Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Бузато, Реализация универсальной формальной группы Абеля, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm975>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:37:34

РЕАЛИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ФОРМАЛЬНОЙ ГРУППЫ АБЕЛЯ

Ф. БУЗАТО

Рассмотрим двухпараметрический род $\chi_{\alpha,\beta}: \Omega_U \rightarrow Q[\alpha, \beta]$, определяющий формальную группу с экспонентой

$$\bar{g}(u) = \frac{1}{\alpha - \beta} (\exp(\alpha u) - \exp(\beta u)),$$

где Ω_U – кольцо комплексных кобордизмов. Эта формальная группа имеет вид

$$f(u, v) = u + v + \alpha_1 uv + \sum_{j>1} \alpha_j (uv^j + vu^j),$$

она была названа в [2] именем *Абеля*, который первый ввел функциональное уравнение (теорему сложения), характеризующее ряд $\bar{g}(u)$. Важными случаями рода $\chi_{\alpha,\beta}$ являются род *Тодда* ($\alpha = 0, \beta = -1$) и *A-род* ($\alpha = -\beta = \frac{1}{2}$). В [2] вычислена универсальная формальная группа *Абеля* $\mathcal{F}_{Ab}(u, v)$. Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА. *Существует коммутативная комплексно-ориентируемая теория коhomологий $Ab^*(-)$ (теория кобордизмов с особенностями) с кольцом скаляров $Ab^*(\text{точка}) \cong \Lambda$, формальная группа $F_{Ab}(u, v)$ в которой совпадает с $\mathcal{F}_{Ab}(u, v)$, где Λ – кольцо коэффициентов формальной группы $\mathcal{F}_{Ab}(u, v)$.*

Говоря о комплексно-ориентируемой теории коhomологий, обычно предполагают, что она имеет коммутативное умножение. Однако, с точки зрения проблемы реализации формальных групп в теориях коhomологий, достаточно использовать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Теория коhomологий $h^*(-)$ называется *комплексно-ориентируемой*, если в ней определено функториальное, ассоциативное умножение, такое что

- 1) кольцо $h^*(\mathbb{CP}^\infty \times \mathbb{CP}^\infty)$ коммутативно;
- 2) вложение $i: S^2 \simeq \mathbb{CP}^1 \hookrightarrow \mathbb{CP}^\infty$ индуцирует эпиморфизм $i^*: h^*(\mathbb{CP}^\infty) \rightarrow h^*(S^2)$.

Для комплексно-ориентируемых теорий $h^*(-)$ характер *Черна–Дольда* ch_h индуцирует кольцевой изоморфизм

$$ch_h \otimes Q: h^*(X) \otimes Q \xrightarrow{\cong} H^*(X; h^*(\text{точка}) \otimes Q)$$

для любого конечного клеточного комплекса X . Следовательно (как обратил мое внимание В.М. Бухштабер), коммутатор $[x, y]$ имеет конечный порядок для любых $x, y \in h^*(X)$.

Доказательство теоремы основывается на более общей конструкции, для которой фиксируем некоторые обозначения.

Пусть R – коммутативное градуированное кольцо с единицей и $f(u, v)$ – одномерная коммутативная формальная группа над R . Через $F_U(u, v) = u + v + \sum_{i,j \geq 1} \alpha_{i,j} u^i v^j$ обозначим универсальную формальную группу над кольцом *Лазара* L и через $\theta: L \rightarrow R$ – единственный кольцевой гомоморфизм из L в R такой, что $F(u, v) = \theta_* F_U(u, v)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если R является областью целостности и θ является эпиморфизмом, то существует комплексно-ориентируемая теория коhomологий $h^*(-)$, кольцо скаляров которой изоморфно R и формальная группа которой равна $f(u, v)$, т.е. $h^*(\text{точка}) \cong R$ и $F_h(u, v) = f(u, v)$.*

Предложение 1 основывается на теориях (ко)бордизмов с особенностями [1] и, в частности, на работе О.К. Миронова [3], где доказано, что для произвольного множества особенностей Σ в унитарной теории кобордизмов с особенностями $\Omega_\Sigma^*(-)$, существует ассоциативное допустимое умножение. Наложённые на R и θ условия позволяют найти подходящий набор особенностей Σ , чтобы провести доказательство.

Работа выполнена при частичной поддержке Швейцарского Национального Фонда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Часть первая. Напомним необходимые факты о Λ – кольце универсальной формальной группы *Абеля*. В [2] доказано, что Λ не имеет элементов кручения и что $\Lambda \otimes Q = Q[\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}]$. Поэтому каноническое отображение $\Lambda \hookrightarrow \Lambda \otimes Q$ мономорфно, и, следовательно, Λ является областью целостности. Кроме того, кольцо Λ изоморфно фактор-кольцу Ω_U^*/J , где J – идеал, порожденный элементами $\alpha_{i,j}$, $i, j \geq 2$ (это следует из теоремы 3.4 в [2]). Итак, условия предложения 1 выполнены и первая часть теоремы доказана.

