Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Сысоев, О восстановлении функции по данным ее экспоненциального лучевого преобразования на n -мерном комплексе прямых в $\mathbb{R}^n$, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm972>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:03:03

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ДАННЫМ
ЕЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЛУЧЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
НА n -МЕРНОМ КОМПЛЕКСЕ ПРЯМЫХ В $\mathbb{R}^n$

С. Е. СЫСОВЕВ

Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель. Экспоненциальное лучевое преобразование с поглощением, зависящим от направления, для такой функции имеет вид

$$Q_\mu f(\theta, E_\theta x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu(\theta)t} f(E_\theta x + t\theta) dt,$$

где $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$ — направляющий вектор прямой, по которой ведется интегрирование, $E_\theta x = x - \langle x, \theta \rangle \theta$ — проекция точки $x \in \mathbb{R}^n$ на ортогональное дополнение к θ ($\langle x, y \rangle$ означает скалярное произведение векторов x и y), коэффициент поглощения $\mu = \mu(\theta)$ зависит только от направления и является непрерывной функцией на $\mathbb{S}^{n-1}$. Преобразования такого типа встречаются в задачах эмиссионной компьютерной томографии [1]. В случае постоянного поглощения $\mu \equiv \text{const}$ предложены методы обращения экспоненциального лучевого преобразования [1]–[6]. В [7] на плоскости рассмотрено экспоненциальное лучевое преобразование с коэффициентом поглощения, зависящим от направления, и получена формула обращения. Во всех перечисленных работах предполагается, что функция $Q_\mu f$ известна на многообразии Λ всех прямых в $\mathbb{R}^n$. К проблеме обращения по неполным данным относится задача восстановления f , исходя из значений $Q_\mu f$, известных лишь для некоторого n -мерного подмногообразия Λ , называемого *комплексом прямых*. В. П. Паламодову принадлежит гипотеза о существовании формулы обращения $Q_\mu f$ для комплекса прямых, пересекающих на бесконечности фиксированную бесконечно удаленную кривую $L \subset \mathbb{RP}^{n-1}$, которая имеет непустое пересечение с каждой гиперплоскостью $H \subset \mathbb{R}^n$. Им была решена эта задача в трехмерном пространстве.

Пусть $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ — центрально симметричная кривая, $\theta = \theta(s)$, $0 \leq s \leq 2S$, — ее параметризация, где s — натуральный параметр, тогда $\theta(s) = -\theta(S+s)$ при $s \in [0, S]$, $\theta(0) = \theta(2S)$. Предположим, что $\mu \in C^1(\mathbb{S}^{n-1})$, $\mu(\theta) = \mu(-\theta)$, и преобразование $Q_\mu f$ известно лишь для $\theta \in C$. Рассматривается задача восстановления функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по этим данным. Обозначим

$$T = \int_C |\eta(s)| ds,$$

где $\eta(s)$ — проекция $\theta''(s) = \frac{d^2\theta}{ds^2}(s)$ на подпространство, ортогональное векторам $\theta(s)$, $\theta'(s) = \frac{d\theta}{ds}(s)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая связная кривая $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ центрально симметрична, $\mu \in C^1(\mathbb{S}^{n-1})$ – четная функция, тогда по данным $Q_\mu f(\theta, E_\theta x)$, $\theta \in C$, функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ восстанавливается:

$$f(x) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2S} e^{\mu(\theta)\langle x, \theta \rangle} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \mu(\theta)q}{q} \left(\frac{\partial}{\partial q} + \mu'(\theta) \right) Q_\mu f(\theta, E_\theta x + q\theta') dq ds + Kf(x),$$

где внутренний интеграл имеет смысл главного значения Коши, $\mu'(\theta) = \frac{d}{ds}\mu(\theta)$, Kf – оператор свертки, ядро которого есть $O(T\mu^2)$.

Как и в [7], доказательство теоремы основано на использовании проекционной теоремы [2] и теоремы Коши для функций многих комплексных переменных.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $C \subset \mathbb{S}^{n-1}$ – плоская кривая (является пересечением $\mathbb{S}^{n-1}$ с двумерной плоскостью, проходящей через начало координат), то $|\eta(s)| \equiv 0$ и получаем формулу точного восстановления функции f .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $\mu \equiv 0$, то имеем классическое лучевое преобразование

$$Pf(\theta, E_\theta x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(E_\theta x + t\theta) dt$$

и находим

$$f(x) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} Pf(\theta, E_\theta x + q\theta') dq ds,$$

где внутренний интеграл имеет смысл главного значения Коши. Таким образом, достаточно только половины кривой C . При $n = 2$ это – известная формула обращения лучевого преобразования на плоскости [1]. Другим путем в [8] при $\mu \equiv 0$ была получена иная формула обращения лучевого преобразования по данным, известным для рассматриваемого комплекса прямых в $\mathbb{R}^3$.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю профессору В.П. Паламодову за постоянное внимание к работе и помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Stuttgart: Teubner, 1986.
 [2] Natterer F. // Numer. Math. 1979. V. 32. P. 431–438. [3] Tretiak O., Metz C. // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. P. 341–354. [4] Marcoc A. // SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 718–722. [5] Finch D., Hertle A. // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 67–73. [6] Hazou I., Solmon D. // Math. Methods Appl. Sci. 1988. V. 10. P. 561–564. [7] Kuchment P., Shneiberg I. // Appl. Anal. 1994. V. 53. P. 221–231. [8] Орлов С. // Кристаллография. 1975. Т. 20. С. 701–709.

Филиал Московского государственного
университета им. М.В. Ломоносова
в г. Ульяновске

Принято редколлегией
11.03.1996