Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Гервер, Несколько простых теорем о расположении корней, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 191–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm979>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:46:27

НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ ТЕОРЕМ О РАСПОЛОЖЕНИИ КОРНЕЙ

М. Л. ГЕРВЕР

Рассмотрим множество K_n тригонометрических многочленов

$$(1) \quad Q(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx,$$

$$(2) \quad 0 < c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n.$$

Согласно [1, часть 1, отдел 3, задача 185, с. 149, 342] любой тригонометрический многочлен из K_n имеет n вещественных простых корней в интервале $0 < x < \pi$ (поскольку полином

$$(3) \quad P(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

с коэффициентами вида (2) имеет в единичном круге n нулей).

В заметке формулируются теоремы, уточняющие этот результат. Первые две из них дают ответ, например, на такой

Вопрос. Возьмем любые два тригонометрических многочлена Q_1 и Q_2 из множества K_n и отметим корни одного красными точками, а корни другого – синими. Обозначим через $k(n)$ максимальное (по всем парам Q_1, Q_2) число красных точек, идущих подряд (не разделенных синими). Чему равно $k(n)$?

Базис $f_{j,n+1}$. Положим $r_1 = c_n - c_{n-1}, \dots, r_n = c_1 - c_0, r_{n+1} = c_0$,

$$(4) \quad f_{j,n+1}(x) = \sum_{s=n+1-j}^n \cos sx = \frac{\sin jx/2 \cos(2n+1-j)x/2}{\sin x/2}, \quad 1 \leq j \leq n+1,$$

и запишем (1) в виде линейной комбинации функций (4) с положительными (ввиду (2)) коэффициентами: $r_1 f_{1,n+1}(x) + r_2 f_{2,n+1}(x) + \dots + r_n f_{n,n+1}(x) + r_{n+1} f_{n+1,n+1}(x)$.

Матрица $\mathcal{M}_n$. Составим матрицу $\mathcal{M}_n$ из корней функций (4) на отрезке $[0, \pi]$. Сумма кратностей этих корней равна n при каждом j ($1 \leq j \leq n+1$), и все корни – не более, чем двукратные. Упорядочим корни $f_{j,n+1}(x)$ на $[0, \pi]$ по возрастанию (повторяя двукратные корни дважды) и поместим в j -ю строку матрицы $\mathcal{M}_n$.

Лемма. При всех n и k ($1 \leq k \leq n-1$) любой элемент a из $(k+1)$ -го столбца матрицы $\mathcal{M}_n$ и любой элемент b из ее k -го столбца связаны неравенством $a \geq b$.

Интервалы $(a_{k,n}, b_{k,n})$. Произвольно фиксируем n и при каждом k ($1 \leq k \leq n$) выберем в k -м столбце матрицы $\mathcal{M}_n$ минимальный и максимальный элементы $a_{k,n}$ и $b_{k,n}$. По лемме интервалы $(a_{k,n}, b_{k,n})$, $1 \leq k \leq n$, попарно не пересекаются и разделены отрезками или точками $b_{k,n} \leq x \leq a_{k+1,n}$, $1 \leq k \leq n-1$. Положим $b_{0,n} = 0$, $a_{n+1,n} = \pi$.

ТЕОРЕМА 1. Все $Q(x) \in K_n$ имеют ровно по одному корню в каждом из интервалов $(a_{k,n}, b_{k,n})$, $1 \leq k \leq n$. При $b_{k,n} \leq x \leq a_{k+1,n}$ ($1 \leq k \leq n$) все $Q(x) \in K_n$ положительны, если k четно, и отрицательны, если k нечетно.

Следствие. Ответ на поставленный выше вопрос: $k(n) \leq 2$.

Из теоремы 2 следует: $k(1) = 1$, $k(n) = 2$ при всех $n > 1$.

Замечание. Если требовать лишь, чтобы у рассматриваемых тригонометрических многочленов все корни были вещественными, то $k(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Область G_n . Корни $x_k \in (a_{k,n}, b_{k,n})$ тригонометрического многочлена $Q \in K_n$ удобно изображать в виде точки $X = X(Q) = \{x_k\} \in \Pi_n$, где Π_n – прямое произведение интервалов $(a_{k,n}, b_{k,n})$, $1 \leq k \leq n$. Поскольку $X(Q) \equiv X(\lambda Q)$ при $\lambda \neq 0$, нормируем тригонометрические многочлены и будем считать, что в (1)

$$(5) \quad 0 < c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n = 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-01350).

