Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, Об исследованиях Геннадия Семёновича
Маканина по алгоритмическим вопросам теории групп
и полугрупп, *УМН*, 2018, том 73, выпуск 3, 183–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:38:56

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

**Об исследованиях Геннадия Семёновича Маканина
по алгоритмическим вопросам теории групп и полугрупп****С. И. Адян**

18 мая 2017 г. ушёл из жизни Геннадий Семёнович Маканин, известный российский математик, автор выдающихся работ по алгоритмическим вопросам алгебры и логики, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела математической логики МИАН, лауреат премии им. И. М. Виноградова Российской академии наук.

Г. С. Маканин родился 19 мая 1938 г. в г. Орске Оренбургской области в семье инженера и учительницы средней школы. После окончания средней школы в 1955 г. он поступил на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова. Старший брат Геннадия Семёновича, Владимир (1937–2017), также окончивший мехмат МГУ, впоследствии стал хорошо известным русским писателем.

Во время учёбы в университете Г. С. Маканин заинтересовался математической логикой и алгоритмическими вопросами математики, которые в те годы начали привлекать интерес широкого круга математиков многих стран мира, в том числе и в Советском Союзе. На мехмате Г. С. Маканин занимался под руководством профессора С. А. Яновской. Хотя он успешно учился и защитил дипломную работу, в аспирантуру на мехмате МГУ он не был рекомендован. После окончания учёбы на мехмате МГУ в 1963 г. по рекомендации заведующего кафедрой математической логики МГУ известного тополога и логика члена-корреспондента АН СССР А. А. Маркова он поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. Его научным руководителем стал Марков, который в те годы активно занимался алгоритмическими проблемами.

В аспирантуре Г. С. Маканин познакомился с результатами С. И. Адяна и выразил желание работать под его руководством. Таким образом С. И. Адян стал научным руководителем диссертации Г. С. Маканина, которую тот защитил в МИАН в 1966 г.

Работа написана при участии Л. Д. Беклемишева, И. Г. Лысёнка, А. А. Разборова, А. Л. Таламбуцы.

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9823>

После окончания аспирантуры и защиты кандидатской диссертации Г. С. Маканин в том же 1966 г. стал сотрудником отдела математической логики МИАН. Здесь он проработал всю оставшуюся жизнь.

Геннадий Семёнович внёс большой вклад в исследование нескольких важных алгоритмических направлений в теории полугрупп и групп: исследование полугрупп с неразрешимой проблемой распознавания равенства, задаваемых малым числом соотношений; исследование проблемы распознавания равенства для групп, задаваемых соотношениями с условием малого сокращения; исследование проблемы распознавания сопряжённости и построение централизаторов элементов в группах кос. Однако главным достижением Геннадия Семёновича, безусловно, является найденный им алгоритм, распознающий существование решения произвольной заданной системы уравнений сначала в свободной полугруппе, а потом в свободной группе. Эта задача была известна своей трудностью и долгое время не поддавалась алгоритмическому решению, несмотря на ряд продвижений частного характера. Найденный Геннадием Семёновичем алгоритм, так же как и служащий его основой не менее важный алгоритм для решения систем уравнений в полугруппах, в настоящее время заслуженно носит имя *“алгоритм Маканина”*. Эти результаты составили предмет его докторской диссертации, защищённой в МИАН в 1977 г. Результаты Маканина по уравнениям в группах и полугруппах вызвали большой резонанс, прежде всего в области прикладной информатики. В 1978 г. Г. С. Маканин был приглашённым докладчиком на Международном математическом конгрессе в Хельсинки. В последние годы на базе его результатов было получено решение ещё одной известной проблемы – так называемой проблемы Тарского о разрешимости элементарной теории свободной группы.

К сожалению, в течение многих лет, начиная с 1980-х годов, Геннадий Семёнович страдал тяжёлым заболеванием почек. Это не могло не сказаться на продуктивности его научной работы. Несмотря на это, до последних лет жизни он продолжал упорно и самоотверженно заниматься наукой. Большой опорой в жизни Геннадия Семёновича была его семья, прежде всего его жена Татьяна. Добрая память о Геннадии Семёновиче Макаanine сохранится в Математическом институте им. В. А. Стеклова.

