Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Гапеев, К доказательству Первой Фундаментальной Теоремы финансовой математики, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 6, 245–246

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm98>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:26:51

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ПЕРВОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

П. В. ГАПЕЕВ

Как известно, *Первая Фундаментальная Теорема финансовой математики* представляет собой следующее утверждение: *Отсутствие в модели финансового рынка некоторого условия возможности получения прибыли без риска равносильно существованию эквивалентной мартингаловой меры.*

В статьях Ф. Делбаена и В. Шахермайера [1], [2] содержится доказательство *Теоремы* в случае непрерывного времени с использованием фактов функционального и выпуклого анализа, а именно, теорему Хана–Банаха и лемму Яна–Крепса об отделимости.

А. Н. Ширяев и Ж. Жакод в работе [3] провели наиболее полное и ясное доказательство *Теоремы* в модели с дискретным временем.

Цель данной работы – показать, что имеет право на существование доказательство *Теоремы* в случае непрерывного времени, использующее утверждение для дискретных аппроксимаций процессов и последующий естественный для теории вероятностей предельный переход при неограниченном измельчении разбиений временной оси.

Мы построим последовательность моделей рынков, процессы в которых являются дискретизациями процессов исходной модели с непрерывным временем. Такая последовательность, следуя терминологии статьи Ю. М. Кабанова и Д. О. Крамкова [4], является моделью “большого рынка”. Далее, мы покажем, что последовательность дискретизаций обладает свойством слабой сходимости к исходному процессу. Более того, для произвольной стратегии в модели рынка существует последовательность стратегий на построенном большом рынке, капиталы которых слабо сходятся к капиталу исходной стратегии. И наконец, мы докажем, что в случае, когда процесс дисконтированных цен финансового актива является ограниченным семимартингалом, введенное в работе И. Кляйн [5] условие отсутствия асимптотического арбитража $\widetilde{NAA}$ (*No Asymptotic Free Lunch with Bounded Risk*) в построенной модели большого рынка эквивалентно введенному в статье [1] условию безарбитражности $\widetilde{NA}$ (*No Free Lunch with Bounded Risk*) в исходной модели рынка с непрерывным временем.

Пусть на некотором стохастическом базисе $\mathbf{B} = (\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ задан семимартингал $S = (S_t)_{t \geq 0}$, порождающий фильтрацию $\mathcal{F}_t = \sigma(S_u : u \in [0, t])$, являющуюся непрерывной справа и пополненной относительно меры $\mathbf{P}$.

Предположим, что S выражает флуктуацию во времени цены некоторого рискованного финансового актива на фондовом рынке, выраженной в единицах другого актива, например – банковского счета, тогда капитал некоторой допустимой самофинансируемой стратегии π имеет представление $X_t^\pi = (\gamma \bullet S)_t \geq -a$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{P}$ -п.н., для некоторого $a \geq 0$, где $\gamma = (\gamma_t)_{t \geq 0}$ – предсказуемый процесс, определяющий количество единиц актива S в момент времени t .

Определим последовательность разбиений временной оси $\mathbb{R}_+$: $\mathcal{T}(n) = \mathcal{T}(n-1) \cup T(n)$, $T(n) = \{k/n \mid k = 0, 1, \dots, n^2\}$, $k(n)$ – число точек разбиения. Для каждого разбиения $\mathcal{T}(n)$ определим дискретизацию исходного процесса цен $S^n = (S_t^n)_{t \geq 0}$:

$$S_t^n = \begin{cases} S_{t_i^n}, & t \in [t_i^n, t_{i+1}^n), t_i^n \in \mathcal{T}(n), t_i^n < t_{i+1}^n, i = 0, \dots, k(n) - 1, \\ S_n, & t \in [n, \infty), \end{cases}$$

и стохастический базис $\mathbf{B}^n = (\Omega, \mathcal{F}^n, (\mathcal{F}_t^n)_{t \geq 0}, \mathbf{P}^n)$, $\mathbf{P}^n = \mathbf{P} \mid \mathcal{F}^n$, фильтрация которого порождена процессом S^n : $\mathcal{F}_t^n = \sigma(S_u^n : u \in [0, t])$, является непрерывной справа и пополненной относительно меры $\mathbf{P}^n$.

Таким образом, для каждого разбиения мы определили модель рынка, в которой цены финансового актива изменяются лишь конечное число раз. Капитал допустимой самофинансируемой стратегии $\pi(n)$ в этой модели имеет вид $X_t^{\pi(n)} = (\gamma^n \bullet S^n)_t \geq -a$, $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathbf{P}$ -п.н., для некото-

рого $a \geq 0$, где процесс $\gamma^n = (\gamma_t^n)_{t \geq 0}$ является дискретизацией исходного процесса γ :

$$\gamma_t^n = \begin{cases} \gamma_0, & t \in [0, t_0^n], \\ \gamma_{t_i^n}, & t \in (t_i^n, t_{i+1}^n], t_i^n \in \mathcal{T}(n), t_i^n < t_{i+1}^n, i = 0, \dots, k(n) - 1, \\ \gamma_n, & t \in (n, \infty). \end{cases}$$

Построенная последовательность моделей рынков, соответствующих разбиениям $\mathcal{T}(n)$, является моделью большого рынка, определенной в работе [4].

Сформулируем вспомогательные результаты, раскрывающие цель предыдущих построений.

ЛЕММА 1. Пусть $S = (S_t)_{t \geq 0}$ — ограниченный семимартингал.

Тогда для последовательности процессов $S^n = (S_t^n)_{t \geq 0}$, $n \in \mathbb{N}$, выполнено условие слабой сходимости к процессу S :

$$\mathcal{L}(S^n | \mathbb{P}^n) \rightarrow \mathcal{L}(S | \mathbb{P}), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 2. Для любой стратегии π на исходном рынке $\mathbf{B}$ существует последовательность стратегий $\pi(n_k)$, определенных на рынках $\mathbf{B}^{n_k}$, капиталы которых слабо сходятся к капиталу стратегии π :

$$\mathcal{L}(X^{\pi(n_k)} = (\gamma^{n_k} \bullet S^{n_k}) | \mathbb{P}^{n_k}) \rightarrow \mathcal{L}(X^\pi = (\gamma \bullet S) | \mathbb{P}), \quad k \rightarrow \infty.$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Пусть S — ограниченный семимартингал. Тогда условие $(\widetilde{NA})$ (No Free Lunch with Bounded Risk) (из работы [1]) в исходной модели рынка эквивалентно условию $(\widetilde{NAA})$ (No Asymptotic Free Lunch with Bounded Risk) (из работы [5]) в построенной модели большого рынка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Delbaen F., Schachermayer W. // Math. Ann. 1994. V. 300. P. 463–520. [2] Delbaen F., Schachermayer W. The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Unbounded Stochastic Processes // Preprint. Zürich: ETH-Zentrum, 1997. [3] Jacod J., Shiryaev A. N. // Finance Stoch. 1998. V. 2. № 3. P. 259–273. [4] Кабанов Ю. М., Крамков Д. О. // Теория вероятн. и ее примен. 1994. Т. 39. № 1. С. 222–228. [5] Klein I. Asymptotic Arbitrage Theory // Philosophical Dissertation.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
02.09.1998