Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Комлов, Н. Г. Кружилин, Р. В. Пальвелев,
С. П. Суетин, О сходимости квадратичных аппроксима-
ций Шафера, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 2, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 15:45:33

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О сходимости квадратичных аппроксимаций Шафера

А. В. Комлов, Н. Г. Кружилин, Р. В. Пальвелев, С. П. Суетин

1. Пусть $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_3)$ – (однозначная) мероморфная функция на трехлистной римановой поверхности (р.п.) $\pi: \mathfrak{R}_3 \rightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbf{z} \mapsto z$), все точки ветвления которой 2-го порядка, а бесконечно удаленная точка $z = \infty$ не является точкой ветвления. Множество $\pi^{-1}(\infty)$ состоит из 3 различных точек. отождествим одну из этих точек $\infty^{(1)} \in \mathfrak{R}_3$ с точкой $\infty \in \mathbb{C}$ и предположим, что $f \in \mathcal{H}(\infty)$. Пусть $\mathcal{U}$ – абелев интеграл 3-го рода на $\mathfrak{R}_3$ с чисто мнимыми периодами, имеющий особенности только в точках множества $\pi^{-1}(\infty)$ и такой, что $\mathcal{U}(\mathbf{z}) = -2 \log z + (\text{рег. часть})$, если $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}$, $\mathcal{U}(\mathbf{z}) = \log z + (\text{рег. часть})$, если $\mathbf{z}$ стремится к любой другой точке из $\pi^{-1}(\infty)$. Неравенствами $\text{Re } \mathcal{U}(z^{(1)}) < \text{Re } \mathcal{U}(z^{(2)}) < \text{Re } \mathcal{U}(z^{(3)})$ р.п. $\mathfrak{R}_3$ разбивается на 3 открытых “листа” $\mathfrak{R}^{(1)} \ni \infty^{(1)}$, $\mathfrak{R}^{(2)}$, $\mathfrak{R}^{(3)}$. В соответствии с гипотезой Наттолла [5; § 3] первый лист $\mathfrak{R}^{(1)}$ такого разбиения всегда связан. Из результатов работ [1], [6] вытекает, что для некоторого класса трехлистных р.п. требуемое разбиение на листы реализуется явным образом с помощью конструкции (называемой конденсатором Наттолла, см. [6], [4], а также п. 2), которая гарантирует связность первого листа. Для р.п. из такого класса компакт $\pi(\partial \mathfrak{R}^{(2)} \cap \partial \mathfrak{R}^{(3)})$ не содержит точки $z = \infty$. Тем самым, точки множества $\pi^{-1}(\infty)$ упорядочены соотношениями $\infty^{(1)} \in \mathfrak{R}^{(1)}$, $\infty^{(2)} \in \mathfrak{R}^{(2)}$, $\infty^{(3)} \in \mathfrak{R}^{(3)}$. В этой работе мы рассматриваем трехлистные р.п. $\mathfrak{R}_3$, для которых разбиение на листы реализовано с помощью конденсатора Наттолла.

2. Пара компактов (E, F) на $\overline{\mathbb{C}}$ называется *конденсатором Наттолла*, если выполняются следующие условия: $E \subset \mathbb{R}$ состоит из конечного числа отрезков; $E \cap F = \emptyset$, $\infty \notin E \cup F$; компакт F симметричен относительно вещественной прямой и состоит из конечного числа аналитических дуг; F обладает S -свойством $\frac{\partial G_F^{\lambda_E}}{\partial n^+}(z) = \frac{\partial G_F^{\lambda_E}}{\partial n^-}(z)$, $z \in F^\circ$, где F° – объединение открытых дуг, замыкания которых составляют F , λ_E – единичная мера с носителем на E , равновесная относительно смешанного потенциала: $3V^{\lambda_E}(x) + G_F^{\lambda_E}(x) \equiv \text{const}$, $x \in E$, $V^{\lambda_E}(x)$ – логарифмический, а $G_F^{\lambda_E}(z)$ – гринов (относительно F) потенциалы меры λ_E . Для случая $E = [a, b]$, $F = [c, d] \subset \mathbb{R}$ понятие конденсатора Наттолла фактически уже использовалось в [3]. Существование конденсаторов Наттолла таких, что $F \not\subset \mathbb{R}$, вытекает из [1], [6]. По конденсатору Наттолла трехлистная р.п. строится стандартным образом (см. [2]–[4], [6]), и для абелева интеграла $\mathcal{U}$ на построенной р.п. справедливы следующие соотношения: $\text{Re } \mathcal{U}(z^{(1)}) = 2V^{\lambda_E}(z) - c_1$, $\text{Re } \mathcal{U}(z^{(2)}) = V^{\lambda_F}(z) - 2V^{\lambda_E}(z) - c_2$, $\text{Re } \mathcal{U}(z^{(3)}) = -V^{\lambda_F}(z) + c_2$, где c_1, c_2 – постоянные, λ_F – выметание меры λ_E из $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на F .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9714

