Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Боярский, Т. В. Скрыпник, Сингулярные орбиты присоединенного представления групп Ли $SO(n)$, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm974>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 04:30:00

СИНГУЛЯРНЫЕ ОРБИТЫ ПРИСОЕДИНЕННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ЛИ $SO(n)$

А. БОЯРСКИЙ, Т. СКРЫПНИК

Рассмотрим алгебру Ли $so(n)$, реализованную как алгебра антисимметричных матриц со следом, равным нулю:

$$so(n) \ni X = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_{n-1} \\ -x_1 & 0 & \dots & x_{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{n-1} & \dots & -x_{n(n-1)/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Как известно, орбиты присоединенного представления группы $SO(n)$ задаются в $\mathbb{R}^N$ ($N = n(n-1)/2$) как совместные поверхности уровня системы функций Казимира

$$S_k = \text{Tr } X^k = \sum_{i_1 \dots i_k} X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \dots X_{i_k i_1}, \quad k = \overline{1, l}, \quad l = [n/2].$$

Иногда вместо этой системы удобно рассматривать эквивалентную систему функций, а именно коэффициенты P_k характеристического многочлена

$$\Delta_X(\lambda) = |X - \lambda E| = \lambda^n - P_1 \lambda^{n-1} - P_2 \lambda^{n-2} - \dots - P_n.$$

Переход от первой системы ко второй осуществляется при помощи формулы

$$kPk = S_k - P_1 S_{k-1} - \dots - P_{k-1} S_1$$

(см. [1]). Для $so(n)$ $S_{2k+1} = \text{Tr } X^{2k+1} = 0 \Rightarrow P_{2k+1} = 0$ и

$$P_2 = \frac{1}{2} S_2, \quad P_4 = S_4 - \frac{1}{2} S_2^2, \quad P_6 = S_6 - \frac{1}{4} S_2 S_4 + \frac{1}{8} S_2^2, \dots$$

ЛЕММА 1. Для $X \in so(n)$ имеет место формула

$$P_{n-k} = (-1)^k \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A_{i_1 \dots i_k}^{i_1 \dots i_k}| = (-1)^k \sum (Pf^{i_1 \dots i_k})^2,$$

где $A_{i_1 \dots i_k}^{i_1 \dots i_k}$ — главные дополнительные миноры, получаемые из X вычеркиванием $i_1, \dots, i_k$ строк и $i_1, \dots, i_k$ столбцов, а $Pf^{i_1 \dots i_k}$ — пфаффианы этих миноров:

$$Pf^{i_1 \dots i_k} = \sum_{\substack{l_1 < l_2, \dots, l_{n-k-1} < l_{n-k} \\ l_1 < \dots < l_{n-k-1}}} (-1)^\sigma a_{l_1 l_2} \dots a_{l_{n-k-1} l_{n-k}}, \quad \text{где } A^{i_1 \dots i_k} = \|a_{l_m}\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта формула легко получается, если для матрицы $X - \lambda E$ в выражении для определителя через сумму по перестановкам привести подобные слагаемые при произведении диагональных элементов.

ТЕОРЕМА 1. Система уравнений $P_1 = c_1, \dots, P_{n-k+1} = c_{n-k+1}, Pf^{i_1 \dots i_k} = 0$ описывает явное вложение сингулярных орбит присоединенного представления групп $SO(n)$ следующих размерностей m_k :

- 1) $n = 2l$: $m_k = 2(l(l-1) - k(k-1)), k = \overline{1, l}$;
- 2) $n = 2l + 1$: $m_k = 2l^2 - 2k^2, k = \overline{1, l}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что равенство $P_{n-k} = 0$ эквивалентно системе $Pf^{i_1 \dots i_k} = 0$, $i_1 = \overline{1, n}, \dots, i_k = \overline{1, n}$. Поэтому можно предположить, что последняя система вместе с условиями постоянства остальных функций Казимира будет описывать орбиты меньшей размерности (так как увеличилось количество независимых функций).

Так как для $\mathfrak{so}(n)$ все орбиты проходят через подалгебру Картана H , для нахождения сингулярных орбит достаточно найти элементы этой подалгебры, имеющие аннуляторы большей, чем в случае общего положения, размерности (при этом одна орбита может пересекать подалгебру Картана в нескольких точках). Используя явный вид коммутационных соотношений и реализацию подалгебры Картана в виде антисимметричных антидиагональных матриц, можно увидеть, что орбиты размерности m_k проходят через точки с $\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_k} = 0$, где α_i – антидиагональные матричные элементы матрицы из подалгебры H . Это орбиты вида

$$\mathrm{SO}(2n)/(\mathrm{SO}(2k) * \mathrm{SO}(2)^{n-k}), \quad \mathrm{SO}(2n+1)/(\mathrm{SO}(2k+1) * \mathrm{SO}(2)^{n-k})$$

(здесь $\mathrm{SO}(2)^{n-k}$ обозначает $\mathrm{SO}(2)$ в степени $n-k$). Возвращаясь к уравнениям $Pf^{i_1 \dots i_k} = 0$, $i_1 = \overline{1, n}, \dots, i_k = \overline{1, n}$, заметим, что для пфаффианов имеется формула разложения по строке и столбцу, аналогичная формуле для определителей, и поэтому из равенства нулю всех пфаффианов степени k следует равенство нулю пфаффианов старших степеней, следовательно, можно рассматривать эти системы уравнений по отдельности. Их решениями являются как раз описанные выше элементы H , через которые проходят вырожденные орбиты размерностей m_k . Таким образом, можно проверить, что не все уравнения из каждой системы независимы, однако системы имеют постоянный ранг и вместе с условиями постоянства остальных функций Казимира задают вложения в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ указанных выше орбит.

Интересно отметить, что орбиты минимальной размерности во всех $\mathfrak{so}(n)$ задаются квадратичными функциями. Например, для $\mathfrak{so}(5)$ уравнения $Pf^i = 0$, $i = \overline{1, 5}$, имеют вид $(\vec{a}\vec{b}) = 0$; $(\vec{b}\vec{c}) = 0$; $[\vec{a} \times \vec{c}] + \vec{b}d = 0$, где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, d$ – три трехмерных вектора и число, параметризующие 10-мерную $\mathfrak{so}(5)$. Легко видеть, что два скалярных уравнения почти везде следуют из векторного, и вместе с уравнением $\mathrm{Tr} X^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \mathrm{const}$ система определяет однопараметрическое семейство 6-мерных вырожденных орбит. Выбрать $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, d$, не меняя вида уравнений, можно тремя способами. Таким образом, орбиту можно единообразно описывать в различных картах. Подробный анализ для $\mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{so}(6)$, $\mathfrak{so}(7)$, а также обобщение этой конструкции на другие компактные алгебры изложены в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. [2] Гуревич Г. Б. Основы теории алгебраических инвариантов. М.: ОГИЗ, 1948. [3] Боярский А., Скрипник Т. // Укр. матем. журн. 1996.

Принято редколлегией
11.03.1996