Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Берндтссон, С. В. Кисляков, Р. Г. Новиков, В. М. Полтерович, П. Л. Поляков, А. Е. Туманов, А. А. Шананин, Ч. Л. Эпштейн, Геннадий Маркович Хенкин (некролог), *УМН*, 2017, том 72, выпуск 3, 170–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9766>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:42:10

Геннадий Маркович Хенкин

19 января 2016 г. в Париже после тяжёлой болезни скончался Геннадий Маркович Хенкин, выдающийся математик, специалист в области комплексного анализа, математической физики, приложений математики к экономике. Его вклад в значительной мере определил многомерный комплексный анализ на рубеже веков. Миша Громов, который работал с ним, пишет: *Свет струился от его лица — сияние интеллекта, прятавшееся в его добром взгляде. У него был мощный ум, открытый всевозможным идеям и проблемам математики, что необычно даже для лучших математиков, и он глубоко понимал науку. Он был очаровательно скромным человеком, и слово “высокомерие” не могло возникнуть в его присутствии. Многие пойдут по его*

следам в математике, а его друзья будут сохранять в своих сердцах тепло его удивительной личности.

Геннадий Маркович Хенкин родился в Москве 26 октября 1942 г. Его родителями были Марк Львович Хенкин и Евгения Моисеевна Шварцштейн. М. Л. Хенкин был выдающимся учёным в области металлургии. Начиная с 7-го класса и до окончания школы Геннадий был активным участником математического кружка при МГУ под руководством А. М. Олевского.

В 1959 г. Г. М. Хенкин поступил на механико-математический факультет МГУ, который окончил в 1964 г. Он рано начал научную работу, и к окончанию университета им было опубликовано 5 статей в области функционального анализа. В этот же период он познакомился со своей будущей женой Натальей Николаевной Новиковой, учившейся на том же курсе. В 1965 г. у них родился сын Роман (Р. Г. Новиков), который тоже стал математиком. В дальнейшем они много работали вместе над различными проблемами.

В 1964 г. Г. М. Хенкин поступил в аспирантуру механико-математического факультета МГУ, которую окончил в 1967 г., защитив кандидатскую диссертацию “Неизоморфность некоторых пространств функций от разного числа переменных”. Его научным руководителем был Анатолий Георгиевич Витушкин. В 1969 г. Г. М. Хенкину была присуждена премия Московского математического общества для молодых математиков.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9766>

С 1967 г. Г. М. Хенкин был сотрудником Центрального экономико-математического института АН СССР, затем РАН, в Москве. Много лет он работал над применениями математики к экономике. Наиболее плодотворным было его сотрудничество с В. М. Полтеровичем и А. А. Шананиным (см. описание результатов ниже). В 1992 г. “за выдающиеся работы в области общей экономической теории” Г. М. Хенкину (совместно с В. М. Полтеровичем) была присуждена премия имени Н. Д. Кондратьева Российской академии наук.

Однако наибольшую международную известность Г. М. Хенкин получил за работы в области комплексного анализа и его приложений. В 1973 г. на механико-математическом факультете МГУ он защитил докторскую диссертацию “Интегральные представления в некоторых задачах теории функций нескольких комплексных переменных”. Им было опубликовано большое число статей и две книги.

В советский период под руководством Г. М. Хенкина кандидатские диссертации в области комплексного анализа защитили А. В. Романов (1976), А. Е. Туманов (1980) и Р. А. Айрапетян (1981).

В связи с исследованиями по комплексному анализу и его приложениям Г. М. Хенкин получал большое число международных приглашений. В 1983 г. он сделал приглашённый 45-минутный доклад на Международном математическом конгрессе в Варшаве. В 1987 г. он посетил Францию, а в 1990 г. – США.

С 1991 г. Г. М. Хенкин работал профессором Университета Пьера и Марии Кюри (Университет Париж-6), занимая специальную профессорскую позицию, вплоть до ухода на пенсию в 2011 г. в качестве заслуженного профессора.

Во Франции под руководством Г. М. Хенкина PhD-диссертации защитили С. Нивош (1994), Т.-К. Дин (1997), П. Дингоян (1998), С. Ригат (1999), Ф. Саркиз (1999), Б. Фабр (2000), Л. Пирио (2004) и А. Иригоян (2007).

Г. М. Хенкин активно участвовал в математической жизни Франции. Так, в разные периоды он заведовал отделом спецкурсов по анализу и геометрии в Университете Пьера и Марии Кюри, являлся членом Учёного совета по математике этого университета, входил в Национальный совет университетов Франции по чистой математике.

Кроме того, Г. М. Хенкин входил в редколлегии следующих журналов: “The Journal of Geometric Analysis” (с 1992 г.), “Bulletin des Sciences Mathématiques” (с 1992 г.), “Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa” (с 2002 г.), в которых работал до конца жизни. В разные периоды он работал также в редколлегиях журналов “Journal de l’Institut de Mathématiques de Jussieu” и “Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques”.

Работая во Франции, Г. М. Хенкин продолжал работу в Центральном экономико-математическом институте РАН (в последние годы в качестве главного научного сотрудника), проводил каждый год несколько месяцев в Москве. Он являлся также аффилированным профессором Московского физико-технического института.

В 2011 г. Г. М. Хенкину была присуждена в США премия имени Стефана Бергмана за фундаментальный вклад в комплексный анализ многих переменных.

Перейдём к обсуждению избранных результатов Г. М. Хенкина. Он начал с проблемой функционального анализа, после чего обратился к многомерному комплексному анализу, начиная с комплексных интегральных формул в очень широком аспекте.

Через $\bar{\partial}$ -задачу он пришёл к интегральной геометрии и к обратным задачам математической физики; наконец, многие годы он работал в области математической экономики. Предварим наши рассуждения некоторыми общими замечаниями. Г. М. Хенкин был аналитиком высочайшего уровня, и явные формулы имели для него абсолютную ценность. Он верил, что многомерный комплексный анализ является важным универсальным языком для всего анализа. Его отличало широчайшее знание предмета, глубокое владение литературой, а его замечательные обзоры содержали большие списки литературы с комментариями. Геннадий Маркович был очень чувствителен

к правильной атрибуции результатов: типично, что некоторые теоремы в его обзорах могли иметь пять или более авторов. Его прикладные работы по экономике всегда были поводом для глубоких результатов, имеющих независимый математический интерес. Он был полон идей, которыми щедро делился. Это была одна из причин, по которой Геннадий Маркович стремился иметь учеников и охотно шёл на сотрудничество с другими математиками.

В короткой статье трудно отразить все значительные работы Г. М. Хенкина, который был необыкновенно разносторонним и плодотворным математиком. Выбор тем во многом определялся вкусами и интересами авторов. К числу важных вопросов, не затронутых нами, относятся множества пика, отображения классических областей, преобразование Абеля–Радона, голоморфные цепи с заданной границей, голоморфные функции и когомологии на псевдовыпуклых накрытиях и др.

Ранние работы по функциональному анализу. Банахово пространство функций, заданных на каком-то множестве, скорее, склонно не помнить об этом множестве ничего. Даже если отвлечься от гильбертовых пространств, для которых этот тезис верен в крайней форме, мы легко найдём ему массу подтверждений. Например, пространства L^p , что на отрезке, что на какой-нибудь многомерной области, линейно изометричны при фиксированном p – просто потому, что вероятностная сепарабельная безатомная мера всего одна с точностью до изоморфизма, если этот термин понимается правильно.

Более жёсткие метрики, разумеется, приводят к менее тривиальным ситуациям. Например, пространство $C(K)$ непрерывных функций на компакте K (со стандартной суп-нормой) определяет компакт K в следующем смысле: если пространства $C(K_1)$ и $C(K_2)$ линейно изометричны, то компакты K_1 и K_2 гомеоморфны. Это утверждение легко выводится из хорошо известной связи между крайними точками единичного шара пространства $C(K)^*$ и точками компакта K . Однако если вспомнить, что мы часто при работе не стесняемся заменять норму банахова пространства на более удобную эквивалентную, то становится ясным, что изоморфизмом здесь естественно считать вовсе не линейную изометрию, а линейный гомеоморфизм. При таком взгляде на вещи упомянутая “короткая память” восстанавливается: знаменитая теорема Миллутина, доказанная в 1951 г., но обнародованная только в 1966-м (см. ссылки в [34; т. 2, гл. 36]), сообщает нам, что все пространства $C(K)$ для несчётных метрических компактов K линейно гомеоморфны друг другу. В частности, линейно гомеоморфны пространства непрерывных функций на канторовом множестве, отрезке, квадрате, кубе и т. д. Тем самым, даже такая грубая характеристика множества K , как размерность, совсем не влияет на пространство $C(K)$.

В этой связи результаты Г. М. Хенкина [1]–[3], опубликованные в 1967–1968 гг., оказались в то время настоящим откровением. Их можно резюмировать так: размерность (число переменных) всё-таки имеет значение, когда речь идет о банаховых пространствах функций, определяемых в терминах более тонких условий, чем просто непрерывность.

Гладкие функции. В статье [1] было доказано, что пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке I не содержит дополняемых подпространств, линейно гомеоморфных пространству k раз непрерывно дифференцируемых функций на n -мерном кубе I^n , если $n \geq 2$ и $k \geq 1$. По всей вероятности, результат или его частный случай был известен Гротендику в середине 1950-х годов, но подробности тогда не были обнародованы, а само утверждение едва ли было кем-то замечено. У Хенкина речь идет даже об отсутствии равномерно непрерывного вложения второго пространства в первое с равномерной ретракцией на образ, но это усиление чисто линейной теоремы, приведенной выше, довольно формально.

