Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Вечтомов, М. Н. Смирнова, Одна двойственность для топологических
полуколец непрерывных функций, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm977>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:43:03

ОДНА ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУКОЛЬЦЕВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов, М. Н. Смирнова

Пусть S – топологическое полукольцо. Под *полукольцом* S понимается система $\langle S, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ такая, что $\langle S, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид, $\langle S, \cdot, 1 \rangle$ – моноид, тождественно $r(s+t) = rs + rt$, $(r+s)t = rt + st$ и $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$, а также $1 \neq 0$. Гомоморфизмы полуколец предполагаются сохраняющими 0 и 1. Для топологического пространства X через $C_p(X, S)$ обозначим топологическое полукольцо всех непрерывных S -значных функций на X относительно поточечных операций и топологии поточечной сходимости. Хаусдорфово пространство X называется *S -тихоновским*, если для любого замкнутого множества $A \subseteq X$ и любой точки $x \in X \setminus A$ найдется $f \in C_p(X, S)$, для которой $f(A) = \{0\}$ и $f(x) = 1$. Собственный идеал P полукольца называется *простым*, если для любых элементов a, b полукольца $ab \in P$ влечет $a \in P$ или $b \in P$. Вычисление $\pi_x: C_p(X, S) \rightarrow S$ в точке $x \in X$ определяется стандартно: $\pi_x(f) = f(x)$ для всех $f \in C_p(X, S)$. Для $x \in X$ и замкнутого простого идеала p в S положим $P(x, p) = \pi_x^{-1}(p)$. Получаем непрерывный эпиморфизм π_x и замкнутый простой идеал $P(x, p)$ в $C_p(X, S)$.

На топологическом полукольце S рассматриваются условия: а) *каждый замкнутый собственный идеал в S содержится в некотором замкнутом простом идеале*; б) *пересечение любых двух замкнутых простых идеалов в S содержит некоторый замкнутый простой идеал*; с) *для любых двух различных элементов из S существует замкнутый простой идеал в S , содержащий ровно один из данных элементов*.

ТЕОРЕМА 1. Пусть S удовлетворяет а), X есть S -тихоновское пространство и $P \subseteq C_p(X, S)$. Тогда P – замкнутый простой идеал в $C_p(X, S)$ в том и только том случае, когда $P = P(x, p)$ для однозначно определенных точки $x \in X$ и замкнутого простого идеала p в S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что произвольный замкнутый простой идеал P в $C_p(X, S)$ имеет вид $P(x, p)$. Если каждый идеал $\pi_x(P)$, $x \in X$, всюду плотен в S , то, как легко видеть, $P = C_p(X, S)$. Поэтому в силу а) $\pi_x(P) \subseteq p$ для некоторых $x \in X$ и замкнутого простого идеала p в S . Тогда $P \subseteq P(x, p)$. Если также $P \subseteq P(y, q)$ при $y \neq x$, то в силу S -тихоновости X найдется $f \in C_p(X, S) \setminus P(x, p)$ и $g \in C_p(X, S) \setminus P(y, q)$, для которых $fg = 0 \in P$, что невозможно. Следовательно, для всех $y \in X \setminus \{x\}$ идеалы $\pi_y(P)$ всюду плотны в S .

Пусть, далее, $f \in P$, $g \in C_p(X, S)$ и $g(x) = f(x)$. Докажем, что $g \in P$. Берем конечное множество точек $x_1 = x, x_2, \dots, x_n \in X$ и окрестности $U_i \ni g(x_i)$ в S . Для каждого индекса $i = 2, \dots, n$ найдется функция $f_i \in P$, для которой $f_i(x_i)g(x_i) \in U_i$ и $f_i(x_j) = 0$ при $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. Возьмем также функцию χ из $C_p(X, S)$, равную 1 в точке x_1 и 0 в точках $x_2, \dots, x_n$. Тогда

$$h = f\chi + \sum_{i=2}^n f_i g(x_i) \in P$$

и $h(x_i) \in U_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, g принадлежит замкнутому идеалу P .

Итак, $P = \pi_x^{-1}(p)$ при $p = \pi_x(P)$. Поскольку π_x – открытое гомоморфное отображение на все S , то p – замкнутый простой идеал в S . Получаем $P = P(x, p)$.

Наряду с S и X возьмем еще топологическое полукольцо T и пространство Y . Рассмотрим пару (α, φ) , состоящую из непрерывного гомоморфизма $\alpha: S \rightarrow T$ и непрерывного отображения $\varphi: Y \rightarrow X$. Через $C_p(\alpha, \varphi)$ обозначим отображение $C_p(X, S) \rightarrow C_p(Y, T)$, $C_p(\alpha, \varphi)(f) = \alpha \circ f \circ \varphi$ для всех $f \in C_p(X, S)$. Ясно, что $C_p(\alpha, \varphi)$ – непрерывный гомоморфизм, сохраняющий константы (функции-константы отождествляем с их значениями).

