Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, О неизгибаемости полиэдральных сфер с четноугольными гранями, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm982>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:15:05

О НЕИЗГИБАЕМОСТИ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ СФЕР С ЧЕТНОУГОЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

В этой заметке мы продолжаем изучение вопроса о неизгибаемости невыпуклых многогранников в $\mathbf{E}^3$, начатое в работах [2]–[4]. Метод графа изгибания, описанный в этих работах, находит здесь дальнейшее развитие. С основными понятиями, результатами и проблемами теории изгибания поверхностей можно познакомиться в сборнике [1].

Рассмотрим полиэдральную сферу S^2 , составленную из евклидовых многоугольников, и ее вложение $f: S^2 \rightarrow \mathbf{E}^3$, при котором каждая грань сферы S^2 отображается *изометрично* в *плоский* многоугольник, расположенный в пространстве.

Допустим, что вложенная сфера $f(S^2)$ допускает непрерывное изгибание φ , в процессе которого каждая грань остается плоской. В процессе изгибания φ хотя бы один двугранный угол, т.е. угол между плоскостями двух смежных граней, изменяется. Будем называть всякое ребро изменяющегося при φ двугранного угла, *отмеченным*. Рассмотрим изгибание φ и будем предполагать его настолько малым, что вложенная сфера при изгибании φ остается по-прежнему вложенной. Множество всех отмеченных ребер образует граф Γ . Ребра графа – это отмеченные ребра сферы $f(S^2)$, а вершины графа – это вершины отмеченных ребер и только они. Напомним свойства графа отмеченных ребер.

Г1. Пусть изгибание φ существует, тогда граф Γ не пуст.

Г2. Граф Γ разбивает сферу $f(S^2)$ на несколько компонент связности. Каждое отмеченное ребро разделяет две различные компоненты, т.е. является границей двух граней полиэдральной сферы $f(S^2)$, принадлежащих разным компонентам.

Г3. В каждой вершине графа должно встречаться не менее двух ребер.

Г4. Если в вершине графа Γ сходятся только два его ребра, то они лежат на прямой.

Г5. В вершине графа Γ не может сходиться ровно 3 его ребра.

По той же схеме, как это делалось в [3], [4], перейдем от графа отмеченных ребер к другому, так называемому *графу изгибания* Γ_φ . Вершинами графа изгибания Γ_φ являются лишь те вершины графа Γ , в которых сходится не менее 4 отмеченных ребер. Рассмотрим произвольное ребро e из графа Γ и выделим те отмеченные ребра, которые можно соединить с e реберным путем, проходящим через вершины графа Γ степени 2. В силу ограниченности сферы $f(S^2)$ и свойства Г4 такие ребра образуют прямолинейный отрезок, который является по соглашению *ребром* графа изгибания Γ_φ .

Г $_\varphi$ 1. Все ребра графа Γ_φ суть прямолинейные отрезки, состоящие из одного или нескольких ребер, входящих в граф Γ .

Г $_\varphi$ 2. Никакие два ребра графа Γ_φ не имеют двух общих концов.

Это вытекает из того, что $f(S^2)$ есть вложение в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, в графе изгибания нет двуреберных циклов.

Г $_\varphi$ 3. В каждой вершине графа Γ_φ сходится не менее 4 ребер.

Г $_\varphi$ 4. Граф Γ_φ разбивает сферу на области, среди которых по крайней мере один треугольник (под треугольником понимается область, граница которой состоит из трех и только трех ребер графа Γ_φ).

Точно так же, как и в [2]–[4], граф изгибания Γ_φ разбивает многогранную поверхность $f(S^2)$ на связанные области, среди которых есть по крайней мере восемь таких, что граница каждой из них есть треугольник в графе Γ_φ (“условие 8 треугольников”).

ТЕОРЕМА 1. Пусть полиэдральная сфера S^2 содержит лишь четноугольные грани и все ее вершины – строго положительной кривизны. Пусть f – вложение сферы S^2 в $\mathbf{E}^3$, которое локально изометрично и линейно на каждой грани. Тогда сфера $f(S^2)$ не допускает изгибания, при котором все грани остаются плоскими.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00166) и Немецкого научно-исследовательского общества (DFG).

