Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Оганесян, Об операторах вида $\partial_x^4 + u(x)$ из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода g , *УМН*, 2016, том 71, выпуск 3, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 18:37:24

Об операторах вида $\partial_x^4 + u(x)$ из коммутирующей пары дифференциальных операторов ранга 2 рода g

В. С. Оганесян

Рассмотрим два дифференциальных оператора $L_n = \sum_{i=0}^n u_i(x) \partial_x^i$, $L_m = \sum_{i=0}^m v_i(x) \partial_x^i$.

Если они коммутируют, то по теореме Бурхалла–Чаунди [1] существует полином $R(z, w)$ такой, что $R(L_n, L_m) = 0$. Кривая Γ , определенная соотношением $R(z, w) = 0$, называется *спектральной кривой* пары L_n, L_m . Если $L_n \psi = z\psi$, $L_m \psi = w\psi$, то $(z, w) \in \Gamma$. Для почти всех $(z, w) \in \Gamma$ размерность пространства общих собственных функций ψ одна и та же. Родом коммутирующей пары называют род кривой Γ . Рангом коммутирующей пары называется размерность пространства общих собственных функций. Ранг является общим делителем порядков операторов m и n . Коэффициенты коммутирующих операторов ранга 1 явно выражаются через этета-функции Римана [2]. Случай ранга > 1 намного сложнее. В [3] построены первые примеры коммутирующих операторов ранга 2 со спектральной кривой рода 1 для эллиптической кривой $w^2 = z^3 - \alpha$ с произвольным числом α . Классификация операторов ранга > 1 дана в [4]. В [5] получена общая форма коммутирующих операторов ранга 2 для произвольной эллиптической кривой. В [6], [7] найден общий вид операторов ранга 3 для произвольной эллиптической кривой. Задача полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами впервые рассматривалась в [8]. В [9] предложен новый метод поиска коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2. С помощью этого метода в дальнейшем было построено много явных примеров коммутирующих операторов (см. [10]–[13]). Примеры коммутирующих операторов произвольных рода и ранга с полиномиальными коэффициентами построены в [14]. В настоящей работе рассматривается оператор

$$L_4 = \partial_x^4 + u(x).$$

Пусть $u(x)$ имеет полюс в точке a_i и в окрестности этой точки

$$u(x) = \frac{\varphi_{i,-k}}{(x-a_i)^k} + \frac{\varphi_{i,-k+1}}{(x-a_i)^{k-1}} + \dots + \varphi_{i,0} + \varphi_{i,1}(x-a_i) + O((x-a_i)^2).$$

Автором доказаны следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Если оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и M, L_4 образуют пару ранга 2, то функция $u(x)$ может иметь полюсы только порядка 4 и $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i+1)(4n_i+3)(4n_i+4)$, $n_i \in \mathbb{N}$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$ при $k=0, \dots, n_i$, $l=1, 2, 3$ и $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$ при $r = n_i+1, \dots, g$. Функция $u(x)$ не может иметь изолированного полюса в бесконечности.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u(x)$ – эллиптическая функция, периодическая или рациональная функция без изолированной особенности в бесконечности и a_1 – единственный полюс 4-го порядка $u(x)$ в ее фундаментальном параллелограмме, периодической ленте или в комплексной плоскости соответственно. Тогда оператор $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g+2$ и M, L_4 образуют пару ранга 2 тогда и только тогда, когда $\varphi_{1,-4} = g(4g+1)(4g+3)(4g+4)$ и $\varphi_{1,4k-l} = 0$, $k=0, \dots, g$, $l=1, 2, 3$.

Пусть $\wp(x)$ – функция Вейерштрасса и $(\wp'(x))^2 = 4(\wp(x))^3 - g_2\wp(x) - g_3$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $L_4 = \partial_x^4 + n(4n+1)(4n+3)(4n+4)\wp^2(x)$, $n \in \mathbb{N}$, коммутирует с оператором M порядка $4n+2$ и M, L_4 образуют пару ранга 2 тогда и только тогда, когда $g_3 = 0$.