Остается исследовать коммутативность, так как предложение 1 дает не обязательно коммутативную теорию когомологий $h^*(-)$.

Препятствия к коммутативности можно вычислить с помощью операций *Стинрода–Дика* [3]. Коротко говоря, многообразие $[P]$ из множества особенностей Σ определяет некоторый элемент $\kappa(P) \in \Omega_\Sigma^* \otimes Z_2$, являющийся препятствием к коммутативности в теории $\Omega_\Sigma^*(-)$. Обращаем внимание на то, что $\kappa(P)$ определено независимо от $\kappa(Q)$, если $[P] \neq [Q]$, $[P], [Q] \in \Sigma$. Более того, выполнено $\kappa(P) = \widetilde{\mathcal{P}}_2([P])$, где отображение $\widetilde{\mathcal{P}}_2: \widetilde{\Omega}_U^{2q}(X) \rightarrow \widetilde{\Omega}_U^{4q}(\mathbb{RP}^2 \wedge X)$ построено на основе операций *Стинрода–Дика* и для $X = S^0$ имеет вид $\widetilde{\mathcal{P}}_2: \Omega_U^{-2q} \rightarrow \Omega_U^{-4q-2} \otimes Z_2$. Отображение $\widetilde{\mathcal{P}}_2$ обладает следующими свойствами.

ЛЕММА 1 [3]. 1) $\widetilde{\mathcal{P}}_2(a \cdot b) = a^2 \cdot \widetilde{\mathcal{P}}_2(b) + \widetilde{\mathcal{P}}_2(a) \cdot b^2$, $a, b \in \Omega_U^*(X)$. 2) $\widetilde{\mathcal{P}}_2(a + b) = \widetilde{\mathcal{P}}_2(a) + \widetilde{\mathcal{P}}_2(b) + \alpha_{1,1}ab$, $a, b \in \Omega_U^{2q}(X)$. 3) Если ξ – линейное комплексное расслоение и $u \in \Omega_U^2(T\xi)$ – его класс Тома, то имеет место формула

$$\widetilde{\mathcal{P}}_2(u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} s_k(u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1,k} u^{k+1},$$

где s_k – операция Ландвебера–Новикова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Часть вторая. С помощью леммы 1 и используя факт, что в кольце $\Lambda \cong \Omega_U^*/J$ верны соотношения

$$k\alpha_{1,k} = - \sum_{n=2}^{k-1} n\alpha_{1,n}\alpha_{1,n-k}, \quad k \geq 3$$

(см. [2]), проверяется, что $\widetilde{\mathcal{P}}_2(J) \equiv 0$ в $\Omega_U^*/J \otimes Z/2$. Таким образом, все препятствия равны нулю, и, следовательно, теория $Ab^*(-)$ является коммутативной. Теорема доказана.

В заключение приведем некоторые замечания о коммутативности в теориях $\Omega_\Sigma^*(-)$ для произвольного множества особенностей Σ .

Пусть J_Σ – идеал в Ω_U^* (точка), порожденный множеством Σ . Коммутативность умножения в теории $\Omega_\Sigma^*(-)$ эквивалентна тому, что $\widetilde{\mathcal{P}}_2(J_\Sigma) \subset J_\Sigma \otimes Z/2$. Итак, из тривиального представления любого элемента x в виде $x = (2k+1)x - 2kx$ следует (в [3] другим способом доказанная)

ЛЕММА 2. Если $2k+1 \in J_\Sigma$ ($k \geq 1$), то мультипликативная структура в $\Omega_\Sigma^*(-)$ является коммутативной.

На основе свойств отображения $\widetilde{\mathcal{P}}_2$ и теории формальных групп можно доказать следующий частный случай уже известной теоремы (см. [4] или [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $2 \in J_\Sigma$ и мультипликативная структура в $\Omega_\Sigma^*(-)$ коммутативна, то $\Omega_\Sigma^*(-) \cong H^*(-; \Omega_\Sigma^*(\text{точка}))$.

Автор благодарит В.М. Бухштабера за постановку задачи и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Baas N. A. // Math. Scand. 1973. V. 33. P. 279–302. [2] Бухштабер В.М., Холодов А.Н. // Матем. сб. 1990. Т. 181. №1. С. 75–94. [3] Миронов О.К. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. №4. С. 789–806. [4] Пажитнов А.В., Рудяк Ю.Б. // Матем. сб. 1984. Т. 124 (166). №4. С. 486–494. [5] Würgler U. // Comment. Math. Helvetici. 1986. V. 61. P. 33–45.