Г. М. Хенкин более не возвращался к этой теме, однако его статья породила целую серию исследований, в основном в России и в Польше, – см. последнюю по времени

в этой серии работу [35], где изложена также история вопроса и приведены ссылки на предшествующие публикации. Отметим только, что отправной точкой в этой деятельности было наблюдение (С. В. Кисляков, 1974), что результат Хенкина можно вывести и даже существенно усилить, просто посмотрев пристально на соболевские вложения с предельным показателем (сам Хенкин пользовался совсем другим методом).

Поскольку пространство $C^l(I)$ линейно гомеоморфно пространству $C(I)$, результат Хенкина говорит по существу о том, что пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций от более чем одной переменной отличается от всех пространств $C(K)$ по своим линейно-топологическим свойствам. Все работы упомянутой выше серии доказывают нечто подобное, уточняя, какие именно линейно-топологические свойства у разных (классических, анизотропных и т. д.) пространств гладких функций двух и более переменных отличны от того, что есть в $C(K)$. Естественный вопрос о том, будут ли линейно гомеоморфными, например, пространства один раз непрерывно дифференцируемых функций на квадрате и кубе, по-прежнему открыт и, по-видимому, очень труден.

Аналитические функции. В отличие от предыдущего пункта, здесь речь пойдет о сравнении пространств функций, ни одно из которых не изоморфно пространству $C(K)$ ни при каком K – так что в каком-то смысле мы поднимаемся на более высокий уровень сложности. Пусть G – ограниченная область в комплексном евклидовом пространстве $\mathbb{C}^n$. Обозначим через $A(G)$ банахово пространство функций, непрерывных на $\bar{G}$ и аналитических в G . Пусть еще $\mathbb{D}$ – единичный круг на комплексной плоскости (соответственно $\mathbb{D}^k$ – k -мерный полидиск), а B_m – единичный шар в $\mathbb{C}^m$. В работах [2], [3] было доказано, что при $k \geq 2$ и $m \geq 1$ пространства $A(\mathbb{D}^k)$ и $A(B_m)$ не являются линейно гомеоморфными.

Взяв здесь $k = 2$ и $m = 1$, мы получим неизоморфность соответствующих пространств аналитических функций в круге и бидиске, т. е. снова утверждение типа “размерность имеет значение”. Однако результат Хенкина говорит нам, что линейного гомеоморфизма нет даже между пространствами аналитических функций, непрерывных вплоть до границы, в некоторых областях одной размерности – например, в шаре и полидиске в $\mathbb{C}^n$.

В продолжение этой темы можно назвать лишь две работы. В 1975 г. Б. С. Митягин и А. Пелчинский установили неизоморфность пространств $A(\mathbb{D}) = A(B_1)$ и $A(B_m)$ при $m \geq 2$. Много позже Ж. Бургейн (1984) показал, что в серии $A(\mathbb{D}^k)$ никакие два пространства не являются линейно гомеоморфными. В действительности Бургейн доказал, что если область G есть произведение нескольких строго псевдовыпуклых областей, то их число – инвариант для линейного топологического пространства $A(G)$, так что, в общем, его результат – не совсем утверждение “о зависимости от числа переменных”. Ссылки можно найти в [34; т. 1, гл. 16].

Как и в случае пространств гладких функций, многие естественные вопросы остаются здесь без ответа. Неизвестно, например, существует ли плоская область G , для которой пространство $A(G)$ не является линейно гомеоморфным пространству $A(\mathbb{D})$. Неизвестно также, различны или одинаковы пространства серии $A(B_m)$ при $m \geq 2$.

По-видимому, любая теория переживает на каком-то этапе “героическую эпоху” – когда осознаются вопросы о тождестве или различии основных объектов, но решаются они с трудом. Как видно из этого небольшого обзора, в теории банаховых пространств такая эпоха замерла на долгие годы, так и не завершившись. Однако Геннадий Маркович Хенкин был одним из тех, кто стоял у ее впечатляющего начала.

Интегральные формулы. Наибольшую известность приобрели результаты Хенкина по многомерным комплексным интегральным формулам. Это большая разветвленная сеть публикаций, результаты которой подытожены в его прекрасном обзоре [11]. Напомним, что в течение 1890–1910 гг. выдающиеся математики Вейерштрасс,

Пуанкаре, Хартогс, Кузен, Е. Леви осознали принципиальное отличие случаев одного и многих комплексных переменных, описали специфически многомерные феномены (области голоморфности, псевдовыпуклость и т. д.) и сформулировали основные проблемы, которые определили развитие области на много десятилетий. Однако эти проблемы удавалось решать либо во всём пространстве, либо для очень специальных областей, таких, например, как полидиск или шар, либо локально. Удивительная комбинация ясного осознания целей и отсутствия адекватной техники! Геннадий Маркович любил цитировать К. Ока о том, что несколько десятилетий проблемы во многих комплексных переменных только аккумулировались, но не решались.

Одно важное средство отчётливо отсутствовало долгое время. Не было многомерного аналога интегральной формулы Коши. Иногда удавалось воспользоваться одномерной формулой или её следствием для прямого произведения одномерных областей. Положение стало меняться в 1930-е годы с появлением формулы С. Бергмана и А. Вейля для аналитических полиэдров – областей, задаваемых в $\mathbb{C}^n$ системой неравенств $|F_j(z)| < 1$, $j = 1, \dots, k$, где F_j – голоморфные функции.

Это не случайно совпало с тем, что в 1930-е годы А. Картан и К. Ока начали решать недоступные многие годы “основные” проблемы многих комплексных переменных: вначале проблемы Кузена, а затем и проблему Леви (Ока). Решающую роль при этом сыграла интегральная формула Бергмана–Вейля, поскольку любая область голоморфности в $\mathbb{C}^n$ допускает аппроксимацию аналитическими полиэдрами.

В 1940-е годы появилась ещё одна замечательная интегральная формула – формула Мартинелли–Бохнера. Замечательным свойством классической формулы Коши является то, что она имеет явное ядро, которое универсально работает во всех областях. Ядро Мартинелли–Бохнера также явно и универсально. Оно упростило многие рассуждения, однако оно не является голоморфным по внешним переменным и это решительно уменьшает возможности для его применения.

В 1950-е годы теория Ока получила дальнейшее развитие в работах А. Картана и Г. Грауэрта, но одновременно, как писал Хенкин, они “полностью изгнали из многомерного комплексного анализа конструктивный метод интегральных представлений”. В 1960-е был развит новый подход к теории, основанный на априорных L^2 -оценках Морри–Кона–Хёрмандера.

Наконец, в 1956 г. Жан Лере предложил новый подход к многомерным аналогам формулы Коши. Он назвал свою формулу интегральной формулой Коши–Фанташье, которая, вероятно, была любимой формулой Хенкина. Конструкция поражает своей простотой и универсальностью. Введём обозначения:

$$\omega(\eta) = d\eta = \bigwedge_{j=1}^n d\eta_j, \quad \omega'(\xi) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \xi_j \bigwedge_{k \neq j} d\xi_k, \quad \langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j.$$

Центральное наблюдение заключается в том, что дифференциальная форма Коши–Лере (или Коши–Фанташье)

$$\Omega = \frac{\omega'(\xi) \wedge \omega(\eta)}{\langle \xi, \eta \rangle^n} = \omega' \left(\frac{\xi}{\langle \xi, \eta \rangle} \right) \wedge \omega(\eta)$$

является замкнутой там, где она имеет смысл.

Пусть D – область в $\mathbb{C}^n$ и u – функция, голоморфная в D и непрерывная вплоть до границы. Зафиксируем $z \in D$. Тогда для всех циклов вида $\gamma: \partial D \ni \zeta \mapsto \xi = P(\zeta, z)$, $\eta = \zeta - z$ интегрирование $\int_{\gamma} u(\zeta) \Omega$ будет давать один и тот же ответ. Цикл должен избегать особенностей формы, т. е. удовлетворять единственному условию: $\langle P(\zeta, z), \zeta - z \rangle \neq 0$, если $z \in D$ и $\zeta \in \partial D$. Например, $P(\zeta, z) = \bar{\zeta} - \bar{z}$ отвечает ядру

Мартинелли–Бохнера. Считая формулу Мартинелли–Бохнера

$$u(z) = c_n \int_{\partial D} u(\zeta) \frac{\omega'(\overline{\zeta - z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} \quad (1)$$

известной (она выводится так же, как одномерная интегральная формула Коши), мы получаем интегральную формулу Лере

$$u(z) = c_n \int_{\partial D} u(\zeta) \frac{\omega'(P(\zeta, z)) \wedge \omega(\zeta)}{\langle P(\zeta, z), \zeta - z \rangle^n}. \quad (2)$$

Здесь c_n зависит только от размерности n . Если функция $P(\zeta, z)$ голоморфна по z , то формула (2) имеет ядро, голоморфное по z . Можно рассматривать и более сложные циклы, которые не обязательно взаимно однозначно проектируются на границу области. Например, в случае полидиска получается цикл, лежащий только над существенной частью границы (произведением границ одномерных сомножителей), но слои проекции многомерны. Похожий цикл возникает в случае аналитического полиэдра и приводит к формуле Бергмана–Вейля.

Итак, в конструкции Лере различные формулы отвечают различным выборам циклов, избегающих особенностей формы. Этому условию не просто удовлетворить. Фактически Лере добавил лишь одну новую интегральную формулу с голоморфным ядром – для выпуклой области.