ТЕОРЕМА 2. Точки $X(Q)$, $Q \in K_n$, образуют область $G_n \in \Pi_n$, гомеоморфную симплексу (5). Ее граница ∂G_n гомеоморфна границе симплекса (5) и состоит из точек $X(f)$, где $f = \sum_{j=1}^{n+1} r_j f_{j,n+1}(x)$, $r_j \geq 0$, $\prod_{j=1}^{n+1} r_j = 0$, $\sum_{j=1}^{n+1} r_j > 0$.

Аналогичные теоремы верны для множеств $K_{0,n}$ и $K_{1,n}$ тригонометрических многочленов $c_0 + c_1 \cos 2x + \dots + c_n \cos 2nx$ и $c_0 \cos x + c_1 \cos 3x + \dots + c_n \cos(2n+1)x$ с коэффициентами (2), для таких же множеств тригонометрических многочленов по синусам с положительными возрастающими коэффициентами и некоторых других множеств.

Общая ситуация описывается следующей теоремой. Рассмотрим множество V непрерывных функций на отрезке $[0, L]$, обладающее двумя свойствами:

А. V выпукло, т.е. функция $pf + qg \in V$ для любых $f, g \in V$ и любых $p, q > 0$, $p + q = 1$.

В. Каждая функция $f \in V$ имеет n корней в интервале $(0, L)$, где n – одно и то же для всех f из V ; эти корни – простые, и вблизи нуля $f(x) > 0$ при $x > 0$.

ПРИМЕРЫ. Множества K_n , $K_{0,n}$ и $K_{1,n}$, очевидно, выпуклы. Свойство В для $K_{0,n}$ и $K_{1,n}$ доказывается заменой полинома (3) на $P(z^2)$ и на $zP(z^2)$.

ТЕОРЕМА 3. Существуют такие отрезки (или точки)

$$[a_k, b_k], \quad 1 \leq k \leq n, \quad 0 \leq a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq L,$$

что любая функция $f \in V$ имеет в них ровно по одному корню.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем любые f и g из V и обозначим через x_k и y_k , $1 \leq k \leq n$, их корни в интервале $(0, L)$: $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < L$; $0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < L$. Тогда $x_j \leq y_{j+1}$ и $y_j \leq x_{j+1}$ при всех j от 1 до $n-1$ (иначе была бы невозможна гомотопия $(1-t)f + tg$, переводящая все x_k в y_k), и остается положить $a_k = \inf x_k$, $b_k = \sup x_k$ (по всем $f \in V$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное доказательство (с незначительными изменениями) годится для леммы к теореме 1.

Специфика K_n , $K_{0,n}$, $K_{1,n}$ и т.п. (по сравнению с множествами V общего вида) – существование базиса типа (4). Благодаря его наличию теорема 1 и ее модификации приводят, несмотря на свою крайнюю простоту, к довольно точным асимптотическим оценкам (стандартные доказательства которых требуют вычислений). В качестве примера рассмотрим полиномы Лежандра

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_k(x) = \left(2 - \frac{1}{k}\right)xL_{k-1}(x) - \left(1 - \frac{1}{k}\right)L_{k-2}(x).$$

Согласно [1, часть 2, отдел 6, задача 93, с. 104, 311]

$$\begin{aligned} (6) \quad & L_{2n+1}(\cos x) = c_0 \cos x + c_1 \cos 3x + \dots + c_n \cos(2n+1)x, \\ (7) \quad & c_0 = 2g_n g_{n+1}, \quad c_1 = 2g_{n-1} g_{n+2}, \quad \dots, \quad c_{n-1} = 2g_1 g_{2n}, \quad c_n = 2g_0 g_{2n+1}, \\ & g_0 = 1, \quad g_k = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Ввиду (7) коэффициенты в (6) *положительны и возрастают*, т.е. $L_{2n+1}(\cos x) \in K_{1,n}$; аналогично устанавливается, что $L_{2n}(\cos x) \in K_{0,n}$. Отсюда следует, что все расстояния между соседними корнями $L_n(\cos x)$ имеют один и тот же порядок $O(1/n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Поля Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978.