Работа выполнена при поддержке Фонда Саймонса.

DOI: 10.4213/rm9718

Вычисления показывают, что при малых n спектральная кривая для почти всех g_3 невырождена, но доказать это для всех n пока не удастся.

ПРИМЕР. Рассмотрим оператор $L_4 = \partial_x^4 + 280\wp^2(x) + 280\wp^2(x - a)$, $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $g_3 = 0$ и a равно ω_1 , ω_2 или $\omega_1 + \omega_2$, где ω_i — полупериоды. Тогда L_4 коммутирует с оператором M порядка 6 и они образуют пару ранга 2.

Доказательство теоремы 1 подсказывает, что скорее всего верна следующая гипотеза, но доказать ее пока не удастся.

ГИПОТЕЗА. Пусть $u(x)$ — эллиптическая или мероморфная функция без изолированной особенности в бесконечности, имеющая конечное число m полюсов в фундаментальном параллелограмме или комплексной плоскости соответственно. Пусть $S = \sum_{i=1}^m n_i + 1$, $n_i \in \mathbb{N}$. Если $\varphi_{i,-4} = n_i(4n_i + 1)(4n_i + 3)(4n_i + 4)$, $\varphi_{i,4k-l} = 0$, $\varphi_{i,4r-1} = \varphi_{i,4r-3} = 0$, где $k = 0, \dots, n_i$, $r = n_i + 1, \dots, S$, $l = 1, 2, 3$, то $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с дифференциальным оператором M порядка $4S + 2$ и M , L_4 образуют пару ранга 2.

ТЕОРЕМА 2. Если $L_4 = \partial_x^4 + u(x)$ коммутирует с оператором M порядка $4g + 2$ таким, что M , L_4 образуют пару ранга 2 и $u(x)$ в точке a_i имеет полюс, то решения уравнения $\psi^{(4)}(x) + u(x)\psi(x) = \lambda\psi(x)$ в точке a_i имеют особенности вида $x^{\sigma_{i,r}}g(x)$, где $g(x)$ голоморфна в a_i и

$$\begin{aligned}\sigma_{i,1} &= 2^{-1}(1 - 4n_i - \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2}), & \sigma_{i,2} &= 2^{-1}(1 - 4n_i + \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2}), \\ \sigma_{i,3} &= 2^{-1}(5 + 4n_i - \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2}), & \sigma_{i,4} &= 2^{-1}(5 + 4n_i + \sqrt{1 - 16n_i - 16n_i^2}),\end{aligned}$$

т. е. общие собственные функции всегда имеют точки ветвления. Таким образом, L_4 не коммутирует с оператором нечетного порядка, так как общие собственные функции операторов взаимно простого порядка мероморфны по x .

Автор выражает благодарность профессору О. И. Мохову за научное руководство и помощь в написании работы.

Список литературы

- [1] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21**:1 (1923), 420–440.
 [2] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 15–31. [3] J. Dixmier, *Bull. Soc. Math. France*, **96** (1968), 209–242. [4] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31. [5] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **35**:6(216) (1980), 47–68. [6] О. И. Мохов, *УМН*, **37**:4(226) (1982), 169–170. [7] О. И. Мохов, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1291–1315. [8] О. И. Мохов, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 314–316. [9] A. E. Mironov, *Invent. Math.*, **197**:2 (2014), 417–431. [10] A. E. Mironov, *Topology, geometry, integrable systems, and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 309–321. [11] В. С. Оганесян, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:1 (2016), 67–75. [12] A. E. Mironov, A. B. Zheglov, *Int. Math. Res. Not.*, **2016**:10 (2016), 2974–2993. [13] В. Н. Давлетшина, *Сиб. матем. журн.*, **56**:3 (2015), 513–519. [14] O. I. Mokhov, *Topology, geometry, integrable systems, and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, 323–336.

В. С. Оганесян (V. S. Oganessian)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: vardan.o@mail.ru

Представлено В. М. Бухштабером
 Принято редколлегией
 02.04.2016