Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Гуревич, Устойчиво-возвратные неотрицательные матрицы, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm981>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:24:16

УСТОЙЧИВО-ВОЗВРАТНЫЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Б. М. ГУРЕВИЧ

Конечная или бесконечная квадратная матрица Q с элементами $q_{ij} = q_{ij}^{(1)} \geq 0$, $i, j \in \mathbb{N}$, называется *неразложимой* [1], если для всякой пары (i, j) найдется такое $n \geq 1$, что $q_{ij}^{(n)} > 0$ ($q_{ij}^{(n)}$ – соответствующий элемент матрицы Q^n). Свойство неразложимости удобно выражать в геометрических терминах. Пусть G_Q – ориентированный граф, вершинами которого служат номера строк (и столбцов) матрицы Q , а ребрами – те пары (i, j) , для которых $q_{ij} > 0$. В таком случае неразложимость Q равносильна связности графа G_Q , т.е. существованию для любых двух его вершин i и j такого пути, который ведет из i в j (путем в ориентированном графе G , ведущим из вершины i в вершину j , будем называть такую последовательность вершин $\gamma = (i_0, \dots, i_n)$, что $i_0 = i$, $i_n = j$ и (i_k, i_{k+1}) при $0 \leq k \leq n-1$ – ребро графа G ; будем говорить, что путь γ содержит все свои вершины i_k и все ребра (i_k, i_{k+1})). Еще одна интерпретация этого свойства носит вероятностный характер: если Q – стохастическая матрица, то она определяет цепь Маркова с конечным или счетным числом состояний, и неразложимость Q означает, что состояния этой цепи образуют один существенный класс. Если эта цепь Маркова аperiodична, будем также называть Q .

Для любого множества $V \subset \mathbb{N}$ назовем *подматрицей с носителем V* матрицы Q результат применения к Q двух операций: вычеркивания всех строк и столбцов с номерами, не входящими в V , и замены нулями любого множества оставшихся элементов (эта терминология немного отличается от общепринятой, ср. [2]). Если упомянутой замены не происходит, подматрица называется *главной*. Любая подматрица Q' матрицы Q есть снова квадратная матрица, строки и столбцы которой занумерованы числами $i \in \text{supp}(Q')$, где $\text{supp}(Q')$ – носитель Q' . Ей (точно так же, как и Q) отвечает граф $G_{Q'}$, являющийся подграфом графа Q . Очевидно, это соответствие между подматрицами и подграфами является взаимнооднозначным, причем неразложимым подматрицам отвечают связные подграфы. В дальнейшем будем писать $Q' \subset Q$ и $G' \subset G$, если, соответственно, Q' – подматрица матрицы Q и G' – подграф графа G .

Для любой неотрицательной матрицы Q положим

$$(1) \quad \lambda(Q) = \sup_{Q'} \lambda(Q'),$$

где $\lambda(Q')$ – максимальное по модулю собственное число конечной подматрицы $Q' \subset Q$ и $\sup$ берется по всем таким подматрицам (по теореме Перрона–Фробениуса $\lambda(Q') \geq 0$, см. [1]). Можно показать, что если матрица Q неразложима, то в правой части (1) достаточно ограничиться конечными неразложимыми главными подматрицами Q' .

Следующее определение подсказано аналогией со стохастическими матрицами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (ср. [3]). Неразложимая матрица Q называется *возвратной*, если при всех $i, j \in \mathbb{N}$

$$(2) \quad \sum_n q_{ij}^{(n)} [\lambda(Q)]^{-n} = \infty,$$

и *положительно-возвратной*, если при всех $i, j \in \mathbb{N}$

$$(3) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} q_{ij}^{(n)} [\lambda(Q)]^{-n} \neq 0$$

(достаточно, чтобы (2) и (3) выполнялись хотя бы для одной пары (i, j)).

Основным для нас будет

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-16-090) и Международного научного фонда (грант № M8X000).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем неразложимую возвратную неотрицательную матрицу Q *устойчиво-возвратной*, если для любого конечного набора J пар (i, j) , удовлетворяющих условию $q_{ij} > 0$, найдется такое $\varepsilon > 0$, что, произвольно изменив q_{ij} для каждой из этих пар не более чем на ε и оставив неизменными остальные q_{ij} , мы снова получим возвратную матрицу.

