Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Бекларян, Критерий существования проективно-инвариантной меры для групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, связанный со структурой множества неподвижных точек, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm973>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:54:01

**КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРОЕКТИВНО-ИНВАРИАНТНОЙ
МЕРЫ ДЛЯ ГРУПП ГОМЕОМОРФИЗМОВ $\mathbb{R}$,
СОХРАНЯЮЩИХ ОРИЕНТАЦИЮ, СВЯЗАННЫЙ
СО СТРУКТУРОЙ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК**

Л. А. БЕКЛАРЯН

Одним из центральных вопросов при классификации групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, является описание метрических инвариантов, в частности, инвариантных и проективно-инвариантных мер. В [3] для конечно порожденных групп гомеоморфизмов $\mathbb{R}$ получено условие комбинаторного характера, эквивалентное существованию инвариантной меры: для некоторой точки $t \in \mathbb{R}$ орбита $Q(t)$ имеет субэкспоненциальный рост. В [4] исследован вопрос существования проективно-инвариантной меры для разрешимых групп. Полученный там критерий связан с существованием “нетривиальных” нормальных подгрупп с заданными метрическими свойствами. В работе автора [1] доказана эквивалентность следующих свойств: 1) для группы Q существует инвариантная мера; 2) группа Q полусопряжена некоторой подгруппе группы сдвигов на $\mathbb{R}$; 3) множество $\text{Fix } Q^N$ не пусто. Третий из приведенных критериев существования инвариантной меры связан со структурой множества неподвижных точек элементов группы Q . В работе автора [2] доказана эквивалентность следующих свойств: 1) для группы Q существует проективно-инвариантная мера; 2) группа Q полусопряжена некоторой подгруппе группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию.

Данная работа посвящена доказательству критерия существования проективно-инвариантной меры, связанного со структурой множества неподвижных точек элементов группы. Специальный случай результата такого типа получен в работе [5].

Для группы Q гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, определим:

$$\begin{aligned} Q^N &= \{q : q \in Q; \exists t \in \mathbb{R}, q(t) = t\}, & N(Q) &= \{t : t \in \mathbb{R}; \exists q \in Q \setminus e, q(t) = t\}, \\ \text{Fix } Q^N &= \{t : t \in \mathbb{R}, \forall q \in Q^N, q(t) = t\}, \\ T_q &= \sup\{t : q(t) = t\}, & t_q &= \inf\{t : q(t) = t\}; \end{aligned}$$

$\forall q \in Q \setminus Q^N$ положим $T_q = t_q = -\infty$; $H = \{q : q \in Q, t_q = -\infty, T_q = +\infty\}$, $C = H \cup [Q \setminus Q^N]$.

Из определения множества C следует, что $Q \setminus C = Q^N \setminus C$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Q – группа гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, сохраняющих ориентацию, для которой не существует Q -инвариантной σ -конечной борелевской меры (что эквивалентно условию $\text{Fix } Q^N = \emptyset$). Для существования проективно-инвариантной σ -бесконечной борелевской меры необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) H является подгруппой и фактор-группа Q/H не коммутативна;
- 2) $\forall q \in Q^N \setminus C$ справедливы условия: $-\infty < t_q \leq T_q < +\infty$; $\forall t \in]-\infty, t_q[$, $\forall T \in]T_q, +\infty[$, $\text{sign}[q(t) - t] = -\text{sign}[q(T) - T]$;
- 3) $\forall q_1, q_2 \in Q^N \setminus C$ либо $t_{q_1} = t_{q_2}$ и $T_{q_1} = T_{q_2}$, либо $[t_{q_1}, T_{q_1}] \cap [t_{q_2}, T_{q_2}] = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Условие 1) доказано в лемме 7.4 и теореме 7.4 работы [2]. Условие 2) доказано в предложениях 7.3, 7.4 работы [2]. Условие 3) доказано в лемме 7.3 работы [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-00974).