Пусть строго выпуклая область D с гладкой границей ∂D в $\mathbb{C}^n$ задается неравенством $\rho(z) < 0$. Для каждой $\zeta \in \partial D$ рассмотрим комплексную гиперплоскость

$$L_\zeta(z) = \langle \partial\rho(\zeta), \zeta - z \rangle = 0.$$

Она проходит через ζ , но не имеет общих точек с D (комплексная опорная гиперплоскость). Тогда функция $P(\zeta, z) = \partial\rho(\zeta)$ (не зависит от z !) задаёт цикл, подходящий для формулы Коши–Фантаппье. Условие вещественной выпуклости можно заменить на более слабое условие линейной комплексной выпуклости (в каждой точке границы имеется комплексная опорная гиперплоскость). В рассматриваемом случае интегральная формула имеет особенно простую структуру. Лере, следуя Фантаппье, интерпретировал её как возможность “разложить” любую функцию, голоморфную в D , по функциям $1/L(z)^n$, где $L(z) = 0$ задают опорные комплексные гиперплоскости к D . Если мы имеем функционал F на пространстве аналитических функций, то его можно характеризовать значениями на этих функциях. Можно более общо рассмотреть линейные функции, отвечающие гиперплоскостям, не пересекающим D . Их параметры образуют комплексную линейно выпуклую область D^* , которую естественно рассматривать как область в двойственном проективном пространстве, двойственную D . Функционал F определяет голоморфную функцию в двойственной области D^* , называемую индикатрисой Фантаппье. Эта аналитическая двойственность послужила для Мартино источником замечательных конструкций, к которым неоднократно обращался Хенкин в своих работах.

Первым большим (и, вероятно, наиболее известным) вкладом Г. М. Хенкина в интегральные формулы была конструкция интегральной формулы с голоморфным ядром для строго псевдовыпуклых областей (формула Хенкина–Рамиреса) [4]. Она продолжает идею аналитических барьеров, идущую к формуле Вейля, – аналитических гиперповерхностей, проходящих через точки границы и не пересекающих области. В случае выпуклых областей это опорные комплексные гиперплоскости. В случае строго псевдовыпуклых областей, согласно классическому наблюдению Е. Леви, в каждой точке границы локально существует барьер, задаваемый квадратичным полиномом (полином Леви). В линейно выпуклом случае линейный барьер автоматически является глобальным, но в общем случае это не так. Однако Хенкин [4] и Рамирес (1969) доказали возможность продолжить локальный квадратичный барьер Леви

до аналитического глобального. Продолжение не является явным, но для него дается равномерная оценка, открывающая замечательные возможности для приложений. Итак, удастся специализировать формулу Коши–Фантаппье для строго псевдовыпуклых областей, так что ядро голоморфно по внешнему переменному с точными оценками ядра.

Для Г. М. Хенкина эта замечательная формула была лишь стартом грандиозного проекта, который он блестяще реализовал вместе со своими учениками и соавторами. Мы отмечали, что в 1930–1960-е гг. сложились два различных успешных подхода к построению многомерного комплексного анализа: путь Ока–Картана и путь L^2 -оценок. Г. М. Хенкин решил развить третий путь: конструктивный многомерный комплексный анализ, полностью основанный на интегральных формулах (как одномерный комплексный анализ может быть построен на базе формулы Коши). Этот подход сулил огромные новые возможности, прежде всего, результаты с оценками. Более тридцати лет напряжённой работы подтвердили эти надежды. Г. М. Хенкин не оставил без разработки ни одну из возможностей: аналог формулы Коши–Грина, формулы в областях с негладкой границей, оценки для $\bar{\partial}$ -уравнения, уравнение Леви, интегральные формулы для старших когомологий и т. д. Мы рассмотрим ниже некоторые из этих результатов. Более полное описание и дальнейшие результаты читатель найдёт в книгах Г. М. Хенкина и Ю. Лайтерера [10], [14] и обзоре [11].

Прототипом интегральной формулы для $\bar{\partial}$ -уравнения является, конечно, одномерная формула Коши (точнее, Коши–Грина–Помпейю, как её называл Хенкин)

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{\bar{\partial} u \wedge d\zeta}{\zeta - z},$$

справедливая для любой гладкой ограниченной области D на комплексной плоскости и любой функции u , скажем, C^1 -гладкой на $\bar{D}$. Эта формула разбивает произвольную функцию u на две части: граничный интеграл, голоморфный в D , и второй член, зависящий только от $\bar{\partial} u$. Если функция u голоморфна, то второй член обращается в нуль и мы получаем классическую формулу Коши для представления u в терминах её граничных значений. Более того, поскольку первый член всегда голоморфен, заменяя $\bar{\partial} u$ на $(0, 1)$ -форму f во втором члене, мы также получаем явное решение

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{d\zeta \wedge f}{\zeta - z}$$

уравнения $\bar{\partial} v = f$.

Можно было ожидать, что описанный метод приведёт к результату и в многомерном случае. Это было проделано Г. М. Хенкиным в [5] для строго псевдовыпуклой области. Его рассуждение – примерно следующее. У нас есть два представления голоморфных функций: формула Мартинелли–Бохнера (1) и формула Лере (Хенкина–Рамиреса) (2). Аналогично одномерному случаю, формулу (1) можно записать в виде

$$u(z) = c_n \int_{\partial D} u(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} + a_n \int_D \bar{\partial} u(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}},$$

где u не обязательно голоморфна. Из (1) и (2) видно, что два граничных интеграла равны, когда u голоморфна, поэтому разумно ожидать, что их разность может быть представлена в виде интеграла, содержащего $\bar{\partial} u$ и не содержащего u . Г. М. Хенкин показал, что это действительно так, и записал указанную разность как интегральный оператор $T(\bar{\partial} u)$ по $\partial D \times [0, 1]$. В результате получаем

$$u(z) = c_n \int_{\partial D} u(\zeta) \frac{\omega'(P(\zeta, z) \wedge \omega(\zeta))}{\langle P(\zeta, z), \zeta - z \rangle^n} + a_n \int_D \bar{\partial} u(\zeta) \frac{\omega'(\bar{\zeta} - \bar{z}) \wedge \omega(\zeta)}{|\zeta - z|^{2n}} + T(\bar{\partial} u).$$

Поскольку первый член в правой части всегда голоморфен, сумма остальных двух членов даёт формулу для решения $\bar{\partial}$ -уравнения.

Поскольку формулы для решения – совершенно явные, всё готово для получения оценок. Г. М. Хенкин получает серию точных результатов, включая L^p -оценки для $1 \leq p \leq \infty$ и гёльдеровские оценки с показателем $1/2$, когда правая часть $\bar{\partial}$ -уравнения ограничена. Однако появляется дополнительная трудность. Формула для решения не всегда даёт оптимальную оценку. Эта проблема видна уже в одном переменном, где классический интеграл Коши, например, не удовлетворяет оптимальным L^1 -оценкам на границе. В работе [6] об уравнении Г. Леви Г. М. Хенкин преодолевает эту трудность.

Вместо сравнения представления Коши–Лере (2) с формулой Мартинелли–Бохнера (1), Г. М. Хенкин сравнивает его с другой формулой, полученной с помощью иного выбора функции P , в которой ζ и z меняются ролями. Полученная формула для решения $\bar{\partial}$ -уравнения, скажем, $u = R(f)$, имеет два преимущества перед предыдущей, которую Г. М. Хенкин называет предварительной. Во-первых, она даёт лучшие оценки. Во-вторых, она даёт граничные значения решения в терминах сужения правой части на границу. Г. М. Хенкин также обобщает этот метод на формы высокой степени и даёт анализ феномена Г. Леви о локальной неразрешимости уравнения с частными производными, которое соответствует $\bar{\partial}$ -проблеме на границе ($\bar{\partial}_b$ -проблеме) для правой части максимальной степени.

В частности, Г. М. Хенкин доказывает очень красивый результат: уравнение $\bar{\partial}u = f$ имеет решение u в $L^1(\partial D)$, когда $|f| + |\bar{\partial}\rho \wedge f|(-\rho)^{1/2}$ принадлежит $L^1(D)$ (здесь ρ – определяющая функция области, $d\rho \neq 0$ на границе). Этот результат был независимо получен А. Скойдой (1976) и был использован Скойдой и Хенкиным для характеристики нулей функций класса Неванлинны для строго псевдовыпуклой ограниченной гладкой области. (Это обобщает классический результат Неванлинны в одном переменном.) Метод доказательства Хенкина основан на дуальности. Он использует свой оператор $v = R(h)$, чтобы построить $\bar{\partial}$ -замкнутое продолжение H формы h на границе как $H = \bar{\partial}\tilde{R}(h)$, где $\tilde{R}(h)$ – тщательно выбранное продолжение $R(h)$ внутрь области. Особенно интересен случай, когда h имеет бистепень $(n, n-1)$. Причина этого в том, что функция u на границе является граничным значением решения уравнения $\bar{\partial}u = f$ в точности тогда, когда

$$\int_{\partial D} u \wedge h = \int_D f \wedge h$$

для всех $\bar{\partial}$ -замкнутых $(n, n-1)$ -форм h . Здесь можно заменить форму h в правой части на любое продолжение её граничных значений, например на $H = \bar{\partial}\tilde{R}(h)$, и тогда проблема сводится к оценке H в терминах h . Опять же, оператор R и его продолжение играют решающую роль.

Применения интегральных формул.

