reine Angew. Math.*, 1–22, publ. online 11.03.2014.
- [34] H. Petersson, “Über automorphe Formen mit Singularitäten im Diskontinuitätsgebiet”, *Math. Ann.*, **129** (1955), 370–390.
- [35] G. Pisier, *Introduction to operator space theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **294**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, viii+478 pp.
- [36] F. Rădulescu, *The Γ -equivariant form of the Berezin quantization of the upper half plane*, Mem. Amer. Math. Soc., **133**, № 630, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, viii+70 pp.
- [37] F. Rădulescu, *Type II_1 von Neumann representations for Hecke operators on Maass forms and Ramanujan–Petersson conjecture*, 2013 (v1 – 2008), 43 pp., arXiv: 0802.3548.
- [38] F. Rădulescu, “Conditional expectations, traces, angles between spaces and representations of the Hecke algebras”, *Lib. Math. (N. S.)*, **33**:2 (2013), 65–95.
- [39] F. Rădulescu, *The operator algebra content of the Ramanujan–Petersson problem*, 2014 (v1 – 2013), 53 pp., arXiv: 1306.4232.
- [40] F. Rădulescu, “Free group factors and Hecke operators”, *The varied landscape of operator theory*, Theta Ser. Adv. Math., Theta, Bucharest, 2014, 241–257.
- [41] F. Rădulescu, “On the countable measure-preserving relation induced on a homogeneous quotient by the action of a discrete group”, *Complex Anal. Oper. Theory*, **9**:7 (2015), 1633–1662.
- [42] J. Repka, “Tensor products of holomorphic discrete series representations”, *Canad. J. Math.*, **31**:4 (1979), 836–844.

- [43] J. Roe, “On the quasi-isometry invariance of L^2 Betti numbers”, *Duke Math. J.*, **59**:3 (1989), 765–783.
- [44] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, reprint of 1st (1971) ed., Classics Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998, xii+256 pp.
- [45] P. J. Sally, Jr., J. A. Shalika, “Characters of the discrete series of representations of $SL(2)$ over a local field”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **61** (1968), 1231–1237.
- [46] P. Sarnak, *Some applications of modular forms*, Cambridge Tracts in Math., **99**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, x+111 pp.
- [47] P. Sarnak, “Notes on the generalized Ramanujan conjectures”, *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Clay Math. Proc., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 659–685.
- [48] G. Schlichting, “Operationen mit periodischen Stabilisatoren”, *Arch. Math. (Basel)*, **34**:2 (1980), 97–99.
- [49] F. Shahidi, “ L -functions and representation theory of p -adic groups”, *p-adic methods and their applications*, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1992, 91–112.
- [50] M. Takesaki, *Theory of operator algebras I*, reprint of the 1st (1979) ed., Encyclopaedia Math. Sci., **124**, Oper. Alg. Non-Commut. Geom., V, Springer-Verlag, Berlin, 2002, xx+415 pp.
- [51] K. Tzanev, “Hecke C^* -algebras and amenability”, *J. Operator Theory*, **50**:1 (2003), 169–178.
- [52] А. М. Вершик, “Несвободные действия счетных групп и их характеры”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы*. XVIII, Зап. науч. сем. ПОМИ, **378**, ПОМИ, СПб., 2010, 5–16; англ. пер.: A. M. Vershik, “Nonfree actions of countable groups and their characters”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **174**:1 (2011), 1–6.
- [53] D. Zagier, *Traces des opérateurs de Hecke. Théorie des nombres*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, 17e année: 1975/76, fasc. 2, exp. № 23, Secrétariat Math., Paris, 1977, 12 pp.

Флорин Радудеску
(**Florin Rădulescu**)

Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”,
Roma, Italy;
Institute of Mathematics “Simion Stoilow”
of the Romanian Academy, Bucharest, Romania
E-mail: radulesc@mat.uniroma2.it

Поступила в редакцию
20.03.2015