Ясно, что если $\varepsilon < \min\{q_{ij}, (i, j) \in J\}$, то описанное только что возмущение матрицы Q не меняет графа G_Q .

Цель этой заметки – указать несколько свойств неотрицательных матриц, тесно связанных с устойчивой возвратностью, а отчасти и равносильных ей. Некоторые из этих свойств, как мы увидим, хорошо известны, другие, в частности, сама устойчивая возвратность, по-видимому, до сих пор не рассматривались. Заметим еще, что все формулируемые ниже результаты содержательны лишь для бесконечных матриц.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая устойчиво-возвратная неразложимая матрица положительно-возвратна; обратное неверно.*

ТЕОРЕМА 2. *Неразложимая матрица Q устойчиво-возвратна в том и только том случае, когда для любой ее неразложимой собственной подматрицы Q' выполняется неравенство: $\lambda(Q') < \lambda(Q)$.*

Для частного случая матриц, состоящих из нулей и единиц, эта теорема по существу содержится в [4].

ТЕОРЕМА 3. *Неразложимая апериодическая стохастическая матрица Q устойчиво-возвратна в том и только том случае, когда она геометрически-эргодична (см. [3]).*

СЛЕДСТВИЕ. *Геометрическая эргодичность неразложимой апериодической возвратной стохастической матрицы Q равносильна справедливости для любой ее неразложимой собственной подматрицы Q' неравенства $\lambda(Q') < 1$.*

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. В формулировках теоремы 2 и следствия можно опустить требование неразложимости подматрицы Q' .

2. Если бы в применении к стохастическим матрицам мы модифицировали определение 2, потребовав, чтобы возмущенная матрица оставалась стохастической, это не привело бы ни к какому содержательному результату. С другой стороны, заметим, что в следствии фигурируют лишь сама стохастическая матрица и ее подматрицы.

Пусть $\mathcal{F}(Q)$ – совокупность неразложимых конечных главных подматриц бесконечной неотрицательной матрицы Q . Нетрудно показать, что если Q неразложима, то $\mathcal{F}(Q) \neq \emptyset$ и, более того, найдется такая последовательность $\{F_n, n \geq 1\}$, $F_n \in \mathcal{F}(Q)$, что $F_n \subset F_{n+1}$ и всякий элемент матрицы Q становится элементом F_n при достаточно большом n . При любых $F \in \mathcal{F}(Q)$, $i, j \in \text{supp}(F)$ рассмотрим множество $\Gamma_{ij}(Q | F)$ путей в графе G_Q , ведущих из i в j и внешних по отношению к G_F , т.е. не содержащих ни одной вершины из $\text{supp}(F)$, кроме i и j . Если $i \neq j$ и $\Gamma_{ij}(Q | F) \neq \emptyset$, обозначим γ_{ji} кратчайший путь в G_F , ведущий из j в i (любой, если их несколько). Пусть $V_{ij}(F)$ – множество вершин графа G_Q , каждая из которых содержится в каком-нибудь пути $\gamma \in \Gamma_{ij}(Q | F)$ или (при $i \neq j$) в γ_{ji} , и $E_{ij}(F)$ – множество ребер графа G_Q , которые выделяются точно таким же условием. Введем подматрицу $Q_{ij}(F) \subset Q$, получаемую из Q вычеркиванием строк и столбцов с номерами, не входящими в $V_{ij}(F)$, и заменой нулями всех q_{mn} с $(m, n) \notin E_{ij}(F)$. Легко видеть, что $Q_{ij}(F)$ – неразложимая матрица (которая может быть и пустой, что будет записываться в виде $Q_{ij}(F) = \emptyset$).

ТЕОРЕМА 4. *Если у неразложимой матрицы Q найдется такая подматрица $F \in \mathcal{F}(Q)$, что $\lambda(F) \geq \lambda(Q_{ij}(F))$ при всех $i, j \in \text{supp}(F)$, для которых $Q_{ij}(F) \neq \emptyset$, то матрица Q устойчиво-возвратна.*

Автор благодарен С.В. Савченко за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. [2] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. [3] Vere-Jones D. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1962. V. 13. P. 7–28. [4] Salama Ibrahim A. // Pacific J. Math. 1988. V. 134. P. 324–341.