1. Алгоритмические проблемы в математике

Важные алгоритмические проблемы в области математики, впоследствии оказавшиеся неразрешимыми, были сформулированы ещё в начале XX в. В частности, к таким проблемам относится поставленная ещё в 1900 г. десятая проблема Д. Гильберта, в которой требовалось построить алгоритм для распознавания существования целочисленного решения данного диофантова уравнения с целыми коэффициентами. Другим важным вопросом была проблема распознавания равенства слов в полугруппе, заданной конечным числом порождающих и определяющих соотношений, – проблема А. Туэ, поставленная в 1912 г. Аналогичные алгоритмические проблемы распознавания равенства и сопряжённости элементов в группе, заданной порождающими и определяющими соотношениями, а также проблема распознавания изоморфизма двух групп с такими заданиями были поставлены в 1914 г. топологом М. Дёном в связи с тем, что так задаются фундаментальные группы топологических многообразий. Все эти алгоритмические проблемы получили новое освещение в процессе развития математической логики как самостоятельной области математики со своей проблематикой и методами. (Краткую историю развития математической логики как самостоятельной математической дисциплины можно посмотреть в статье [1], опубликованной в “Математической энциклопедии”.)

В истории развития математической логики прежде всего следует отметить исследование логических и логико-математических исчислений, среди которых основным является классическое исчисление предикатов первого порядка. Расширение языка булевой логики такими понятиями, как предикаты, предметные переменные

и кванторы, было начато в работах Г. Фреге и Ч. Пирса ещё в конце XIX в., что дало возможность применить этот язык к вопросам оснований математики, поднятым Д. Гильбертом. Эта работа была впоследствии продолжена в совместном труде Б. Рассела и А. Уайтхэда “*Principia Mathematica*” (1910 г.), где предпринята попытка построения всей математики на основе единой формальной системы.

Язык логики предикатов оказался очень удобным и стал широко использоваться в современной математике. В 1930 г. К. Гёдель доказал теорему о полноте логики предикатов первого порядка, согласно которой множество всех тождественно истинных чисто логических утверждений совпадает с множеством формул, выводимых в исчислении предикатов. Д. Гильберт считал проблему построения алгоритма, распознающего выводимость любого заданного утверждения в исчислении предикатов, – названную им *das Entscheidungsproblem*, – главной проблемой математической логики, если не всей математики в целом. Эта проблема действительно могла бы претендовать на такой статус, если бы оказалось, что требуемый алгоритм существует. Однако надеждам Гильберта не суждено было сбыться.

Размышления, в частности, над этой проблемой привели ряд математиков и логиков, прежде всего А. Чёрча, А. Тьюринга и Э. Поста, к попыткам дать математически строгую формулировку общих понятий алгоритма и вычислимой функции. После работ К. Гёделя, А. Чёрча, А. Тьюринга и Э. Поста в середине 1930-х годов появились такие универсальные модели вычислений, как рекурсивные функции, лямбда-исчисление, машины Тьюринга. А. Чёрч (вместе со своими учениками Дж. Б. Россером и С. К. Клини) обнаружил, что гёделевские рекурсивные функции и лямбда-исчисление задают один и тот же класс вычислимых функций. Это позволило ему в 1936 г. в статье [7] высказать далеко идущий тезис Чёрча о том, что эти модели дают эквивалентные модели понятия алгоритма, адекватные по своим вычислительным возможностям интуитивному понятию алгоритма, и привести первые естественные примеры неразрешимых в этом смысле алгоритмических проблем. В частности, А. Чёрч в статье [8] доказал невозможность построения алгоритма для распознавания выводимости данной формулы в логике предикатов первого порядка, тем самым установив алгоритмическую неразрешимость *Entscheidungsproblem*. Из результатов К. Гёделя следовало также, что невозможен алгоритм для распознавания истинности любой данной арифметической формулы.

