Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, О послойных G -отображениях, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm978>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:41:45

О ПОСЛОЙНЫХ G -ОТОБРАЖЕНИЯХ

А. Ю. Воловиков

Заметка посвящена обобщениям параметрических теорем Борсука–Улама, доказанных Дольдом [1] и Накаока [3]. С помощью результатов работы [2] теоремы Дольда–Накаока переносятся на случай когомологических сферических расслоений.

1. Отображения предполагаются непрерывными, пространства – паракомпактными. Используются когомологии Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{k}$.

Пусть $T \subset Y$ и $C \subset Z$ замкнуты и $g: Z \rightarrow Y$. Отображение пар $(C, C \cap g^{-1}T) \rightarrow (Y, T)$ индуцирует гомоморфизм когомологий, ядро которого, следуя [2], обозначим через $\text{Ind}_{Y,T} C$.

Предположим, что $P \subset E$ замкнуто и коммутативна диаграмма

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \supset E \setminus P \\ \nu \downarrow & & \downarrow \mu \\ Y & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

т.е. $\mu f x = \varphi \nu x$ для любого $x \in f^{-1}(E \setminus P)$.

Положим $A = f^{-1}P$, и пусть $T \subset Y$ замкнуто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. а) $(\varphi^* \text{Ind}_B(E \setminus P)) \cdot (\text{Ind}_{Y,T} A) \subset \text{Ind}_{Y,T} X$.

б) Пусть L – линейное подпространство в $H^*(Y, T)$ и $e \in \text{Ind}_B(E \setminus P)$. Если $\alpha \varphi^* e \notin \text{Ind}_{Y,T} X$ для любого ненулевого $\alpha \in L$, то $L \cap \text{Ind}_{Y,T} A = 0$, т.е. $L \rightarrow H^*(A, A \cap \nu^{-1}T)$ – мономорфизм.

Предположим, что заданы замкнутые подпространства $S \subset X$ и $R \subset E \setminus P$ такие, что $S \subset X \setminus A$ и $f(S) \subset R$. С помощью ν^* (соответственно, μ^*) $H^*(X, S)$ (соответственно, $H^*(E \setminus P, R)$) превращается в $H^*(Y)$ -модуль ($H^*(B)$ -модуль). Для $u \in H^*(E \setminus P, R)$ положим $\text{Ann } u = \{e \in H^*(B) \mid eu = 0\}$. Аналогичным образом определяется $\text{Ann } v$ для $v \in H^*(X, S)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $u \in H^j(E \setminus P, R)$, $v \in H^j(X, S)$ и $f^*u = v \mid (X \setminus A, S)$.

а) Если $e \in \text{Ann } u$ и $\alpha \in \text{Ind}_Y A$, то $\alpha \varphi^* e \in \text{Ann } v$.

б) Пусть L – линейное подпространство в $H^*(Y)$ такое, что $\alpha \varphi^* e \notin \text{Ann } v$ для любого ненулевого $\alpha \in L$, где $e \in \text{Ann } u$. Тогда $L \cap \text{Ind}_Y A = 0$, т.е. $L \rightarrow H^*(A)$ – мономорфизм.

Здесь $f^*: H^*(E \setminus P, R) \rightarrow H^*(X \setminus A, S)$ индуцирован отображением f .

2. Сюръекцию $\pi: Z \rightarrow Y$ назовем *когомологическим расслоением на сферы* (для краткости просто расслоением), если $\forall y \in Y$ естественный гомоморфизм слоя пучка Лере отображения π в когомологии слоя (см. [4]) является изоморфизмом и слои π – когомологические n -мерные сферы над $\mathbb{k}$ (n не зависит от $y \in Y$). Если, кроме того, пучок Лере постоянен, то назовем π *ориентируемым* (сферическим) *расслоением*. Для $y \in Y$ положим $Z_y = \pi^{-1}y$.

Пусть π – ориентируемое расслоение и Z' – такое замкнутое подпространство, что $\pi' = \pi \mid Z'$ – ориентируемое расслоение на k -мерные (когомологические) сферы над Y и $0 < k < n-1$. Тогда (Z, Z') назовем *парой ориентируемых расслоений* (или просто ориентируемой парой).

Предположим, что Y связно. В члене E_2 спектральной последовательности Лере ориентируемого расслоения π имеются только две ненулевые строки. Поэтому имеется *последовательность Гизина* и, выбрав ориентацию, можно определить *класс Эйлера* $e \in H^{n+1}(Y)$, причем $\text{Ind}_Y Z = (e)$ – главный идеал, порожденный e (для замкнутого $T \subset Y$ определен также $e_T \in H^{n+1}(Y, T)$, образ которого в $H^{n+1}(Y)$ совпадает с e и $\text{Ind}_{Y,T} Z = (e_T)$).

Аналогично для ориентируемой пары (Z, Z') можно определить эйлеров класс $e \in H^{n-k}(Y)$ и $(e) = \text{Ann } u$, где $u \in H^{k+1}(Z, Z')$ соответствует 1 $\in \mathbb{k}$ при изоморфизме (зависящем от выбора ориентаций) $H^{k+1}(Z, Z') \cong H^0(Y) \cong \mathbb{k}$.

Пусть в диаграмме (*) пространства Y и B связны и ν, μ – ориентируемые расслоения с классами Эйлера e', e , соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (грант № JH2100).