Теория $\bar{\partial}_b$ -уравнения. Статья Г. М. Хенкина [6] о разрешимости и оценках решений уравнения $\bar{\partial}_b u = f$, которое называется также *касательным уравнением Коши–Ри-мана* или уравнением Леви–Кона, является значительным вкладом в комплексный анализ. В этой статье Г. М. Хенкин подытожил ранее полученные свои собственные результаты и результаты ведущих специалистов (Дж. Кон, И. Стейн, Дж. Фолланд) в области комплексного анализа о существовании и оценках решений $\bar{\partial}_b$ -уравнения и получил значительные новые результаты. Объединяющим подходом в статье стал метод интегральных формул. Новые интегральные формулы, введённые в статье, использовали ядра, комбинирующие голоморфные и антиголоморфные барьерные функции на границе строго псевдовыпуклой области. В результате значительно упростилось, в частности, изложение точных оценок, полученных ранее Дж. Фолландом и И. Стейном для так называемых “решений Кона” с помощью метода параметрикса и специальных функциональных пространств. Новые формулы также позволили

Г. М. Хенкину получить несколько новых результатов: 1) обобщение на произвольные строго псевдовыпуклые области необходимого и достаточного условия разрешимости $\bar{\partial}_b$ -уравнения в терминах индикатрисы Фантаппье; 2) явные формулы для локальных решений этого уравнения; 3) необходимое и достаточное условие для продолжения $\bar{\partial}_b$ -замкнутой формы до $\bar{\partial}$ -замкнутой формы на D ; 4) необходимое и достаточное условие (с точностью до когомологических условий) для того, чтобы дивизор в строго псевдовыпуклом многообразии был множеством нулей функции из класса Неванлинны–Островского.

Развивая методы работы [6], Г. М. Хенкин исследовал $\bar{\partial}_b$ -уравнение на вещественных многообразиях произвольной коразмерности в комплексном пространстве. Такие многообразия, для которых размерность комплексного касательного пространства не зависит от точки, называются CR-многообразиями, а соответствующее комплексное касательное расслоение называется CR-структурой. Геометрия CR-многообразий восходит к А. Пуанкаре и Э. Картану. С точки зрения анализа CR-структура на многообразии характеризуется касательным оператором Коши–Римана $\bar{\partial}_b$. Функции и формы u , удовлетворяющие однородному уравнению $\bar{\partial}_b u = 0$, называются соответственно CR-функциями и CR-формами. Теория CR-функций и CR-форм играет важную роль в исследовании граничных свойств голоморфных функций и аналитических множеств, теории гиперфункций, общей теории уравнений с частными производными. Классический пример Г. Леви неразрешимого линейного уравнения возник как неоднородное $\bar{\partial}_b$ -уравнение на сфере в $\mathbb{C}^2$.

В серии работ (1980–1985) в сотрудничестве с Р. А. Айрапетяном (см. [11] и приведённые там ссылки) Г. М. Хенкин получил замечательные результаты об интегральных представлениях CR-функций и CR-форм, об их голоморфном ($\bar{\partial}$ -замкнутом) продолжении, существовании, единственности и аппроксимации. Среди них – следующее далеко идущее обобщение классических теорем Боголюбова об “острие клина” и Бернштейна о сепаратной аналитичности: если CR-многообразие M является общим краем нескольких CR-многообразий M_j так, что их касательные пространства в точках M порождают объёмлющее пространство, то все CR-функции на $\bigcup M_j$ голоморфно продолжаются в один и тот же клин, касательный конус которого порождён касательными полупространствами к M_j .

Интерполяция в аналитическом полиэдре. В статье [17] Г. М. Хенкин и П. Л. Поляков рассмотрели задачу продолжения голоморфных ограниченных функций с аналитического подмногообразия в аналитическом полиэдре до ограниченной голоморфной функции на всём полиэдре. Задача имеет классические корни, уходящие к работам А. Вейля, К. Ока и А. Картана, и послужила одним из оснований теории когерентных аналитических пучков. Однако, как было отмечено Г. М. Хенкиным в [17], впоследствии “конструктивные элементы в теоремах Ока–Картана исчезли”. В 1960-е годы снова возник интерес к конструктивным методам, мотивированный задачами:

- 1) ограниченной интерполяции голоморфных функций и
- 2) поиска ограниченных решений $\bar{\partial}$ -уравнения.

Для решения задачи интерполяции понадобились два дополнительных ингредиента: (i) применение весовых интегральных формул, аналогичных впервые введенным Ш. А. Даутовым и Г. М. Хенкиным в их работе 1978 г., и (ii) рассмотрение $\bar{\partial}$ -замкнутых вычетных потоков, впоследствии приведшее к важным приложениям интегральных формул к аналитическим пространствам с особенностями (см. ниже).

Комплексное преобразование Радона. В статье Г. М. Хенкина и П. Л. Полякова [12] были впервые построены и применены интегральные формулы гомотопии для оператора $\bar{\partial}$ на областях в комплексном проективном пространстве $\mathbb{CP}^n$. Статья была мотивирована несколькими источниками. Непосредственной мотивировкой была важная статья С. Г. Гиндикина и Г. М. Хенкина [8], а более отдаленной мотивировкой были статья И. М. Гельфанда, С. Г. Гиндикина и М. И. Граева (1980) и статья

Р. Пенроуза [38]. Идея Хенкина состояла в попытке связать формулу обращения преобразования Радона с подходящей формулой гомотопии для оператора $\bar{\partial}$. Это было сделано с помощью новых интегральных формул на (p, q) -выпукло/вогнутых областях в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Главным результатом статьи [12] является формула для гладких $\bar{\partial}$ -замкнутых $(0, q)$ -форм f отрицательной однородности на q -линейно вогнутой области в $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$:

$$f = \bar{\partial}I_q(f) + G \circ R(f), \quad (3)$$

где R – это комплексное преобразование Радона, G – “обратный” оператор и I_q – оператор решения для $\bar{\partial}$ -уравнения.

В последующей статье (*Math. Ann.*, 1990, v. 286) Г.М. Хенкин и П.Л. Поляков обобщили формулу (3) из [12] на случай не обязательно $\bar{\partial}$ -замкнутых форм. В специальном примере

$$D = \{\zeta \in \mathbb{C}\mathbb{P}^3: -|\zeta_0|^2 - |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 + |\zeta_3|^2 < 0\}$$

это позволило обобщить результаты М. Атьи и Р. Пенроуза (1981) о твисторной интерпретации функции Грина для уравнения Лапласа.

$\bar{\partial}$ -уравнение и преобразование Радона на аналитических пространствах.

• Небольшая заметка Г.М. Хенкина и П.Л. Полякова в “Докладах Французской академии наук” (1989) представляет интересное направление в теории $\bar{\partial}$ -уравнения, а именно рассмотрение этого уравнения на аналитических множествах с особенностями. Эта тема заинтересовала многих специалистов по комплексному анализу и была развита в последующих работах Хенкина и Полякова [27], [31]. В этой заметке было доказано существование локального решения $\bar{\partial}$ -уравнения, гладкого в дополнении к множеству особенностей полного пересечения, для правой части, гладкой в некоторой окрестности особой точки и $\bar{\partial}$ -замкнутой в регулярной части. Особый интерес в этой заметке представляют два обстоятельства: преимущество применения интегральных формул по сравнению с L^2 -теорией и использование новой в то время техники вычетных потоков Н. Колеффа и М. Эрреры.

• Целью статьи Г.М. Хенкина и П.Л. Полякова [27] было доказательство аналога главной теоремы из [22] для аналитических пространств с особенностями, что позволило бы распространить этот результат на более общие системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В статье [27] результат из [22] был распространён на локально полные пересечения. Наиболее важной новинкой было рассмотрение вычетных потоков и их когомологий. Эти понятия основаны, с одной стороны, на работах А. Гротендика и Р. Хартшорна и, с другой стороны, на работе Н. Колеффа и М. Эрреры о вычетных потоках. Главный результат статьи описывает образ и ядро преобразования Радона для локально полного пересечения $V = \{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n: P_1(z) = \dots = P_r(z) = 0\}$. Для случая связного V образом преобразования Радона оказываются дифференциалы голоморфных функций g , удовлетворяющих системе уравнений

$$P_k\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)g = 0, \quad 1 \leq k \leq r. \quad (4)$$

Этот результат может быть интерпретирован как версия “фундаментального принципа” Эйлера–Эренпрайса–Мальгранжа–Паламодова в терминах комплексного преобразования Радона вместо преобразования Фурье–Лапласа.

В последующей статье (*Труды МИАН*, 2012, т. 279) Г.М. Хенкин и П.Л. Поляков развили тему статьи [27] и доказали явную версию аналога фундаментального принципа для систем уравнений с граничными условиями, основанную на преобразовании Радона. В этой статье формула обращения получена из явной формулы типа

Коши–Фантаппье–Лере для решений системы уравнений типа (4) с граничными условиями, заданными на инфинитезимальной окрестности специального подмножества границы двойственной области D^* .

• В статье [31] Г. М. Хенкин и П. Л. Поляков построили явный аналог разложения Ходжа на приведенном проективном полном пересечении, который является новым даже для римановых поверхностей в $\mathbb{CP}^2$. А именно, на приведенном полном пересечении были построены явные интегральные операторы I_q для $q = 1, \dots, n - m$ и L_{n-m} на пространствах $\bar{\partial}$ -замкнутых вычетных потоков на V такие, что для произвольного вычетного потока $\phi^{(0,q)}$ выполняется равенство

$$\phi = \bar{\partial}I_q[\phi] + L_q[\phi]. \quad (5)$$

При этом: 1) конечномерный оператор L_q равен нулю для $q = 1, \dots, n - m - 1$, и 2) $\bar{\partial}$ -замкнутый вычетный поток $\phi^{(0,n-m)}$ является точным (т. е. существует поток ψ , удовлетворяющий $\bar{\partial}\psi = \phi$) тогда и только тогда, когда $L_{n-m}[\phi] = 0$.