Тезис Чёрча стал ещё более убедителен после того, как, независимо от работ Чёрча и его учеников и почти одновременно с ними, Алан Тьюринг в работе [31] предложил очень простую и интуитивно убедительную универсальную модель вычислений – машины Тьюринга, высказав для неё аналогичный тезис. Тьюринг показал, что его машины задают тот же класс вычислимых функций, что и рекурсивные функции и лямбда-исчисление, и также доказал на их основе неразрешимость *Entscheidungsproblem*. Позже появились и другие вычислительные модели: нормальные алгорифмы Маркова, машины с неограниченными регистрами, машины Минского и др. Все такие модели неизменно оказывались эквивалентными машинам Тьюринга по своей вычислительной силе. Эти уточнения позволили не только строить конкретные алгоритмы для решения той или иной алгоритмической задачи, но и доказывать невозможность построения искомых алгоритмов на языке той или иной уточнённой формы алгоритмов. Самым простым примером неразрешимой алгоритмической проблемы явилась проблема распознавания остановки работы машины Тьюринга при конкретном исходном значении входных данных.

В 1940-е годы исследованиями в этом направлении начали заниматься и советские математики А. А. Марков, П. С. Новиков, А. И. Мальцев и их ученики, а в США А. Тарский и А. Чёрч со своими учениками. В течение всей второй половины XX в. продолжалась активная работа по исследованию как старых классических алгоритмических проблем, поставленных в начале XX в. в логике, алгебре, теории чисел, то-

пологии, так и новых алгоритмических проблем, которые всё чаще стали возникать в разных областях математики. Вскоре и математики традиционных направлений начали понимать, что машины Тьюринга, алгоритмы и их программирование для решения математических задач на компьютерах, а также так называемые неразрешимые алгоритмические проблемы – это не игрушки, выдуманные самими логиками, а весьма серьёзное и важное направление для дальнейшего развития как фундаментальной, так и прикладной математики.

В 1947 г. А. А. Марков (см. [19], [20]) впервые построил пример ассоциативной системы, которая с помощью конечной системы правил подстановок слов в конечном алфавите задаёт полугруппу с алгоритмически неразрешимой проблемой распознавания равенства элементов. Тем самым он получил отрицательное решение упомянутой выше проблемы Туэ, поставленной в 1912 г. При этом для всех стало ясно, что корректная формулировка этой проблемы должна состоять в следующем: *для всякой ли ассоциативной системы, заданной конечным числом определяющих соотношений, алгоритмически разрешима проблема распознавания равенства элементов в полугруппе, определяемой этой ассоциативной системой?* Марков доказал, что это не так, впервые построив пример конечно определённой полугруппы с алгоритмически неразрешимой проблемой распознавания равенства. В том же году аналогичный пример был построен в США Э. Постом. Наряду со своим основным результатом о неразрешимости проблемы Туэ 1912 г. Марков также доказал неразрешимость алгоритмической проблемы распознавания изоморфизма двух полугрупп, заданных конечным числом определяющих соотношений, а также алгоритмическую нераспознаваемость довольно широкого класса инвариантных свойств для класса полугрупп, задаваемых определяющими соотношениями. В частности, он доказал нераспознаваемость в этом классе полугрупп любого инвариантного полугруппового свойства P , для которого выполняются следующие два условия: (1) существует полугруппа S , обладающая этим свойством P , и (2) существует полугруппа, не вложимая в полугруппу, не обладающую свойством P . Конъюнкция этих двух условий в литературе получила название *условия А. А. Маркова*. П. С. Новиков построил первый пример конечно определённой группы с алгоритмически неразрешимой проблемой распознавания равенства. Полное доказательство указанных выше результатов А. А. Марков и П. С. Новиков опубликовали в своих монографиях [21] и [25], вышедших в “Трудах МИАН” в 1954 и 1955 гг. Вскоре, основываясь на существовании группы с неразрешимой проблемой распознавания равенства, аспирант П. С. Новикова С. И. Адян в своей кандидатской диссертации доказал теорему о неразрешимости алгоритмических проблем распознавания инвариантных групповых свойств конечно определённых групп, аналогичную общей теореме А. А. Маркова о нераспознаваемости инвариантных полугрупповых свойств для ассоциативных систем. Основываясь на результате С. И. Адяна, А. А. Марков в 1958 г. построил семейство четырёхмерных многообразий, для которого алгоритмически неразрешима проблема распознавания гомеоморфизма данному фиксированному многообразию M^4 с тривиальной фундаментальной группой.