ТЕОРЕМА 1. Если $\alpha \in \text{Ind}_{Y,T} A$, то $\alpha\varphi^*e \in (e'_T)$.

Пусть теперь в (*) (X, S) и (E, R) – ориентируемые пары с классами Эйлера e' и e . Положим $f_y = f \mid S_y: S_y \rightarrow R_{\varphi(y)}$ (как и выше, $f(S) \subset R$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть f_y^* – изоморфизм $\forall y \in Y$. Если $\alpha \in \text{Ind}_Y A$, то $\alpha\varphi^*e \in (e')$.

3. Пусть G – компактная группа Ли. Для связной G пусть $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$. Если G – p -тор ($G = \mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p$, p – простое число), то пусть $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_p$. Для G -пространства X положим $H_G^*(X) = H^*(E_G \times_G X)$ [5, гл. 3], где $E_G \rightarrow B_G$ – универсальное главное G -расслоение.

Далее будем предполагать, что G действует на всех пространствах в диаграмме (*), отображения эквивариантны и P, T, S, R инвариантны.

Применением конструкции Бореля к диаграмме (*) предложения и теоремы переносятся в эквивариантную ситуацию. В частности, имеем (ср. [2]):

$$(\varphi_G^* \text{Ind}_B^G(E \setminus P)) \cdot (\text{Ind}_{Y,T}^G A) \subset \text{Ind}_{Y,T}^G X.$$

Здесь $\varphi_G^*: H_G^*(B) \rightarrow H_G^*(Y)$ индуцирован φ , и, например, $\text{Ind}_B^G(E \setminus P) = \text{Ker } \mu_G^*$.

Пусть теперь ν, μ – когомологические расслоения на сферы, Y и B связны. Предположим, что сферические расслоения $E_G \times_G X \rightarrow E_G \times_G Y$ и $E_G \times_G (E \setminus P) \rightarrow E_G \times_G B$ ориентируемы, и пусть e'_G, e_G – их эйлеровы классы, т.е. эквивариантные эйлеровы классы расслоений ν и μ . Применяя теорему 1 к указанным расслоениям, получаем эквивариантную версию этой теоремы: если $\alpha \in \text{Ind}_{Y,T}^G A$, то $\alpha\varphi_G^*e_G \in (e'_{G,T})$.

Сделаем еще одно предположение: пусть G действует тривиально на Y и B . Тогда $H_G^*(Y) = \Lambda^* \otimes H^*(Y)$, $H_G^*(B) = \Lambda^* \otimes H^*(B)$, где $\Lambda^* = H^*(B_G) = H_G^*(\text{pt})$. Обозначим эквивариантные эйлеровы классы слоев X_y и $\mu^{-1}b$ через $e'_{G,y}$ и $e_{G,b}$, соответственно.

СЛЕДСТВИЕ. Если классы $e'_{G,y}$ и $e_{G,b}$ не являются делителями нуля в Λ^* , то $\sum_{i \leq j} \Lambda^i \otimes H^*(Y, T) \rightarrow H_G^*(A, A \cap \nu^{-1}T)$ – мономорфизм при $j < \deg e'_{G,T} - \deg e_G$.

Аналогичное следствие имеет и теорема 2.

Рассмотрим, в частности, случай действия торов и p -торов (предполагая конечность числа орбитных типов для действия тора). Пусть $\nu: X \rightarrow Y$ – когомологическое расслоение на сферы и G действует на X , сохраняя слои. Тогда можно показать, что если $X^G = \emptyset$, то ν ориентируемо и его эквивариантный эйлеров класс не является делителем нуля в $H_G^*(Y) = \Lambda^* \otimes H^*(Y)$. Аналогично, если (X, S) – пара сферических расслоений над Y такая, что $X^G \subset S$ и $S \rightarrow Y$ ориентируемо, то $\nu: X \rightarrow Y$ также ориентируемо и эквивариантный класс Эйлера пары (X, S) не является делителем нуля в $H_G^*(Y)$.

Характеристические классы ориентируемого когомологического расслоения на n -сферы можно определить через эквивариантный класс Эйлера (как в [4, гл. 4, §10]). Например, если $G = \mathbb{Z}_2$, $X^G = \emptyset$, то $e_G = \sum_{j=0}^{n+1} t^{n+1-j} \otimes w_j$, где $\Lambda^* = \mathbb{Z}_2[t]$, $\deg t = 1$, w_j – классы Штифеля–Уитни. Если $G = S^1, \mathbb{Z}_p$ и $X^G \rightarrow Y$ ориентируемо, то эквивариантный класс Эйлера пары (X, X^G) определен и совпадает (для локально тривиального расслоения) с характеристическим полиномом Накаока [3].

Теорему 1 нетрудно перенести на случай многозначных отображений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Dold A. // Comment. Math. Helv. 1988. V. 63. P. 275–285. [2] Fadell E., Husseini S. // Ergodic Theory Dynam. Systems. 8. Spec. Issue, 1988. P. 259–268. [3] Nakaoka M. // Lecture Notes in Math. 1989. V. 1411. P. 155–170. [4] Бредон Г. Теория пучков. М.: Наука, 1988. [5] Сян У. И. Когомологическая теория топологических групп преобразований. М.: Мир, 1979.