Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Веселов, М. В. Фейгин, О. А. Чалых, Новые интегрируемые деформации
квантовой задачи Калоджеро–Мозера, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm976>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:36:48

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ КВАНТОВОЙ ЗАДАЧИ КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

А. П. ВЕСЕЛОВ, М. В. ФЕЙГИН, О. А. ЧАЛЫХ

Оператор Шрёдингера $L = -\Delta + u(x_1, \dots, x_n)$ в n -мерном пространстве называется *интегрируемым*, если существуют n попарно коммутирующих дифференциальных операторов $L_1 = L, L_2, \dots, L_n$ с алгебраически независимыми постоянными старшими символами $P_i(k_1, \dots, k_n)$, и *алгебраически интегрируемым*, если при этом найдется еще один оператор L_{n+1} , коммутирующий со всеми L_i и такой, что его старший символ $P_{n+1}(k_1, \dots, k_n)$ принимает различные значения на решениях системы уравнений $P_i(k) = c_i$ ($i = 1, \dots, n$) (см. [1]–[3]). В размерности $n = 1$ алгебраически интегрируемые операторы Шрёдингера описываются в рамках конечнозонной теории (см., например, [4]). В работе [2] была высказана гипотеза, что все такие операторы в размерности $n > 1$ отвечают обобщенной квантовой задаче Калоджеро–Мозера [5] при специальных целочисленных значениях параметров. В настоящей заметке мы приводим новые примеры алгебраически интегрируемых операторов Шрёдингера, показывающие, что, по крайней мере, в рациональном и тригонометрическом случаях эта гипотеза не верна.

В рациональном случае эти примеры получаются в рамках следующей общей конструкции [2], [3]. Пусть $\mathcal{A}$ – конечное множество неколлинеарных векторов α в $\mathbb{R}^n$ с кратностями $m_\alpha \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию $\psi(k, x)$, $k, x \in \mathbb{R}^n$, вида $\psi = P(k, x)e^{kx}$, где $P(k, x)$ – полином по k со старшим членом $A(k) = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} (k, \alpha)^{m_\alpha}$, такую, что выполнены следующие свойства квазиинвариантности: $\psi(k, x) - \psi(s_\alpha k, x)$ делится на $(k, \alpha)^{2m_\alpha}$ для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, где s_α – отражение относительно гиперплоскости $(k, \alpha) = 0$.

ТЕОРЕМА 1 [2], [3]. *Если функция ψ с указанными свойствами существует, то она единственна и является собственной функцией алгебраически интегрируемого оператора Шрёдингера*

$$(1) \quad L = -\Delta + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} m_\alpha(m_\alpha + 1)(\alpha, \alpha)(\alpha, x)^{-2}.$$

ТЕОРЕМА 2 [3]. *Функция ψ существует в случае, когда $\mathcal{A}$ состоит из нормалей к зеркалам некоторой группы Кокстера, а набор кратностей инвариантен относительно этой группы. Соответствующий оператор Шрёдингера (1) является квантовым гамильтонианом обобщенной задачи Калоджеро–Мозера при специальных значениях параметров взаимодействия.*

Если все $m_\alpha = 1$, то верно и обратное: если ψ -функция существует, то $\mathcal{A}$ – система нормалей группы Кокстера.

Оказывается, что ψ -функция существует также для некокстеровских конфигураций гиперплоскостей, если допустить различные кратности m_α .

Пусть $\mathcal{A}_n(m)$ состоит из следующих векторов в $\mathbb{R}^{n+1}$: $e_i - e_j$ ($i < j$, $i, j = 1, \dots, n$) с кратностью m и $e_i - \sqrt{m}e_{n+1}$ ($i = 1, \dots, n$) с кратностью 1.

ТЕОРЕМА 3. *Для системы $\mathcal{A}_n(m)$ ψ -функция существует. Соответствующий оператор Шрёдингера имеет вид*

$$(2) \quad L = -\Delta + \sum_{i < j}^n 2m(m+1)(x_i - x_j)^{-2} + \sum_{i=1}^n 2(m+1)(x_i - \sqrt{m}x_{n+1})^{-2},$$

или, в координатах $q_i = x_i$, $i = 1, \dots, n$, $q_{n+1} = \sqrt{m} x_{n+1}$,

$$L = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{p_k^2}{m_k} + 2m(m+1) \sum_{i < j}^{n+1} m_i m_j (q_i - q_j)^{-2},$$

где $m_1 = \dots = m_n = 1$, $m_{n+1} = m^{-1}$, $p_k = i\partial/\partial q_k$.

Другой пример отвечает двумерным системам $\mathcal{C}_2(m, l)$, состоящим из векторов $\alpha_1 = \sqrt{2m+1} e_1$ с кратностью l , $\alpha_2 = \sqrt{2l+1} e_2$ с кратностью m и $\alpha_3 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, $\alpha_4 = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)$ с кратностью 1:

$$(3) \quad L = -\Delta + \frac{l(l+1)}{x_1^2} + \frac{m(m+1)}{x_2^2} + \frac{4(l+m+1)}{(\sqrt{2m+1}x_1 + \sqrt{2l+1}x_2)^2} + \frac{4(l+m+1)}{(\sqrt{2m+1}x_1 - \sqrt{2l+1}x_2)^2}.$$

Алгебраическая интегрируемость операторов $-\Delta + u(x_1, \dots, x_n)$ так же, как и в кокстеровском случае [6], приводит к гюйгенсовости гиперболических уравнений $(\square_{N+1} + u(x))\phi = 0$, где $\square_{N+1} = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial x_1^2 - \dots - \partial^2/\partial x_N^2$, а размерность N достаточно велика.

ТЕОРЕМА 4. Для операторов (2), (3) соответствующие гиперболические уравнения $(\square_{N+1} + u(x))\phi = 0$ удовлетворяют принципу Гюйгенса в смысле Адамара для нечетных $N \geq 3 + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} 2m_\alpha$, т.е. $N \geq 3 + 2n + mn(n-1)$ для системы $\mathcal{A}_n(m)$ и $N \geq 7 + 2(m+l)$ для системы $\mathcal{C}_2(m, l)$.

В заключение отметим, что операторы (2), (3) интегрируемы для произвольных (не обязательно целых) значений кратностей m, l . Кроме того, тригонометрические аналоги операторов (2), (3), которые получаются заменой $(\alpha, x)^{-2}$ на $\sin^{-2}(\alpha, x)$ в формуле (1), также интегрируемы (соответственно, алгебраически интегрируемы) для произвольных (соответственно, целых) кратностей m, l .

Мы чрезвычайно признательны К. Л. Стыркасу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кричевер И. М. // УМН. 1977. Т. 32. №6. С. 198–245. [2] Chalykh O. A., Veselov A. P. // Commun. Math. Phys. 1990. V. 126. P. 597–611. [3] Веселов А. П., Стыркас К. Л., Чалых О. А. // ТМФ. 1993. Т. 94. №2. С. 253–275. [4] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. // УМН. 1976. Т. 31. №1. С. 59–164. [5] Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. // Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404. [6] Берест Ю. Ю., Веселов А. П. // Функц. анализ и его прил. 1994. Т. 28. №1. С. 3–15.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
07.05.1996