Хотя в середине 1950-х годов на мехмате ещё не было кафедры математической логики, там уже шла активная научная работа и работа со студентами. П. С. Новиков ежегодно по совместительству читал спецкурсы по тематике, относящейся к математической логике и основаниям математики. Под его же руководством на мехмате работал так называемый “большой семинар” по математической логике и по основаниям математики. Соруководителем этого семинара была профессор С. А. Яновская, которая была сотрудницей кабинета истории математики. В работе этого семинара активно участвовали не только студенты мехмата и философского факультета МГУ, но и многочисленные ученики П. С. Новикова из Педагогического института

им. В. И. Ленина, где Петр Сергеевич заведовал кафедрой математического анализа. Приезжали на семинар с научными докладами и зарубежные гости из европейских стран. Кафедра математической логики на мехмате появилась только в 1959 г. – после того, как на четвёртом Всесоюзном съезде математиков СССР, который проходил в 1956 г. в МГУ им. М. В. Ломоносова, было принято специальное решение рекомендовать Министерству образования и Академии наук СССР принять все меры к тому, чтобы были открыты кафедра математической логики на механико-математическом факультете МГУ и отдел математической логики в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. К тому времени эта область математики уже во всём мире стала одним из наиболее значимых разделов, как в исследовании фундаментальных проблем оснований математики, так и в решении прикладных задач программирования, информатики, математической лингвистики и др.

Отдел математической логики в Математическом институте им. В. А. Стеклова был открыт в 1957 г., заведующим этим отделом стал член-корр. АН СССР П. С. Новиков; на мехмате МГУ кафедра математической логики была открыта в 1959 г., а заведующим стал незадолго до этого переехавший из Ленинграда в Москву член-корр. АН СССР А. А. Марков.

2. Ранние работы Г. С. Маканина

Г. С. Маканин был одним из первых выпускников кафедры математической логики МГУ, где его научным руководителем была профессор С. А. Яновская. Дипломная работа Г. С. Маканина, которую он защитил в 1963 г., была связана с результатом Чёрча об алгоритмической неразрешимости проблемы распознавания выводимости формул в логике предикатов. Сразу был замечен простой факт, что фрагмент логики предикатов, в котором используются только одноместные предикаты, является алгоритмически разрешимым. В 1959 г. Я. Шурань опубликовал работу [28], в которой он доказал невозможность алгоритма для распознавания выводимости в логике предикатов уже для формул вида $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall y \Phi(x_1, x_2, x_3, y)$, содержащих только один двухместный предикат и какое-то количество одноместных предикатов, сведя к таким формулам все формулы логики предикатов. В своей дипломной работе 1963 г., опубликованной чуть позже в статье [M1], Г. С. Маканин доказал разрешимость фрагмента логики предикатов первого порядка, порожаемого формулами вида $\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall y \Phi(x_1, x_2, x_3, y)$, которые наряду с любыми одноместными предикатами содержат вхождения трёхместного предиката $R(u, v, w)$ с единственным ограничением на вхождения переменных в атомарные подформулы вида $R(x_i, x_j, x_k)$, а именно:

если в рассматриваемую формулу входят две атомарные подформулы $R(x_i, x_j, x_k)$ и $R(x_l, x_m, x_n)$ с одинаковым числом переменных: $|\{i, j, k\}| = |\{l, m, n\}| = 2$, то состав переменных в них одинаковый: $\{i, j, k\} = \{l, m, n\}$.

Он доказал, что произвольная формула этого вида сводится к формуле, содержащей только вхождения одноместных предикатов, откуда следует разрешимость рассматриваемого фрагмента логики предикатов. При этом автор также обратил внимание на то, что отсюда легко следует и аналогичный результат для формул с двухместным предикатом $Q(u, v)$ и аналогичным ограничением:

если формула содержит атомарные подформулы вида $Q(x_i, x_j)$ и $Q(x_k, x_l)$ с одинаковым числом переменных, т. е. если $|\{i, j\}| = |\{k, l\}| = 2$, то $\{i, j\} = \{k, l\}$.