Одно из преимуществ разложения (5) по сравнению с обычным L^2 -разложением Ходжа заключается в том, что оно устраняет недостаток, отмеченный Ф. Гриффитсом и Дж. Харрисом в их учебнике по алгебраической геометрии (см. § 0.6). Они отметили, что метод гильбертовых пространств имеет тот недостаток, что он не даёт представления оператора Грина в виде интегрального оператора с “красивым ядром” на $M \times M$ с некоторыми особенностями на диагонали.

Работы о псевдогонутых многообразиях. В анализе голоморфных функций и дифференциальных форм многих комплексных переменных выпуклость области определения играет центральную роль. Большинство работ в комплексном анализе многих переменных сконцентрировано на псевдовыпуклых областях, но Г. М. Хенкин имел особый интерес к теории функций на псевдогонутых областях, точнее, на q -выпуклых и q -вогнутых многообразиях. С точки зрения теории интегральных представлений, которую Г. М. Хенкин всегда предпочитал, эта теория естественно и детально представлена в его монографии [14], написанной совместно с Ю. Лайтером.

Вложение трехмерных CR-многообразий. Г. М. Хенкин и Ч. Л. Эпштейн занимались задачей существования вложений абстрактных трехмерных строго псевдовыпуклых CR-многообразий. Если $(M, T^{0,1}M)$ является таким многообразием, то оно вложимо как CR-подмногообразие комплексного пространства $\mathbb{C}^N$ для некоторого N , если нуль-пространство оператора $\bar{\partial}_b$ содержит достаточное количество функций. Это утверждение эквивалентно требованию к $(M, T^{0,1}M)$ быть (псевдовыпуклой) границей нормального пространства Штейна X или требованию о замкнутости образа оператора $\bar{\partial}_b$ в $L^2(M)$. С ранних 1960-х было известно, что произвольные деформации CR-структуры на M приводят к CR-структурам, не допускающим вложения. Действительно, множество вложимых деформаций имеет бесконечную размерность и бесконечную коразмерность в пространстве произвольных деформаций. Задача описания пространства вложимых деформаций в течение длительного времени привлекала значительный интерес. Развивая результаты Бёрнса и Эпштейна (1990) и Лемперта (1992, 1994) о “положительных деформациях” CR-структуры на сфере в $\mathbb{C}^2$, а также результат Лемперта о реализации вложимого компактного CR-многообразия как разделяющей гиперплоскости в проективном аналитическом множестве, Хенкин и Эпштейн (1997) рассмотрели случай произвольного псевдогогнутого многообразия X_- с трехмерной границей M . В этом, существенно более общем случае авторам пришлось преодолеть значительные технические трудности. В частности, в общем случае препятствие к продолжению деформации CR-структуры с M на X_- описывается конечномерной группой когомологий $H_c^2(X_-, \Theta)$, где Θ – пучок ростков голоморфных векторных полей на X_- . Авторы обобщили теорему Киремиджана, чтобы охватить

тот случай, когда эта группа когомологий нетривиальна, и заменили использование теоремы Нэша–Мозера о неявной функции в шкале банаховых пространств теоремой о неявной функции в одном специально подобранном банаховом пространстве. Продолженная почти комплексная структура не всегда интегрируема, однако постановка задачи в банаховом пространстве позволила им доказать, что эта структура аналитически зависит от граничной деформации CR-структуры. Более того, продолженная структура является комплексной структурой на X_- для подмножества деформаций коразмерности не более $\dim H_c^2(X_-, \Theta)$.

Псевдогогнутые поверхности. Хенкин и Эпштейн [24] также рассмотрели задачу вложения псевдогогнутой поверхности X_- , содержащей положительный дивизор Z , в проективное пространство. Эта задача очевидно связана, с одной стороны, с задачей о вложимости трехмерных CR-многообразий как границ псевдогогнутых поверхностей, а с другой – с работами Андреотти (1963) и Андреотти и Томассини (1970) о вложении псевдогогнутых многообразий. Хенкин и Эпштейн [24] рассмотрели “ростковую” версию задачи о вложении трехмерных CR-многообразий. А именно, они рассмотрели множество ростков комплексных поверхностей U , которые содержат заданную риманову поверхность $\Sigma \hookrightarrow U$ с нормальным расслоением $N\Sigma$, изоморфным фиксированному положительному расслоению L . Авторы показали, что с точностью до естественной эквивалентности подмножество ростков, которые могут быть реализованы как открытые подмножества в проективном многообразии, является конечномерным. Этот результат близко связан с критерием Накаи–Мойшензона, гарантирующим обильность дивизора определяемого римановой поверхностью Σ . Авторы также показали, что если Z и N_Z удовлетворяют некоторым гомологическим условиям, то множество малых вложимых деформаций CR-структуры на bX_- также замкнуто в C^∞ -топологии. Впоследствии Эпштейн (2012) доказал, что множество вложимых деформаций вложимого, трехмерного, строго псевдогогнутого CR-многообразия всегда замкнуто, однако результат статьи [24] был первым, в котором это утверждение было доказано без требования стабильности всей алгебры CR-функций при деформациях.

Обратные задачи. Серия работ Хенкина, опубликованных в 1984–2016 гг., вносит важный вклад в обратные задачи математической физики (около двадцати работ).

В частности, работы этой серии посвящены многомерным обратным задачам квантового и акустического рассеяния (см. [13]), методу обратной задачи рассеяния для уравнения Кортевега–де Фриза и для уравнений типа Янга–Миллса (см. [9], [16]), обратным задачам для уравнений Штурма–Лиувилля и обратным задачам геофизики (см. [9], [19], [21], [23]), геометрическим обратным задачам для римановых поверхностей и обратной задаче электрической проводимости на поверхностях в $\mathbb{R}^3$ (см. [25], [28]), и, наконец, одной из обратных задач космологии (см. [30]).

При этом работа [13] (совместная с Р. Г. Новиковым), опубликованная в 1987 г., оказала большое влияние на дальнейшие исследования по многомерным обратным задачам рассеяния. Результаты работы [13] включают полный синтез идей Фаддеева по обратной задаче рассеяния для многомерного уравнения Шрёдингера

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 2$$

(см. работу Л. Д. Фаддеева [32]), $\bar{\partial}$ -метода из теории солитонов и методов современного комплексного анализа.

Результаты работы [13] также включают, в частности, следующие важные конкретные результаты.

- *Решение проблемы о вещественных (ненулевых) исключительных точках для интегрального уравнения Липпманна–Швингера–Фаддеева.* Эта проблема Фаддеева,

оставшаяся открытой начиная с 1965 г., была решена в [13] неожиданным результатом, что вещественные (ненулевые) исключительные точки обязательно существуют для потенциалов с отрицательными собственными значениями.

• Следующий аналог при фиксированной энергии формулы Борна при высоких энергиях для уравнения Шрёдингера с короткодействующим потенциалом:

$$\hat{v}(p) = \lim_{\substack{k, l \in \mathbb{C}^d, k^2 = l^2 = E, k - l = p \\ |\operatorname{Im} k| = |\operatorname{Im} l| \rightarrow \infty}} h(k, l), \quad p \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 3, \quad (6)$$

где $\hat{v}$ – преобразование Фурье потенциала v , h – продолжение Фаддеева амплитуды рассеяния f в комплексную область, E – фиксированная энергия. В настоящее время формула (6) является одним из ключевых теоретических результатов в монохроматических обратных задачах квантового и акустического рассеяния и в электрической импедансной томографии в размерности $d \geq 3$.

• *Глобальная теорема единственности:* в размерности $d \geq 2$ амплитуда рассеяния f , заданная в окрестности фиксированной положительной энергии E для уравнения Шрёдингера с короткодействующим потенциалом v , однозначно определяет преобразование Фурье $\hat{v}$ (от v) в шаре радиуса $2\sqrt{E}$ (и с центром в нуле).

Результаты работы [13] также включают принципиальный прогресс в характеристизации переопределённых данных рассеяния для многомерного уравнения Шрёдингера. Фактически в [13] была реализована программа, сформулированная Л. Д. Фаддеевым в вышеупомянутой работе по многомерной обратной задаче рассеяния.

При этом исследования по многомерной обратной задаче рассеяния, с одной стороны (см. [13]), и по преобразованию Радона–Пенроуза – с другой (см. [7], [8], [11]), были продолжены в работе [16] (совместной с Р. Г. Новиковым). Результаты работы [16] включают полный синтез идей многомерного обратного рассеяния для уравнения Шрёдингера, теории преобразования Радона–Пенроуза и метода обратной задачи рассеяния для уравнений типа Янга–Миллса.

Цикл работ Г. М. Хенкина по обратным задачам был мотивирован, в первую очередь, реальными задачами геофизики, состоящими в восстановлении параметров упругости сферически симметричной или горизонтально однородной среды по данным виброзондирования на поверхности (около восьми работ, опубликованных в 1987–2000 гг.). Эти работы были стимулированы, в частности, сотрудничеством с В. М. Маркушевичем, работавшим в области геофизики. На математическом уровне эти работы посвящены некоторым нестандартным обратным задачам для уравнений Штурма–Лиувилля на полуоси.

