Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. О. Орлов, Склейка категорий и партнеры Крулля–Шмидта, *УМН*, 2016, том 71, выпуск 3, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9720>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 05:00:16

Склеивка категорий и партнеры Крулля–Шмидта

Д. О. Орлов

Пусть $\mathbf{k}$ – поле и $\mathcal{A}$ – малая $\mathbf{k}$ -линейная дифференциально-градуированная (ДГ) категория. Определим (правый) ДГ $\mathcal{A}$ -модуль как ДГ функтор $M: \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \text{Mod-}\mathbf{k}$, где $\text{Mod-}\mathbf{k}$ – ДГ категория комплексов $\mathbf{k}$ -векторных пространств. Пусть $\text{Mod-}\mathcal{A}$ – ДГ категория правых ДГ $\mathcal{A}$ -модулей и $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}$ – полная ДГ подкатегория, состоящая из ациклических ДГ модулей. Гомотопическая категория $\mathcal{H}^0(\text{Mod-}\mathcal{A})$ триангулирована, и $\mathcal{H}^0(\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A})$ является полной триангулированной подкатегорией. Производная категория $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ определяется как фактор по Вердье: $\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{H}^0(\text{Mod-}\mathcal{A})/\mathcal{H}^0(\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A})$.

Каждый объект $Y \in \mathcal{A}$ задает представимый ДГ модуль $h_{\mathcal{A}}^Y(-) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(-, Y)$. ДГ модуль P называется свободным, если он изоморфен прямой сумме ДГ модулей вида $h_{\mathcal{A}}^Y[n]$, и полусвободным, если есть фильтрация $0 = \Phi_0 \subset \Phi_1 \subset \dots \subset P$ со свободными факторами Φ_{i+1}/Φ_i . Обозначим через $\mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A}$ полную ДГ категорию полусвободных ДГ модулей. Канонический ДГ функтор $\mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A} \hookrightarrow \text{Mod-}\mathcal{A}$ индуцирует эквивалентность триангулированных категорий $\mathcal{H}^0(\mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\mathcal{A})$ [1], [2]. Обозначим через $\mathcal{SF}_{fg}\text{-}\mathcal{A} \subset \mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A}$ полную ДГ подкатегорию конечно порожденных полусвободных ДГ модулей, т. е. $\Phi_n = P$ для некоторого n и Φ_{i+1}/Φ_i – конечная сумма $h_{\mathcal{A}}^Y[n]$. ДГ категория совершенных модулей $\text{Perf-}\mathcal{A}$ – это полная ДГ подкатегория $\mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A}$, состоящая из всех ДГ модулей, гомотопически эквивалентных прямым слагаемым объектов из $\mathcal{SF}_{fg}\text{-}\mathcal{A}$. Пусть $\text{Perf-}\mathcal{A}$ – гомотопическая категория $\mathcal{H}^0(\text{Perf-}\mathcal{A})$. Она триангулирована и эквивалентна подкатегории компактных объектов $\mathcal{D}(\mathcal{A})^c \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – малые ДГ категории и S – $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}$ -бимодуль. Определим вершнотреугольную ДГ категорию $\mathcal{C} = \mathcal{A} \sqcup_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$ по правилу:

$$1) \text{Ob}(\mathcal{C}) = \text{Ob}(\mathcal{A}) \sqcup \text{Ob}(\mathcal{B}), \quad 2) \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y), & X, Y \in \mathcal{A}, \\ \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y), & X, Y \in \mathcal{B}, \\ S(Y, X), & X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{B}, \\ 0, & X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{A}, \end{cases}$$

с композицией, приходящей из ДГ категорий $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и структуры бимодуля на S [3], [4]. Определим склеивку $\text{Perf-}\mathcal{A} \odot_{\mathcal{S}} \text{Perf-}\mathcal{B}$ (соотв. $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \odot_{\mathcal{S}} \mathcal{D}(\mathcal{B})$) как $\text{Perf-}\mathcal{C}$ (соотв. $\mathcal{D}(\mathcal{C})$), где $\mathcal{C} = \mathcal{A} \sqcup_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$.