В конце 1963 г., по рекомендации заведующего кафедрой математической логики мехмата МГУ А. А. Маркова, Г. С. Маканин поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова, где стал работать под руководством доктора

физ.-матем. наук С. И. Адяна, защитившего в том же году свою докторскую диссертацию в МИАН. В одной из глав этой диссертации доказывалось сведение проблемы распознавания равенства слов в полугруппе, задаваемой определяющими соотношениями вида $A_i = 1$, где все слова A_i имеют одну и ту же длину, к проблеме распознавания равенства слов для её максимальной подгруппы, которая естественно порождается всеми двусторонне обратимыми элементами этой полугруппы и задаётся таким же числом определяющих соотношений. С. И. Адян использовал свою теорему сведения для решения всё ещё открытой в то время проблемы распознавания равенства слов для любой полугруппы, задаваемой одним соотношением вида $A = 1$, на основе доказанной ещё в 1931 г. и ставшей классической теоремы В. Магнуса о разрешимости той же проблемы для групп с одним определяющим соотношением. Теорема сведения Адяна доказывалась достаточно сложной совместной индукцией, в которой попутно надо было доказывать, что максимальные подгруппы рассматриваемых полугрупп порождаются всеми двусторонне обратимыми кусками, на которые разлагаются левые части A_i определяющих соотношений рассматриваемых полугрупп.

Перед Г. С. Маканиным была поставлена задача, используя ту же самую технику и совместную индукцию, распространить это сведение на полугруппы, задаваемые системой определяющих соотношений такого же вида, но без условия равенства их длин. Г. С. Маканин успешно решил эту задачу. Полученное им обобщение теоремы Адяна о максимальной группе, вложенной в полугруппу, задаваемую системой определяющих соотношений специального вида $A_i = 1$, составило первую часть его кандидатской диссертации. Во второй части диссертации Г. С. Маканин усилил известный результат В. А. Тартаковского о разрешимости проблемы распознавания равенства слов в группах, задаваемых системой определяющих соотношений, удовлетворяющей условию малого взаимного сокращения определяющих слов с параметром $p < 1/6$. Ему удалось уменьшить этот параметр до $2/11$. Вскоре после опубликования этого результата Маканина Р. Линдон, используя известные диаграммы Ван Кампена, понизил границу этого параметра до $p < 1/5$. Позже выяснилось, что найденная Линдоном граница является неувлучшаемой, так как А. И. Гольберг доказал, что любая конечно определённая группа может быть задана системой определяющих соотношений с мерой налегания определяющих слов, равной $1/5$. Тем самым, стало ясно, что и промежуточный результат Маканина был достаточно близок к неувлучшаемому.

В эти годы наиболее впечатляющим событием в области алгоритмических вопросов алгебры было построение ленинградским учеником А. А. Маркова Г. С. Цейтиным весьма простого примера полугруппы с семью определяющими соотношениями, имеющей неразрешимую алгоритмическую проблему распознавания равенства слов (см. [30]). При этом задание этой полугруппы было настолько коротким, что легко записывалось на доске. В 1966 г. Г. С. Маканин сумел с помощью простой кодировки сократить число соотношений в конструкции Цейтина до пяти. При этом построенная Маканиным система тоже была короткой и легко обозримой. В том же году Ю. В. Матиясевич в Ленинграде, также опираясь на пример Цейтина, построил другой пример полугруппы с пятью соотношениями, но его конструкция уже содержала одно очень длинное соотношение. Во время доклада Г. С. Маканина на семинаре в Москве А. А. Марков предложил ему обменяться информацией с Ю. В. Матиясевичем, высказав гипотезу, что, возможно, совместив две идеи, удастся довести число соотношений до трёх. Следуя этому совету, Г. С. Маканин послал Ю. В. Матиясевичу свой пример с пятью соотношениями и сообщил ему об идее А. А. Маркова. При этом на всякий случай Маканин опубликовал свой пример в статье [M2]. Узнав об этом результате Маканина из его письма, Ю. В. Матиясевич действительно сумел усилить свой результат, построив полугруппу с неразрешимой проблемой равенства с двумя порождающими и тремя определяющими соотношениями, одно из которых было длинным (см. [22]). К сожалению, опубликованная статья Ю. В. Матиясевича не содержит никакого упоминания о промежуточном результате Г. С. Маканина с пятью

соотношениями и о его кодировке, а сам Маканин узнал об этой статье Матиясевича только после её публикации.