В частности, работа [23] (совместная с Н. Н. Новиковой) является важным примером строгой математической работы, развивающей эффективный численный алгоритм для восстановления распределений плотности и сжимаемости горизонтально однородного жидкого полупространства по волновым числам и амплитудам поверхностных волн, возбуждаемых монохроматическими источниками с достаточно большими, но фиксированными частотами ω_1 и ω_2 .

Кроме того, работа [23] сильно стимулировала современные математические исследования по приближенным, но эффективным алгоритмам для решения монохроматических обратных задач рассеяния в многомерном случае (см. [37]).

С другой стороны, цикл недавних работ Г. М. Хенкина (2007–2015) внёс фундаментальный вклад в геометрические обратные задачи для римановых поверхностей и в обратную задачу электрической проводимости на поверхностях в $\mathbb{R}^3$. Эти исследования являются продолжением совместных работ Г. М. Хенкина с П. Дольбо 1994 и 1997 гг. о голоморфных цепях с заданной границей в $\mathbb{CP}^n$.

В частности, результаты работы [25] (совместной с В. Мишелем) включают обратную версию для компактного случая электростатической теоремы Римана–Клейна

на поверхностях в $\mathbb{R}^3$ и дают конструктивный ответ на вопрос Вентворта: как восстанавливается конформная структура компактной римановой поверхности по данным типа Дирихле–Неймана для некоторой подобласти?

О проблеме Коши–Гельфанда. Актуальной проблемой, волнующей экономистов, является моделирование научно-технического прогресса. Вместе с В. М. Полтеровичем Геннадий Маркович предложил математическую модель шумпетерианской динамики распространения новых технологий [15], [20]. Модель позволила формализовать такие понятия, как скорость распространения новых технологий и многоукладность экономики, и привела к задачам об асимптотике по времени решений задачи Коши для дифференциально-разностных аналогов квазилинейных уравнений,

$$\frac{df(x, t)}{dt} = -\phi(f(x, t)) \frac{f(x, t) - f(x - h, t)}{h}, \quad (7)$$

с начальными условиями

$$f(x, 0) = f^0(x), \quad (8)$$

где $f^0(x)$ – непрерывная функция такая, что

$$f^0(x) = \alpha^\pm, \quad \pm x \geq \pm x^\pm, \quad \alpha^- < \alpha^+, \quad x^- < x^+.$$

Уравнение (7) является разностным аналогом закона сохранения (или уравнения типа Римана)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \phi(f) \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Вопрос об асимптотике по времени решений задачи Коши (7), (8) или задачи (8), (9) возникает в газовой динамике, модели расширяющейся вселенной Зельдовича, моделях транспортных потоков и моделях шумпетерианской динамики распространения новых технологий. Осознавая значение математических конструкций для понимания явлений в окружающем мире, Геннадий Маркович не жалел сил для их изучения. Мотивированный моделями шумпетерианской динамики, он посвятил цикл работ оценкам исчезающей вязкости для закона сохранения (9) и уравнений типа Бюргерса.

Отталкиваясь от проблем газовой динамики, И. М. Гельфанд [33] сформулировал следующую задачу: найти асимптотику решения $f(x, t)$ задачи Коши (8), (9) при $t \rightarrow \infty$. В работе [33] найдено решение этой задачи при специальных начальных условиях:

$$f(x, 0) = \alpha^\pm, \quad \alpha^- < \alpha^+, \quad \text{если } \pm(x - x_0) \geq 0.$$

Этот результат Гельфанда дает объяснение наблюдающемуся при мощных взрывах каскаду волн разрежения и ударных волн.

Однако в других приложениях (например, при моделировании транспортных потоков или шумпетерианской динамики распространения новых технологий) предположение о начальных условиях в виде скачка является ограничительным. В работе С. Н. Кружкова и Н. С. Петросян (1987) был предложен алгоритм построения асимптотики по времени решения задачи Коши (9) с монотонными начальными условиями (8). Эта работа основана на анализе формулы Хопфа для решения задачи Коши и существенно опирается на предположение о монотонности начальных условий (8). Геннадий Маркович в цикле работ, опубликованных в 2004–2014 гг., разрабатывал альтернативную технику оценок решений исчезающей вязкости (см. [29] и приведенные там ссылки). На её основе в [30] построена полная система инвариантов, сохраняющихся на решениях задачи Коши (8), (9). Эта система инвариантов позволяет не только определять по начальным условиям асимптотику, но и решать обратную задачу об определении характеристик начального условия по асимптотике решения задачи Коши. Задача такого типа возникает в астрофизике в рамках модели эволюции Вселенной Зельдовича: по наблюдаемому распределению масс во Вселенной охарактеризовать флуктуации масс в ранней Вселенной.

Шумпетерианская динамика и уравнения математической физики. Геннадий Маркович считал, что математический язык является наиболее адекватным средством понимания явлений, происходящих в окружающем мире, и много сил отдавал его развитию. Среди приложений, которыми он интересовался, важное место занимало математическое моделирование экономики.

Вслед за Йозефом Шумпетером современные исследователи экономической динамики рассматривают важнейшую компоненту развития – совершенствование технологий – как совокупность двух процессов: создания новых технологий и заимствования (имитации) уже известных. Первый процесс характерен для передовых фирм, хотя и они прибегают к заимствованиям, а второй реализует “преимущество отсталости” по А. Гершенкрону: возможность использовать в производстве результаты, полученные ранее более передовыми предприятиями.

При моделировании шумпетерианской динамики процесс технологического развития в производственной системе на макроуровне описывают как эволюцию распределения предприятий по уровням эффективности. Под эффективностью в данном контексте обычно понимают коэффициент общей факторной производительности, определяемый в результате эконометрического оценивания производственных функций фирм. Недавние расчеты, проведенные на основе данных о более чем 17 тысячах французских фирм за период 1995–2003 гг., показали, что распределение фирм по эффективности обладает замечательными свойствами: его “хвосты” близки к распределениям Парето; распределение движется в направлении роста эффективности с почти постоянной скоростью, причем его форма меняется слабо. Последнее свойство означает, что распределение фирм по эффективности ведет себя как бегущая волна в уравнениях математической физики (см. Кёниг и др. (2016)).

Эта аналогия между технологическим развитием и волновыми процессами в сплошных средах была, видимо, впервые продемонстрирована в статье [15], где для описания шумпетерианской динамики было предложено следующее дифференциально-разностное уравнение:

$$\frac{dF_n}{dt} = \phi(F_n)(F_{n-1} - F_n); \quad (10)$$

здесь F_n – доля фирм с уровнем эффективности, не превосходящим n . Основные результаты цитируемой статьи относились к специальному случаю

$$\phi(F_n) = \alpha + \beta(1 - F_n). \quad (11)$$

Как легко видеть, уравнение (10), (11) согласуется с предположением о том, что доля фирм $f_n = F_n - F_{n-1}$ переходит с уровня n на уровень $n + 1$ со скоростью αf_n в результате инновационного процесса и со скоростью $\beta(1 - F_n)f_n$ в результате имитации. Имитация, таким образом, происходит тем быстрее, чем большее число фирм освоили более эффективные технологии. Уравнение (10), (11) при естественных начальных условиях допускает явное решение, которое, как было показано в цитированной выше работе В. М. Полтеровича и Г. М. Хенкина [15], сходится к волне, логистическому распределению, движущемуся с постоянной скоростью. В этой же работе было указано, что сходимости к волне имеет место и для уравнения (10) с положительной непрерывной монотонно убывающей функцией ϕ , и отмечено, что это уравнение является аналогом уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \phi(F) \frac{\partial F}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \mu > 0, \quad (12)$$

где $F(x, t)$ – распределение фирм по эффективности x .

В дальнейшем уравнение (10) и его модификации исследовались в ряде работ Г. М. Хенкина и В. М. Полтеровича (1989–1998), Г. М. Хенкина и А. А. Шананина

(2004–2016), Г. М. Хенкина (2007, 2012), В. З. Беленького (1990, 2007, 2015), А. В. Гасникова (2008, 2009), А. А. Шананина и Я. М. Ташлицкой (2000) и других. Соответствующие ссылки можно найти в статье [26]. В этой работе Г. М. Хенкин представил наиболее общие результаты исследования уравнения (10), включая случай немонотонной функции ϕ . В данном случае (10) допускает существование многих волн, движущихся с разными постоянными скоростями. Между ними образуются участки диффузии. К этой системе волн сходится решение с достаточно произвольными начальными условиями. Отыскание асимптотической оценки для “границы” между волной и диффузией оказалось весьма трудной задачей и стимулировало развитие оценок метода исчезающей вязкости (Хенкин–Шананин (2004); Хенкин–Шананин–Туманов (2005), Хенкин (2007)). В работе [26] Геннадий Маркович дал её наиболее полное решение. Одновременно аналогичная задача была решена им и для уравнения Бюргерса (12).

Заслуживает упоминания модификация модели (10), (11), предложенная в работе В. М. Полтеровича и Г. М. Хенкина [15] и учитывающая возможность деградации фирм – перехода с уровня $n + 1$ на уровень n в результате износа мощностей. Этот вариант модели неплохо аппроксимировал реальные данные, описывавшие эволюцию распределения предприятий чёрной металлургии по уровням рентабельности (это альтернативный показатель эффективности) в 1976–1982 гг. (Гельман и др., 1993).

