Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. И. Гоза, Алгебры с неприводимой немаксимальной группой автоморфизмов,
УМН, 1996, том 51, выпуск 3, 193–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm980>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 09:14:02

АЛГЕБРЫ С НЕПРИВОДИМОЙ НЕМАКСИМАЛЬНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ

Н. И. ГОЗА

Рассмотрим линейную группу Ли H , действующую в линейном пространстве L над полем $\mathbb{C}$, и ее линейное представление Φ . Действие представления Φ может оказаться инвариантным, т.е. группа Ли H может иметь тензоры, инвариантные относительно Φ . Отметим, что чем шире группа H , тем размерность пространства ее инвариантных тензоров меньше. Если мы расширим H до линейной группы Ли G , заданной в том же пространстве L и имеющей линейное представление Ψ , то, естественно, множество инвариантных тензоров не расширится при этом. Возникает вопрос, насколько изменится пространство инвариантных тензоров в таком случае? Задача эта весьма интересна, но для произвольных линейных групп Ли слишком обширна, поэтому ограничим ее каким-либо образом.

Софусом Ли классифицированы примитивные группы преобразований, действующие в пространствах одного, двух и трех измерений [1]. Проблема классификации равносильна задаче определения максимальных подгрупп в группах Ли (причем подгруппы не должны содержать нетривиальных нормальных делителей группы). Случай, когда группа не является простой, рассмотрен В. В. Морозовым [2]. Проблема максимальных подгрупп простых групп решена Е. Б. Дынкиным в [3], где найдены максимальные подгруппы классических групп среди приводимых подгрупп, а также среди неприводимых подгрупп, не являющихся простыми. Наибольший интерес представляет случай простых неприводимых подгрупп.

В ходе сложного исследования Е. Б. Дынкиным был получен исключительный результат: в большинстве своем простые неприводимые группы Ли максимальны в одной из классических. То есть не являются частью никакой другой неприводимой группы, не совпадающей с классической. В силу этого класс простых неприводимых групп очень велик, что определенным образом затрудняет его изучение.

Вопрос о максимальных подгруппах классических групп непосредственно связан с другими очень интересными объектами – включениями между неприводимыми линейными группами Ли.

ТЕОРЕМА [3]. Полное перечисление всех типов включений $H \subset G$, где H и G – неприводимые группы унимодулярных преобразований, причем G является простой и отлична от $SL(N)$, $Sp(N)$ и $O(N)$, дается таблицей 5.

Приведенных в таблице “исключений Дынкина” всего 36 пар.

Учитывая все сказанное выше, мы остановимся на изучении пространств тензоров, инвариантных относительно представлений $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$ неприводимых линейных групп Ли H и G включений $H \subset G$. Проследим изменение размерности таких пространств при расширении подгруппы H до объемлющей группы G . При этом ограничимся тензорами третьей и четвертой валентности, так как, с одной стороны, на современном уровне развития теории инвариантов и теории представлений групп достаточно реально получить решение этой задачи, чего нельзя сказать о проблеме изучения инвариантных тензоров более высоких валентностей. С другой стороны, инвариантные тензоры третьей и четвертой валентности описывают многие интересные геометрические объекты.

Основные результаты работы приведены в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. Пусть H и G – неприводимые группы унимодулярных линейных преобразований включения $H \subset G$, где G – проста и не совпадает с $SL(N)$, $Sp(N)$ и $O(N)$. Φ и Ψ – неприводимые представления групп H и G , соответственно.

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i (c_{ijq}), инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(H)$, не меняется при расширении подгруппы H до группы G и

- а) равна 0 для следующих включений: $I_8, I_9, I_{10}, I_{12}, II_3, II_5, II_7, II_9, IV_2, IV_3, IV_4, IV_5, IV_6, IV_8, IV_9$ ($I_8, I_9, II_3, II_5, II_7, II_9, IV_2, IV_3, IV_4, IV_5, IV_6, IV_8, IV_9$);
- б) равна 1 для включений V_1 (I_2 при $k = \frac{2n+1}{3}$, V_1, VI_3).

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i (c_{ijq}), инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$, уменьшается на 1 при расширении H до группы G и

- а) уменьшается с 1 до 0 для включений I_1 при четных k , I_2 при четных k и $k \geq \frac{2n+1}{3}$, I_3 , I_4 при четных $k < \frac{2n}{3}$, I_7 при $n = 3$, VI_3 (I_1 при четных k , I_2 при четных k и $k > \frac{2n+1}{3}$, I_3 , I_4 при четных $k < \frac{2n}{3}$, I_6 при $n = 5$, I_7 при $n = 3$, I_{10});
- б) уменьшается с 2 до 1 для включений II_2 , II_4 , II_6 (I_4 при $k = \frac{2n}{3}$, I_6 при $n = 3$, I_7 при $n = 2$, II_2 , II_4 , II_6 , VI_2).

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i (c_{ijq}), инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$, уменьшается на 2 при расширении H до группы G и

- а) уменьшается с 2 до 0 для включений I_4 при четных $k \geq \frac{2n}{3}$, I_5 при нечетных n , I_6 при $n = 3$, I_{11} , IV_7 , VI_2 (I_4 при четных $k > \frac{2n}{3}$, I_5 при нечетных n , I_{11} , IV_7);
- б) уменьшается с 3 до 1 для включений II_1 (II_1 , VI_1).

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i , инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$, уменьшается с 3 до 0 при расширении H до группы G для включения VI_1 .

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i (c_{ijq}), инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$, уменьшается на 6 при расширении H до группы G и

- а) изменяется с 6 до 0 для включения (I_{12});
- б) уменьшается с 7 до 1 для включений II_8 (II_8).

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i (c_{ijq}), инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$, уменьшается с 10 до 0 при расширении H до группы G для включений IV_{10} (IV_{10}).

Размерность пространства тензоров c_{jq}^i (c_{ijq}), инвариантных относительно $\Phi(H)$ и $\Psi(G)$, при расширении H до группы G для включения III_1 уменьшается с $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$ до 1 при четных k и до 0 при нечетных k вне зависимости от типа тензора.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1. В теореме сохранена нумерация включений таблицы 5 [3].
2. Переменные k и n принимают натуральные значения.
3. Из-за очень больших трудностей в разложении тензорного произведения на неприводимые нами не рассмотрено включение IV_1 .
4. Результаты для тензоров c_{ijq} даны в круглых скобках.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen. В. 3. Leipzig, 1893. [2] Морозов В. В. // Матем. сб. 1939. Т. 5 (47). С. 355–390. [3] Дынкин Е. Б. // Труды ММО. 1952. Т. 1. С. 39–166. [4] Мантуров О. В. // ДАН СССР. 1985. Т. 281. С. 1048–1051.