Большой интерес представляют также исследования Г. С. Маканина и его учеников, относящиеся к алгоритмическим проблемам для групп кос, задаваемых определяющими соотношениями. Определяющие соотношения для групп кос были впервые введены Э. Артином в 1925 г. [4]. В той же статье Артин указал простой алгоритм для распознавания равенства слов, представляющих элементы в этой группе. Позже, в сороковые годы были сформулированы алгоритмические проблемы для этих групп, среди которых были проблема распознавания сопряжённости двух заданных элементов и проблема описания централизатора для любого элемента группы кос (см. [18], [5]). В 1968 г. Г. С. Маканин опубликовал заметку в журнале “Доклады АН СССР” с заявлением о том, что он получил положительное решение проблемы сопряжённости в группе кос и собирался подготовить полное доказательство для печати, но его опередил Ф. Гарсайд, опубликовав в работе [11] полное доказательство разрешимости этой проблемы. В этой работе Гарсайд безукоризненно изложил ставшую впоследствии классической технику так называемых фрагментов фундаментального слова Δ_n , квадрат которого порождает центр группы кос с $n + 1$ нитями B_n (см. [2]). В работе [M4] Г. С. Маканин, используя технику Гарсайда, доказал, что централизатор произвольного элемента группы кос является конечно порождённой подгруппой, и описал алгоритм для нахождения множества порождающих для централизатора любого заданного элемента. Вскоре после этого ученики С. И. Адяна и Г. С. Маканина использовали этот алгоритм для точного вычисления централизаторов различных интересных классов элементов группы кос и решения некоторых типов уравнений в группе кос.

3. Проблема распознавания разрешимости уравнений

Ещё в начале 1950-х годов А. А. Марков заинтересовался проблемой распознавания разрешимости уравнений в свободной полугруппе ранга > 1 , которые он называл уравнениями в словах. Дело в том, что он знал способ сведения проблемы распознавания разрешимости уравнений в словах к алгоритму распознавания разрешимости диофантовых уравнений в арифметике (десятая проблема Гильберта), если бы такой алгоритм существовал. Таким образом, Марков надеялся методом “от противного” доказать алгоритмическую неразрешимость для десятой проблемы Гильберта о существовании алгоритма распознавания разрешимости диофантовых уравнений в арифметике.

Так как А. А. Марков не видел пути для доказательства алгоритмической неразрешимости проблемы распознавания существования решения уравнений в словах, он передал тематику этих исследований своему аспиранту Ю. И. Хмелевскому для продолжения исследований с акцентом на возможное положительное решение проблемы. Ю. И. Хмелевский в конце 1960-х годов сумел получить в этом направлении ряд интересных результатов и защитил по этой теме кандидатскую диссертацию (см. [13]). В частности, он указал способ решения уравнений в словах с тремя неизвестными, а также решения систем уравнений, в которых правая и левая части каждого уравнения содержат только две переменные. Ю. И. Хмелевский также доказал, что множество решений каждого бескоэффициентного уравнения в словах с тремя неизвестными может быть представлено с помощью конечного числа так называемых параметрических слов, а множество решений уравнения $x y z = z v x$ с четырьмя неизвестными уже не может быть представлено таким образом. Исследования Ю. И. Хмелевского поколебали надежду на то, что удастся доказать алгоритмическую нераспознаваемость разрешимости уравнений в словах.

Что касается десятой проблемы Гильберта о диофантовых уравнениях в арифметике, ею напрямую активно занимались американские математики из Беркли и других математических центров США. Ими был получен и опубликован целый ряд интересных результатов, связанных с десятой проблемой Гильберта. В частности, в серии опубликованных в США результатов американских математиков М. Дэвиса, Х. Патнэма, Дж. Робинсона и Р. Робинсона были получены результаты, из которых следовало утверждение об алгоритмической нераспознаваемости разрешимости диофантовых уравнений в арифметике, обогащённой дополнительной операцией возведения в степень. Оставалось только доказать существование функции экспоненциального роста, которая может быть выражена через диофантовы уравнения.¹