Вопрос о том, как именно фирмы принимают решения об усовершенствовании технологий, мало изучен. Ряд обсуждаемых механизмов отличаются предположениями о числе уровней эффективности, которые фирма может преодолеть в единицу времени, и о совокупностях более передовых фирм, которые влияют на её решения, касающиеся заимствования технологий. Некоторые рассмотренные в литературе варианты являются частными случаями следующего уравнения:

$$\frac{df_n}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} \phi_k^n(F_k, f_n, t) f_k - \sum_{k=n}^{\infty} \phi_k^n(F_n, f_k, t) f_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad f_0 = 0, \quad (13)$$

где $f_k = F_k - F_{k-1} = f_k(t)$ – доля фирм, уровень эффективности которых в момент t равен k , а $\phi_k^n(F_k, f_n, t)$ – доля фирм уровня k , переходящих в момент t на уровень n в единицу времени (темп перехода). Первый аргумент функции может, в частности, отражать гипотезу о том, что скорость перехода возрастает с увеличением доли $1 - F_k$ более эффективных фирм.

Пусть переход возможен только на один шаг и фирмы ориентируются на суммарное количество впереди идущих:

$$\begin{aligned} \frac{dF_n}{dt} &= \phi(F_n)(F_{n-1} - F_n); & \phi_k^n(F_k, f_n, t) &= 0, \quad k \neq n-1; \\ \phi_{n-1}^n(F_{n-1}, f_n, t) &= \phi(F_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогда из (13) получаем:

$$\frac{df_n}{dt} = \phi(F_{n-1})f_{n-1} - \phi(F_n)f_n, \quad f_0 = 0,$$

что после суммирования дает (10).

Пусть теперь в единицу времени доля βf_n из числа фирм уровня $k < n$ переходит на уровень n благодаря встречам с фирмами f_n и заимствованию их технологии, а доля α фирм f_{n-1} попадает на уровень n в результате инноваций:

$$\begin{aligned} \phi_k^n(F_k, f_n, t) &= \beta f_n, \quad k < n-1; & \phi_k^n(F_k, f_n, t) &= 0, \quad k \geq n; \\ \phi_{n-1}^n(F_{n-1}, f_n, t) &= \alpha + \beta f_n. \end{aligned}$$

Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned}\frac{df_n}{dt} &= -\alpha f_n + \alpha f_{n-1} - \beta(1 - F_n)f_n + \beta F_{n-1}f_n, \\ \frac{dF_n}{dt} &= -\alpha(F_n - F_{n-1}) - \beta(1 - F_n)F_n.\end{aligned}\tag{14}$$

Уравнение (14) – дифференциально-разностный аналог уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. В качестве возможной модели шумпетерианской динамики оно было предложено Полтеровичем и Хенкиным [15] и исследовано в цитированной выше работе Кёнига и др. (2016).

В статье Р. Лукаса и Б. Молла [36] для описания шумпетерианской динамики использован дифференциально-разностный аналог уравнения Больцмана, являющийся другим важным частным случаем уравнения (13).

Большое число появившихся в последнее время работ по моделированию шумпетерианской динамики (Луттмер (2012), Кёниг и др. (2016), Хонглер и др. (2016)) и важность результатов позволяют предположить, что в скором времени эти модели, в становление которых Г. М. Хенкин внес существенный вклад, составят основу макроэкономической теории роста.

Теоремы Бернштейна, характеристика преобразования Радона по неполным данным и их приложения в моделировании производства. Одной из базовых конструкций, использованных в XX в. для анализа экономических процессов, была модель межотраслевого баланса В. В. Леонтьева, основанная на гипотезе о постоянстве производственных затрат. Однако процессы глобализации, происходящие в мировой экономике начиная с последних десятилетий XX в., потребовали модификации этой модели и учёта замещения производственных факторов. В середине XX в. Хаутеккером (1955) и Йохансеном (1972) была предложена модель, в которой производство продукции осуществлялось с использованием технологий, требующих затрат производственных факторов в различных пропорциях. В модели предполагалось, что использование технологий ограничено их мощностями, а замещение производственных факторов моделировалось как результат изменения загрузки мощностей при изменении экономической конъюнктуры. Ключевым понятием модели являлось распределение мощностей по технологиям с формальной точки зрения – неотрицательная мера, с носителем в $\mathbb{R}_+^n$.

В модели Хаутеккера–Йохансена информация о распределении мощностей по технологиям позволяет построить основные макроописания производства, такие как производственная функция, функции спроса и предложения, прибыли. Вопрос о корректности определения распределения мощностей по технологиям сводится к исследованию интегрального оператора

$$\Pi(p, p_0) = \int_{\mathbb{R}_+^n} (p_0 - px)_+ \mu(dx)\tag{15}$$

(см. работу А. А. Шананина [39]). Здесь $p_0 \geq 0$ и $p = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$ – цены на выпускаемую продукцию и производственные факторы соответственно, $\Pi(p, p_0)$ – функция прибыли, $\mu(dx)$ – распределение мощностей по технологиям. Интегральный оператор (15) тесно связан с преобразованием Радона, поскольку

$$\frac{\partial^2 \Pi(p, p_0)}{\partial p_0^2} = \int_{px=p_0} \mu(dx),$$

а значит, и с классическими преобразованиями Фурье–Лапласа и Коши–Фантаппье. Например,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-sx} \mu(dx) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d\tau \left(\frac{\partial \Pi(s, \tau)}{\partial \tau} \right).$$

Это позволяет исследовать вопрос об обратимости, характеристизации образа и формулах обращения для интегрального оператора (15). Образ преобразования Лапласа неотрицательных мер с носителем в неотрицательном ортанте описывается в теореме Бернштейна о вполне монотонных функциях. С помощью этой теоремы удалось проанализировать вопрос об универсальности модели Хаутеккера–Йохансена, т.е. о возможности описать поведение на макроуровне группы отраслей моделью Хаутеккера–Йохансена одной агрегированной отрасли. Удалось также обнаружить эффект нарушения условий характеристизации вполне монотонных функций, интерпретируемый с содержательной точки зрения как перестройка технологической структуры в результате существенного изменения связей между производителями из-за изменения пропорций между ценами на различные виды первичных ресурсов. Подобные изменения связей между поставщиками обычно реализуются как экономический кризис; например, так можно объяснить технологические сдвиги, произошедшие в результате энергетического кризиса 70-х годов XX в.

Геннадий Маркович заметил, что условия многомерного варианта теоремы Бернштейна о вполне монотонных функциях допускают локализацию на основе использования теоремы Бернштейна о сепаратной аналитичности в варианте Корева–Вигеринка. Это замечание позволило получить следующий результат [18].

ТЕОРЕМА О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ. *Функция $\Pi(p, p_0)$ представима в виде*

$$\Pi(p, p_0) = \int_{\mathbb{R}_+^n} (p_0 - px)_+ \mu(dx) \quad \text{при } (p, p_0) \in \mathbb{R}_+^{n+1},$$

где $\mu(dx)$ – неотрицательная мера с носителем в $\mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-A\|x\|} |\mu|(dx) < \infty \quad \text{для некоторого } A > 0,$$

тогда и только тогда, когда

- (i) $\Pi(p, p_0)$ – положительно однородная, выпуклая функция на $\mathbb{R}_+^n$, причем при фиксированном $p \in \mathbb{R}_+^n$ мера $\partial^2 \Pi(p, \tau) / \partial \tau^2$ экспоненциально убывает при $\tau \rightarrow \infty$;
- (ii) функция

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d\tau \left(\frac{\partial \Pi(s, \tau)}{\partial \tau} \right)$$

принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ и для некоторого открытого конуса $\Gamma \subset \text{int } \mathbb{R}_+^n$ и некоторого $s \in \Gamma$ при любых $\lambda > 0$, $\xi^1 \in \Gamma, \dots, \xi^k \in \Gamma$, $k = 1, 2, \dots$, справедливо неравенство

$$(-1)^k D_{\xi^1} \dots D_{\xi^k} G(\lambda s) \geq 0,$$

где

$$D_\xi = \sum_j \xi_j \frac{\partial}{\partial s_j}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Этот результат позволяет исследовать вопрос об универсальности модели Хаутеккера–Йохансена с точки зрения агрегирования. Он получил развитие в недавних работах А. Д. Агальцова (2015, 2016).

Геннадий Маркович обладал талантом оценить содержательное значение математического результата и заражал окружающих своим умением радоваться достигнутому пониманию. По инициативе Геннадия Марковича был организован международ-

ный семинар “Квазилинейные уравнения, обратные задачи и их приложения”, который оказал влияние на становление многих молодых математиков.

Светлая память о выдающемся учёном и замечательном человеке будет вечно жить в сердцах его коллег и учеников, друзей и близких.