3. Всюду в дальнейшем предполагается, что функции $1, f, f^2$ на $\mathfrak{R}_3$ независимы над полем $\mathbb{C}(z)$. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ полиномы Эрмита–Паде $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2} \in \mathbb{C}_n[z] \setminus \{0\}$ для набора $[1, f, f^2]$ определяются соотношением $(Q_{n,0} + Q_{n,1}f + Q_{n,2}f^2)(z) = O(z^{-2n-2})$, $z \rightarrow \infty$. Тогда справедливы следующие утверждения (ср. [8]).

ТЕОРЕМА 1. *Существует такое число $m = m(f) \in \mathbb{N}$, что для произвольной достаточно малой окрестности U компакта F при всех достаточно больших n все нули полиномов $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2}$ и $D_n(z) := Q_{n,1}^2(z) - 4Q_{n,0}(z)Q_{n,2}(z)$, за возможным исключением не более чем m из них, принадлежат U . При $n \rightarrow \infty$ имеем $n^{-1}\chi(Q_{n,j}) \xrightarrow{*} \lambda_F$, $j = 0, 1, 2$, и $(2n)^{-1}\chi(D_n) \xrightarrow{*} \lambda_F$, где $\chi(Q)$ – мера, считающая (с учетом кратностей) нули полинома $Q \in \mathbb{C}[z]$.*

ТЕОРЕМА 2. *При $n \rightarrow \infty$*

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -\{f(z^{(1)}) + f(z^{(2)})\}, \quad \frac{Q_{n,0}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(1)})f(z^{(2)}), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F.$$

Из теоремы 2 следует, что функция $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{R}_3)$, заданная своим ростком в бесконечно удаленной точке $\infty^{(1)}$, восстанавливается по этому ростку на 1-м и 2-м листах р. п. $\mathfrak{R}_3$ и на их общей границе $\pi: \Gamma \rightarrow E$ с помощью полиномов Эрмита–Паде. Отметим, что с помощью аппроксимаций Паде функция f восстанавливается только на 1-м листе $\mathfrak{R}^{(1)} \cong \overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Продолжение функции $f \in \mathcal{H}(\infty)$ на 1-й и 2-й листы реализуется применением квадратичных аппроксимаций Шафера [7], определяемых из уравнения $Q_{n,0} + Q_{n,1}S_n + Q_{n,2}S_n^2 = 0$. Тем самым, $S_{n;1,2}(z) = (-Q_{n,1} \pm \sqrt{D_n(z)})/(2Q_{n,2}(z))$.

ТЕОРЕМА 3. *При надлежащем выборе ветвей квадратного корня имеет место сходимость $S_{n;j}(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z^{(j)})$, $n \rightarrow \infty$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$, $j = 1, 2$.*

Список литературы

- [1] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58. [2] В. И. Буслаев, С. П. Суетин, Тр. МИАН, **290**, МАИК, М., 2015, 272–279. [3] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, Тр. МИАН, **200**, Наука, М., 1991, 136–146. [4] Р. К. Ковачева, С. П. Суетин, Тр. МИАН, **284**, МАИК, М., 2014, 176–199. [5] J. Nuttall, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386. [6] Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 115–160. [7] R. E. Shafer, *SIAM J. Numer. Anal.*, **11**:2 (1974), 447–460. [8] С. П. Суетин, *УМН*, **70**:5(425) (2015), 121–174.

А. В. Комлов (A. V. Komlov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: komlov@mi.ras.ru

Представлено С. Ю. Немировским

Принято редколлегией
10.03.2016

Н. Г. Кружилин (N. G. Kruzhilin)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: kruzhil@mi.ras.ru

Р. В. Пальвелев (R. V. Palvelev)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: palvelev@mi.ras.ru

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: suetin@mi.ras.ru