Естественные вложения $a: \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{A} \sqcup_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$ и $b: \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A} \sqcup_{\mathcal{S}} \mathcal{B}$ задают вполне строгие ДГ функторы a^* и b^* из $\text{Perf-}\mathcal{A}$ и $\text{Perf-}\mathcal{B}$ в $\text{Perf-}\mathcal{A} \odot_{\mathcal{S}} \text{Perf-}\mathcal{B}$, индуцирующие вполне строгие функторы a^*, b^* из $\mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{D}(\mathcal{B})$ (соотв. $\text{Perf-}\mathcal{A}, \text{Perf-}\mathcal{B}$) в $\mathcal{D}(\mathcal{C})$ (соотв. $\text{Perf-}\mathcal{C}$) и задающие полуортогональное разложение триангулированных категорий $\mathcal{D}(\mathcal{C}) = \langle \mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rangle$ и $\text{Perf-}\mathcal{C} = \langle \text{Perf-}\mathcal{A}, \text{Perf-}\mathcal{B} \rangle$. Функторы ограничения a_*, b_* из $\mathcal{SF}\text{-}(\mathcal{A} \sqcup_{\mathcal{S}} \mathcal{B})$ на $\mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A}, \mathcal{SF}\text{-}\mathcal{B}$ индуцируют производные функторы a_*, b_* из $\mathcal{D}(\mathcal{A} \sqcup_{\mathcal{S}} \mathcal{B})$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}), \mathcal{D}(\mathcal{B})$, которые переводят совершенные модули в совершенные. Пусть T есть $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}$ -бимодуль. Для каждого $\mathcal{B}$ -модуля N можно построить ДГ $\mathcal{A}$ -модуль $N \otimes_{\mathcal{B}} T$. ДГ функтор $(-) \otimes_{\mathcal{B}} T: \text{Mod-}\mathcal{B} \rightarrow \text{Mod-}\mathcal{A}$ не сохраняет квазиизоморфизмы в общем случае, но если T – полусвободный $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}$ -бимодуль, мы получаем ДГ функтор $(-) \otimes_{\mathcal{B}} T: \mathcal{SF}\text{-}\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{SF}\text{-}\mathcal{A}$, который на уровне гомотопических категорий индуцирует производный функтор $(-) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} T: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Всякий $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}$ -бимодуль P задает $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{C}$ -бимодуль $\underline{P}$ по правилу $\underline{P}(B, C) = P(B, C)$, если $C \in \mathcal{A}$, и 0 в противном случае. Каждый морфизм $\phi: S \rightarrow T$ $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{A}$ -бимодулей индуцирует $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{C}$ -бимодуль $\tilde{T}$ по правилу: $\tilde{T}(B, C) = T(B, C)$, если $C \in \mathcal{A}$, и $\tilde{T}(B, C) = \text{Hom}_{\mathcal{B}}(C, B)$, если $C \in \mathcal{B}$, с естественной структурой бимодуля, происходящей из композиции $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(C, B) \otimes S(C, A) \rightarrow S(B, A) \xrightarrow{\phi} T(B, A)$, где $C \in \mathcal{B}$. Имеется изоморфизм $\tilde{S}(B, -) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, B) = h_{\mathcal{C}}^B$, и функтор $(-) \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{S}: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C})$ изоморфен вполне строгому функтору $b^*: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{C})$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

DOI: 10.4213/rm9720

ТЕОРЕМА 1. Пусть ДГ категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ДГ $\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ -бимодули S , T и $\phi: S \rightarrow T$ такие, как выше, а $R = \text{Cone}(\phi)$ – конус ϕ . Если для любых ДГ $\mathcal{B}$ -модулей M , N

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} R, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} T) = 0, \quad (1)$$

то функтор $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}: \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A} \underset{S}{\mathcal{L}} \mathcal{B})$ вполне строгий и задает полуортогональное разложение $\mathcal{D}(\mathcal{A} \underset{S}{\mathcal{L}} \mathcal{B}) = \langle \mathcal{D}(\mathcal{E}), \mathcal{D}(\mathcal{B}) \rangle$ для некоторой ДГ категории $\mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизм ϕ индуцирует морфизм $\tilde{\phi}: \tilde{S} \rightarrow \tilde{T}$, чей конус квази-изоморфен $\mathcal{B}$ - $\mathcal{C}$ -бимодулю $\underline{R}$. Функтор $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \underline{R}$ изоморфен композиции a^* и $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} R$, тогда как функтор $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} T$ изоморфен $a_*(-\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T})$. Получаем изоморфизмы

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \underline{R}, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} R, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} T) = 0,$$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{S}, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \underline{R}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C})}(b^*(M), a^*(N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} R)) = 0.$$

Следовательно, для любых ДГ $\mathcal{B}$ -модулей M и N имеем

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{S}, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{C})}(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{S}, N \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{S}).$$