*Б. Берндтссон, С. В. Кисляков, Р. Г. Новиков, В. М. Полтерович,
П. Л. Поляков, А. Е. Туманов, А. А. Шананин, Ч. Л. Эпштейн*

Список литературы

Цитированные работы Г. М. Хенкина

- [1] “Отсутствие равномерного гомеоморфизма между пространствами гладких функций от одного и от n переменных ($n \geq 2$)”, *Матем. сб.*, **74(116)**:4 (1967), 595–607; англ. пер.: “Impossibility of a uniform homeomorphism between spaces of smooth functions of one and of n variables ($n \geq 2$)”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:4 (1967), 551–561.
- [2] “Неизоморфность некоторых пространств функций от разного числа переменных”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:4 (1967), 57–68; англ. пер.: “Nonisomorphism of certain spaces of functions of different numbers of variables”, *Funct. Anal. Appl.*, **1**:4 (1967), 306–315.
- [3] “Банаховы пространства аналитических функций в шаре и в биглиндри не изоморфны”, *Функц. анализ и его прил.*, **2**:4 (1968), 82–91; англ. пер.: “The Banach spaces of analytic functions in a sphere and in a bicylinder are not isomorphic”, *Funct. Anal. Appl.*, **2**:4 (1968), 334–341.
- [4] “Интегральное представление функций, голоморфных в строго псевдовыпуклых областях, и некоторые приложения”, *Матем. сб.*, **78(120)**:4 (1969), 611–632; англ. пер.: “Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudo-convex domains and some applications”, *Math. USSR-Sb.*, **7**:4 (1969), 597–616.
- [5] “Интегральное представление функций в строго псевдовыпуклых областях и приложения к $\bar{\partial}$ -задаче”, *Матем. сб.*, **82(124)**:2(6) (1970), 300–308; англ. пер.: “Integral representation of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the $\bar{\partial}$ -problem”, *Math. USSR-Sb.*, **11**:2 (1970), 273–281.
- [6] “Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии”, *УМН*, **32**:3(195) (1977), 57–118; англ. пер.: “The Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **32**:3 (1977), 59–130.
- [7] “Twistor description of classical Yang–Mills–Dirac fields”, *Phys. Lett. B*, **95**:3–4 (1980), 405–408 (with Yu. I. Manin).
- [8] “Преобразование Пенроуза и комплексная интегральная геометрия”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем.*, **17**, ВИНТИ, М., 1981, 57–111 (совм. с С. Г. Гиндикиным); англ. пер.: “Penrose transformation and complex integral geometry”, *J. Soviet Math.*, **21**:4 (1983), 508–551 (with S. G. Gindikin).
- [9] “Осциллирующие слабо локализованные решения уравнения Кортевега–де Фриза”, *ТМФ*, **61**:2 (1984), 199–213 (совм. с Р. Г. Новиковым); англ. пер.: “Oscillating weakly localized solutions of the Korteweg–de Vries equation”, *Theoret. and Math. Phys.*, **61**:2 (1984), 1089–1099 (with R. G. Novikov).
- [10] *Theory of functions on complex manifolds*, Math. Lehrbücher Monogr. II. Abt. Math. Monogr., **60**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984, 226 pp. (with J. Leiterer).

- [11] “Метод интегральных представлений в комплексном анализе”, *Комплексный анализ – многие переменные – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **7**, ВИНТИ, М., 1985, 23–124; англ. пер.: “The method of integral representations in complex analysis”, *Several complex analysis*, v. I: *Introduction to complex analysis*, Encyclopaedia Math. Sci., **7**, Springer, Berlin, 1990, 19–116.
- [12] “Формулы гомотопии для $\bar{\partial}$ -оператора на $\mathbb{C}P^n$ и преобразование Радона–Пенроуза”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3 (1986), 566–597 (совм. с П. Л. Поляковым); англ. пер.: “Homotopy formulas for the $\bar{\partial}$ -operator on $\mathbb{C}P^n$ and the Radon–Penrose transform”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:3 (1987), 555–587 (with P. L. Polyakov).
- [13] “ $\bar{\partial}$ -уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния”, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 93–152 (совм. с Р. Г. Новиковым); англ. пер.: “The $\bar{\partial}$ -equation in the multidimensional inverse scattering problem”, *Russian Math. Surveys*, **42**:3 (1987), 109–180 (with R. G. Novikov).
- [14] *Andreotti–Grauert theory by integral formulas*, Math. Res., **43**, Akademie-Verlag, Berlin, 1988, 270 pp. (with J. Leiterer).
- [15] “Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий”, *Экономика и матем. методы*, **24**:6 (1988), 1071–1083 (совм. с В. М. Полтеровичем); англ. пер.: “An evolutionary model with interaction between development and adoption of new technologies”, *Matekon*, **26**:1 (1989), 3–19 (with V. M. Polterovich).
- [16] “Поля Янга–Миллса, преобразование Радона–Пенроуза и уравнения Коши–Римана”, *Комплексный анализ – многие переменные – 5*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **54**, ВИНТИ, М., 1989, 113–196 (совм. с Р. Г. Новиковым); англ. пер.: “The Yang–Mills fields, the Radon–Penrose transform, and the Cauchy–Riemann equations”, *Several complex variables*, v. V: *Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics*, Encyclopaedia Math. Sci., **54**, Springer, Berlin, 1993, 109–193 (with R. G. Novikov).
- [17] “Интегральные формулы для решений $\bar{\partial}$ -уравнений и задачи интерполяции в аналитических полиэдрах”, *Тр. ММО*, **53**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1990, 130–170 (совм. с П. Л. Поляковым); англ. пер.: “Integral formulas for the solution of the $\bar{\partial}$ -equation and an interpolation problem in analytic polyhedra”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1991, 135–175 (with P. L. Polyakov).
- [18] “Bernstein theorems and Radon transform. Application to the theory of production functions”, *Mathematical problems of tomography*, Transl. Math. Monogr., **81**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, 189–223 (with A. A. Shananin).
- [19] “Многоточечные аппроксимации Паде в обратной задаче Штурма–Лиувилля”, *Матем. сб.*, **182**:8 (1991), 1118–1128 (совм. с А. А. Гончаром, Н. Н. Новиковой); англ. пер.: “Multipoint Padé approximants in the inverse Sturm–Liouville problem”, *Math. USSR-Sb.*, **73**:2 (1992), 479–489 (with A. A. Gonchar, N. N. Novikova).
- [20] “Shumpeterian dynamics as a non-linear wave theory”, *J. Math. Econom.*, **20**:6 (1991), 551–590 (with V. M. Polterovich).
- [21] “The inverse boundary problem for the Rayleigh system”, *J. Math. Phys.*, **36**:12 (1995), 6688–6708 (with R. Beals, N. N. Novikova).
- [22] “The Abel–Radon transform and several complex variables”, *Modern methods in complex analysis* (Princeton, NJ, 1992), Ann. of Math. Stud., **137**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995, 223–275.
- [23] “The reconstruction of the attracting potential in the Sturm–Liouville equation through characteristics of negative discrete spectrum”, *Stud. Appl. Math.*, **97**:1 (1996), 17–52 (with N. N. Novikova).

- [24] “Stability of embeddings for pseudoconcave surfaces and their boundaries”, *Acta Math.*, **185**:2 (2000), 161–237 (with Ch. L. Epstein).
- [25] “Обратная задача Дирихле–Неймана для нодальных кривых”, *УМН*, **67**:6(408) (2012), 101–124 (совм. с В. Мишелем); англ. пер.: “Inverse Dirichlet-to-Neumann problem for nodal curves”, *Russian Math. Surveys*, **67**:6 (2012), 1069–1089 (with V. Michel).
- [26] “Burgers type equations, Gelfand’s problem and Schumpeterian dynamics”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **11**:2 (2012), 199–223.
- [27] “Residual $\bar{\partial}$ -cohomology and the complex Radon transform on subvarieties of $\mathbb{C}P^n$ ”, *Math. Ann.*, **354**:2 (2012), 497–527 (with P. L. Polyakov).
- [28] “Gel’fand–Calderón’s inverse problem for anisotropic conductivities on bordered surfaces in $\mathbb{R}^3$ ”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2012**:4 (2012), 781–809 (with M. Santacesaria).
- [29] “Cauchy–Gelfand problem for quasilinear conservation law”, *Bull. Sci. Math.*, **138**:7 (2014), 783–804 (with A. A. Shananin).
- [30] “Проблема Коши–Гельфанда и обратная задача для квазилинейного уравнения первого порядка”, *Функц. анализ и его прил.*, **50**:2 (2016), 61–74 (совм. с А. А. Шананиным); англ. пер.: “Cauchy–Gelfand problem and the inverse problem for a first-order quasilinear equation”, *Funct. Anal. Appl.*, **50**:2 (2016), 131–142 (with A. A. Shananin).
- [31] “Explicit Hodge-type decomposition on projective complete intersections”, *J. Geom. Anal.*, **26**:1 (2016), 672–713 (with P. L. Polyakov).

Цитированные работы других авторов

- [32] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния. II”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. матем.*, **3**, ВИНТИ, М., 1974, 93–180; англ. пер.: L. D. Faddeev, “Inverse problem of quantum scattering theory. II”, *J. Soviet Math.*, **5**:3 (1976), 334–396.
- [33] И. М. Гельфанд, “Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений”, *УМН*, **14**:2(86) (1959), 87–158; англ. пер.: I. M. Gel’fand, “Some problems in the theory of quasilinear equations”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 295–381.
- [34] *Handbook of the geometry of Banach spaces*, v. 1, 2, eds. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2001, 2003, x+1005 pp., xii+1007–1866 pp.
- [35] S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, D. M. Stolyarov, “Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension”, *J. Funct. Anal.*, **269**:10 (2015), 3220–3263.
- [36] R. E. Lucas Jr., B. Moll, “Knowledge growth and the allocation of time”, *J. Polit. Economy*, **122**:1 (2014), 1–51.
- [37] R. G. Novikov, “The $\bar{\partial}$ -approach to monochromatic inverse scattering in three dimensions”, *J. Geom. Anal.*, **18**:2 (2008), 612–631.
- [38] R. Penrose, “Local H^1 ’s and propagation”, *Advances in twistor theory*, Res. Notes in Math., **37**, Pitman, Boston, MA–London, 1979, 88–92.
- [39] А. А. Шананин, “Исследование одного класса функций прибыли, возникающих при макроописании экономических систем”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **25**:1 (1985), 53–65; англ. пер.: A. A. Shananin, “Study of a class of profit functions arising in a macro description of economic systems”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **25**:1 (1985), 34–42.