ТЕОРЕМА 2. Пусть дано отображение $\Gamma: C_p(X, S) \rightarrow C_p(Y, T)$, причем S удовлетворяет а), X – S -тихоновское и имеет место один из случаев: 1) T обладает свойствами б) и с); 2) S – кольцо, T не имеет делителей нуля и $\{0\}$ замкнуто в T . Тогда $\Gamma = C_p(\alpha, \varphi)$ для некоторой (единственной) пары (α, φ) тогда и только тогда, когда Γ – непрерывный гомоморфизм и $\Gamma(S) \subseteq T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – непрерывный гомоморфизм, сохраняющий константы. Сразу получаем непрерывный гомоморфизм $\alpha = \Gamma|_S$. Определим отображение $\varphi: Y \rightarrow X$. Берем $y \in Y$, произвольный имеющийся в T замкнутый простой идеал q и $P(y, q)$. По условию а) для S и теореме 1: $\Gamma^{-1}(P(y, q)) = P(x, p)$, где $x \in X$ и $p = \alpha^{-1}(q)$. Положим $\varphi(y) = x$. По условию б) для T отображение φ задано корректно (в случае 2) условие б) выполняется автоматически). Проверим равенство $\Gamma(f) = \alpha \circ f \circ \varphi$ для произвольной $f \in C_p(X, S)$. Возьмем $y \in Y$, $t = \Gamma(f)(y)$ и $s = f(\varphi(y))$. Рассмотрим наши случаи.

Случай 1). Для любого замкнутого простого идеала q в T

$$t \in q \Leftrightarrow \Gamma(f) \in P(y, q) \Leftrightarrow f \in P(\varphi(y), \alpha^{-1}(q)) \Leftrightarrow s = f(\varphi(y)) \in \alpha^{-1}(q) \Leftrightarrow \alpha(s) \in q.$$

Значит, $t = \alpha(s)$ на основании условия с) для T .

Случай 2). Имеем $f - s \in P(\varphi(y), \alpha^{-1}(0)) = \Gamma^{-1}(P(y, 0))$. Поэтому $t = \Gamma(f)(y) = \Gamma(s)(y) + \Gamma(f - s)(y) = \alpha(s)$.

Далее, для фиксированного замкнутого простого идеала q в T множества $f^{-1}(\alpha^{-1}(q))$, $f \in C_p(X, S)$, образуют базу замкнутых множеств S -тихоновского пространства X . При этом

$$\varphi^{-1}(f^{-1}(\alpha^{-1}(q))) = (\alpha \circ f \circ \varphi)^{-1}(q) = \Gamma(f)^{-1}(q),$$

что доказывает непрерывность φ . Значит, $\Gamma = C_p(\alpha, \varphi)$, причем такая пара (α, φ) единственна.

Из теоремы 2 вытекает следующая теорема двойственности.

ТЕОРЕМА 3. Категория топологических полуколец $C_p(X, S)$ на S -тихоновских пространствах X по всевозможным топологическим полукольцам S , удовлетворяющим условиям а), б) и с) (или являющимися кольцами без делителей нуля с замкнутыми максимальными идеалами), и их непрерывных гомоморфизмов, сохраняющих константы, эквивалентна категории соответствующих пар (S, X) с парами (α, φ) в качестве морфизмов.

ПРИМЕРЫ. 1. Коммутативные полукольца S с тождеством $x^2 = x$, все идеалы которых замкнуты (ограниченные цепи с интервальной или полуинтервальной топологией) – обладают свойствами а) и с) (свойствами а)–с)). 2. Пусть $S = \{0, 1\}$ – цепь, являющаяся связным двоеточием с замкнутой точкой 0. Получаем антиэквивалентность категории топологических решеток $C_p(X, D)$ и категории всех хаусдорфовых пространств X . 3. Если дано отдельное полутопологическое поле S , то категория топологических колец $C_p(X, S)$ двойственна категории всевозможных S -тихоновских пространств X (см. [1]). 4. Фиксируя дискретное двухэлементное поле S , получаем двойственность между категорией топологических (в поточечной топологии) булевых колец с 1 и категорией всех нульмерных пространств.

ЗАМЕЧАНИЕ. Небольшое изменение в доказательстве показывает, что теорема 1 верна для топологических дистрибутивных решеток L , не обязательно ограниченных. Теорема 2 также верна для L , только образ Γ должен содержать по крайней мере два элемента.

Из теоремы 3 и замечания следуют соответствующие результаты Капланского, Нагаты, Широты, В.В. Пашенкова, Е.М. Вечтомова по определяемости топологических пространств (см. обзор [2]).

В заключение отметим, что роль топологии поточечной сходимости в тополого-алгебраических исследованиях выпукло показана российскими математиками А.В. Архангельским в [3] и В.В. Пашенковым в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Day B. J. // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. V. 32. №2. P. 171–177. [2] Вечтомов Е. М. // Итоги науки и техн. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–46. [3] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989. [4] Пашенков В. В. // УМН. 1987. Т. 42. №5. С. 79–99.