Доказательство теоремы проведем от противного. Пусть $f(S^2)$ допускает непрерывное изгибание φ , и пусть Γ_φ – соответствующий граф изгибания.

В силу строгой положительности кривизны вершин граф изгибания Γ_φ совпадает с графом отмеченных ребер Γ . Действительно, так как каждая вершина v полиэдра S^2 имеет строго положительную кривизну, то в ней не могут сходиться лишь два отмеченных ребра (свойство $\Gamma 4$). Так как в графе Γ нет двойных вершин, то каждое ребро графа Γ является ребром графа Γ_φ и обратно. Таким образом, граф Γ совпадает с Γ_φ . В графе $\Gamma = \Gamma_\varphi$ существуют, по крайней мере, восемь треугольников. Каждый треугольник составлен из трех и только трех ребер графа Γ . Такой треугольник является одномерным циклом на сфере $f(S^2)$ и, следовательно, гомологичным 0 по модулю 2. Заметим однако, что на ориентируемой поверхности с четноугольными гранями любой реберный цикл, гомологичный нулю по модулю 2, как нетрудно доказать, содержит четное число ребер (см., например, [4]). Полученное противоречие доказывает теорему 1.

Следствие. Каждое невыпуклое вложение поверхности выпуклого многогранника в евклидово пространство E^3 с четноугольными гранями неизгибаемо.

Теорема 1 допускает следующее усиление.

Предложение 1. Пусть полиэдральная сфера S^2 содержит не более семи нечетноугольных граней и все ее вершины – строго положительной кривизны. Пусть f – вложение сферы S^2 в E^3 , которое локально изометрично и линейно на каждой грани. Тогда сфера $f(S^2)$ не допускает изгибания, при котором все грани остаются плоскими.

Доказательство. Допустим, что данная поверхность изгибаема. Среди областей, на которые граф Γ_φ разбивает поверхность $f(S^2)$, имеется по крайней мере восемь областей, обозначим их через F_i , которые ограничены треугольниками Δ_i (условие восьми треугольников). Так как все вершины на S^2 имеют строго положительную кривизну, то графы $\Gamma = \Gamma_\varphi$ и каждая сторона треугольника Δ_i состоит из одного и только одного ребра многогранной поверхности $f(S^2)$.

Воспользуемся следующим фактом: если односвязная область состоит лишь из четноугольных граней, то граница этой области есть также четноугольник. Тогда, если бы полиэдральная сфера S^2 имела бы менее восьми нечетноугольных граней, то по крайней мере одна из областей $F_1, \dots, F_8$ состояла бы только из четноугольных граней и, следовательно, ограничивающий ее контур не мог бы быть треугольным. Отсюда следует предложение 1.

В заключение заметим, что изложенные здесь результаты верны также и для значительно более широкого класса отображений f полиэдральной сферы S^2 . А именно, по-прежнему предполагая отображение f локально изометричным и линейным на каждой грани, будем требовать от отображения f лишь то, что оно является погружением реберного остова полиэдра S^2 в E^3 . Другими словами, результаты остаются верными, даже если допускается, что образ $f(S^2)$ может самопересекаться, но при этом образы ребер, исходящих из одной вершины v сферы S^2 , пересекаются, как и их прообразы, в одной точке – в образе вершины $f(v)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Исследования по метрической теории поверхностей. Сборник статей. Сер. математика. Новое в зарубежной науке. Т. 18. М.: Мир, 1980. [2] Dolbilen N. P., Stan'ko M. A., Stogrin M. I. Rigidity of Quadrillages of the Sphere // Международная конференция по геометрии "в целом". Черкассы, 1995. С. 22–23. [3] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Неизгибаемость квадрильяжа сферы // ДАН. 1996 (в печати). [4] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 157–158. [5] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. // Труды МИАН. 1991. Т. 196. С. 66–85.