Достаточность. Из определения подгруппы H легко следует, что она является нормальной подгруппой. В группе Q можно ввести частичный порядок следующими двумя способами:

- 1) $q_1 \preceq q_2$ тогда и только тогда, когда существует точка $\bar{t} \in \mathbb{R}$ такая, что для всех $t \in [\bar{t}, +\infty[$ справедливо неравенство $q_1(t) \leq q_2(t)$;
- 2) $q_1 \preceq q_2$ тогда и только тогда, когда существует точка $\bar{t} \in \mathbb{R}$ такая, что для всех $t \in]+\infty, \bar{t}]$ справедливо неравенство $q_1(t) \leq q_2(t)$.

Таким способом введенные частичные порядки обозначим через M_+ и M_- , соответственно.

Фактор-группа Q/H в смысле частичного порядка M_+ (M_-) превращается в линейно упорядоченную группу [6]. Множество бесконечно малых элементов образует выпуклую нормальную подгруппу C_+/H (C_-/H), где C_+ (C_-) – соответствующая нормальная подгруппа Q . Фактор-группа Q/C_+ также будет линейно упорядоченной, но к тому же и архимедовой и по теореме Гёльдера изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$.

Покажем, что группа C_+ (C_-) принадлежит множеству C . Действительно, предположим, что существует элемент $q_1 \in (C_+ \setminus H) \cap Q^N$ ($q_1 \in (C_- \setminus H) \cap Q^N$). Для любого элемента $q_2 \in Q$, в силу условий 2) и 3) теоремы 1, найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $|\hat{q}_1|^n > |\hat{q}_2|$, где через $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ обозначены классы смежности по подгруппе H , определяемые элементами q_1 , q_2 . В таком случае $\hat{q}_1$ не является бесконечно малым элементом. Противоречие. Следовательно, $C_+ \in C$ ($C_- \in C$).

Из доказанного свойства следует, что $C_+^N = H$ ($C_-^N = H$). По теореме о фактор-группе (см. [1]) группа C_+/H (C_-/H) изоморфна подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$. Из коммутативности фактор-групп Q/C_+ (Q/C_-), C_+/H (C_-/H) и свойства 1) теоремы 1 следует, что все они нетривиальны. В силу нетривиальности группы C_+/H (C_-/H) и теоремы о фактор-группе (см. [1]), существует регулярная борелевская σ -конечная мера μ , инвариантная относительно группы C_+ (C_-), что эквивалентно условию $\text{Fix } H \neq \emptyset$ ($\text{Fix } H = \{t : t \in \mathbb{R}; \forall q \in H, q(t) = t\}$). Несложно заметить, что существует элемент $q_1 \in Q^N \setminus C$. Из нетривиальности группы C_+/H (C_-/H) следует существование элемента $q_2 \in C_+ \setminus H$ ($q_2 \in C_- \setminus H$). Несложно заметить, что для элемента q_1 точка T_{q_1} принадлежит множеству $\text{Fix } H$. Найдется $n \in \mathbb{Z}$ такое, что для элемента $q_1^n q_2 q_1^{-n} \in C_+$ ($\in C_-$) выполняется условие $q_1^n q_2 q_1^{-n}(T_{q_1}) \neq q_2(T_{q_1})$. В таком случае $q_1^n q_2 q_1^{-n} H \neq q_2 H$, откуда следует условие нецикличности фактор-группы C_+/H (C_-/H). тогда по следствию 4.1 работы [1] группа C_+ (C_-) является строго эргодичной, т.е. для любой C_+ (C_-)-инвариантной меры μ_1 выполняется соотношение $\mu_1 = c\mu$, $c > 0$.

Простая проверка показывает, что для любого $q \in Q$ мера $q_*\mu$ (для любого борелевского множества $A \subset \mathbb{R}$ $q_*\mu(A) = \mu(q^{-1}(A))$) является C_+ (C_-)-инвариантной, а по свойству строгой эргодичности группы C_+ (C_-) существуют числа $c(q) > 0$, для которых $q_*\mu = c(q)\mu$. Полученные свойства и означают проективную инвариантность меры μ для группы Q (см. [2], [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бекларян Л. А. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 3. С. 23–54. [2] Бекларян Л. А. // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 4. С. 3–28. [3] Plante I. F. // Ann. Math. 1975. V. 102. P. 327–361. [4] Plante I. F. // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. № 1. P. 401–414. [5] Солодов В. В. // УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 93–114. [6] Кокорин А. И., Копытов В. М. Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.