Функтор $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{S}$ вполне строгий, значит, и функтор $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}$ также вполне строгий.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ДГ категории $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ДГ $\mathcal{B}$ - $\mathcal{A}$ -бимодули S , T , R и морфизм ϕ такие, как выше, и выполнено условие (1). Если функторы $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}$ и $R \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{T}, -)$ переводят совершенные комплексы в совершенные, то существует полуортогональное разложение $\text{Perf}-(\mathcal{A} \underset{S}{\mathcal{L}} \mathcal{B}) = \langle \text{Perf-}\mathcal{E}, \text{Perf-}\mathcal{B} \rangle$ для некоторой малой ДГ категории $\mathcal{E}$.

Категория $\text{Perf-}\mathcal{E}$ (соотв. $\text{Perf-}\mathcal{E}$) из теоремы 2 будет называться *партнером Крулля–Шмидта* (КШ-партнером) для $\text{Perf-}\mathcal{A}$ (соотв. $\text{Perf-}\mathcal{A}$). Поскольку композиция $(-)\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{B}} \tilde{T}$ и $R \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\tilde{S}, -)$ изоморфна тождественному функтору, К-теории для $\text{Perf-}\mathcal{E}$ и $\text{Perf-}\mathcal{A}$ одинаковы. Более того, их К-мотивы изоморфны.

Пусть X – гладкая проективная схема и $P_s \in \text{Perf-}X$, $s = 1, 2$, – совершенные комплексы, чьи носители $\text{supp } P_1$ и $\text{supp } P_2$ не пересекаются. Рассмотрим склейку $\mathcal{D} = \text{Perf-}X \odot_S \text{Perf-}k$, где $S = P_1 \oplus P_2$. Положим $T = P_2$. По теореме 2 функтор $(-)\overset{L}{\otimes}_k \tilde{T}$ из $\text{Perf-}k$ в $H^0(\mathcal{D})$ вполне строгий и имеется полуортогональное разложение $H^0(\mathcal{D}) = \langle \text{Perf-}\mathcal{E}, \text{Perf-}k \rangle$. Получается некоторый КШ-партнер $\text{Perf-}\mathcal{E}$ для $\text{Perf-}X$.

Для примера рассмотрим гладкую проективную кривую $X = C$ рода $g = g(C)$. Пусть P_1, P_2 – когерентные пучки кручения длины $l_s = \text{length } P_s$, $s = 1, 2$, такое, что $\text{supp } P_1 \cap \text{supp } P_2 = \emptyset$. Легко проверить, что КШ-партнер $\text{Perf-}\mathcal{E}$ не эквивалентен $\text{Perf-}C$. В самом деле, целочисленная билинейная форма $\chi(E, F) = \sum_m (-1)^m \dim \text{Hom}(E, F[m])$ на $K_0(C)$ пропускается через $\mathbb{Z}^2 = H^{\text{ev}}(C, \mathbb{Z})$. Тогда формы χ на $K_0(C)$ и $K_0(\mathcal{E})$ суть $\chi_C = \begin{pmatrix} 1-g & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_{\mathcal{E}} = \chi_t := \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $t = 1 - g - l_1 l_2$.

Билинейные формы χ_t не эквивалентны для разных t . Значит, категории $\text{Perf-}\mathcal{E}$, являющиеся КШ-партнерами для $\text{Perf-}C$, не эквивалентны ни друг другу при разных t , ни самой $\text{Perf-}C$. Случай $\mathbb{P}^1$ и двух точек $P_s = p_s$, $s = 1, 2$, обсуждается в [5; п. 3.1].

Список литературы

- [1] B. Keller, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **27** (1994), 63–102. [2] V. A. Lunts, D. O. Orlov, *J. Amer. Math. Soc.*, **23:3** (2010), 853–908. [3] G. N. Tabuada, *Théorie homotopique des DG-catégories*, PhD thesis, Univ. Paris 7, 2007, 178 pp. [4] D. Orlov, “Smooth and proper noncommutative schemes and gluing of DG categories”, *Adv. Math.* (to appear); 2014 (v5 – 2015), 43 pp., [arXiv:1402.7364](https://arxiv.org/abs/1402.7364). [5] Д. О. Орлов, *Тр. МИАН*, **290** (2015), 80–94.

Д. О. Орлов (D. O. Orlov)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: orlov@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Трещёвым

Принято редколлегией
29.04.2016