Наибольшую известность Г. С. Маканину принесли его фундаментальные исследования по проблеме распознавания разрешимости систем уравнений в свободных полугруппах и группах. Основная теорема об алгоритмической распознаваемости разрешимости любых систем уравнений в свободной полугруппе была впервые доказана Г. С. Маканиным в работе [M8] после его многолетней упорной работы над этой задачей. Важную роль в доказательстве Г. С. Маканина сыграла лемма об ограничении показателя периодичности кратчайшего решения данного уравнения в словах, которую доказал В. К. Булитко в статье [6]. Введённая Г. С. Маканиным для этой цели техника так называемых обобщённых уравнений хотя и была основана на тех же общих принципах, что и в работах предшественников, тем не менее вывела исследования в этой области на качественно новый уровень. Сложной совместной индукцией доказывается несколько взаимосвязанных утверждений, зависящих от одних и тех же параметров. Естественно, эта работа получила заслуженное признание специалистов во всём мире, и Г. С. Маканин вскоре получил приглашение выступить с докладом о своих результатах на Международном математическом конгрессе в Хельсинки (см. [M12]). Его результат также привлёк внимание многих специалистов, занимавшихся информатикой, и стал в этой области особенно цитируемым достижением. Начиная с 1970-х годов и по настоящее время многие теоретические задачи, связанные с комбинаторикой слов, имеют важные практические приложения для построения эффективных алгоритмов, и результат о разрешимости уравнений в полугруппах занял среди них очень важное место. К настоящему времени на работу Г. С. Маканина [M8], по подсчётам системы Google Scholar, имеется не менее 570 ссылок, при этом значительная часть ссылок содержится в работах по теории вычислимости и по информатике.

После опубликования работы о разрешимости уравнений в свободных полугруппах Г. С. Маканин попытался применить технику обобщённых уравнений для положительного решения ещё одной интересной и важной алгоритмической задачи – проблемы распознавания разрешимости уравнений в свободных группах. Эта задача оказалась ещё более трудной, и её решение потребовало введения важных дополнительных идей. Положительное решение этой проблемы в общем случае было также

¹В 1960-е годы, будучи сам всецело поглощён работой по поиску положительного решения знаменитой проблемы Бернсайд о существовании бесконечных периодических групп фиксированного периода (подробную историю этой совместной работы с П. С. Новиковым см. в статье [3]), С. И. Адян организовал перевод на русский язык и провел редактирование для публикации в журнале “Математика” (том 8(5), 1964) серии работ американских математиков М. Дэвиса, Х. Патнэма, Дж. Робинсона и Р. Робинсона по 10-й проблеме Гильберта. Этот перевод и публикация были выполнены в надежде на то, что знакомство с этими результатами поможет кому-нибудь из молодых российских математиков получить на их основе отрицательное решение десятой проблемы Гильберта. И в самом деле, именно на этом пути аспиранту Ленинградского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Ю. В. Матиясевичу в работе [23] удалось доказать алгоритмическую неразрешимость десятой проблемы Гильберта о диофантовых уравнениях. По словам Ю. В. Матиясевича, эту задачу перед ним поставил его научный руководитель профессор С. Ю. Маслов.

получено Г. С. Маканиным и опубликовано в статье [M14]. В этом доказательстве важную роль сыграла опубликованная им за десять лет до этого статья [M5]. Полученные до работ Г. С. Маканина результаты об уравнениях в свободной группе были довольно частными. Например, в работе [16] Р. Линдон решил эту задачу для случая уравнения с одним неизвестным, а А. А. Лоренц в работе [17] обобщил этот результат на случай систем уравнений с одним неизвестным. Ю. И. Хмелевский, работы которого были ориентиром для Г. С. Маканина, в [14] и [15] решил эту задачу для уравнений вида $W(x, y) = U$ с двумя неизвестными и одним коэффициентом, где U – константа, а также для уравнений с двумя разделёнными переменными. Найденные доказательства существенно использовали специфику этих случаев.

Есть две интересные алгоритмические проблемы, относящиеся к элементарной теории свободных групп, которые получили название *проблем Тарского*. Это проблема распознавания истинности формул элементарной теории свободной группы и вопрос об эквивалентности элементарных теорий свободных групп разных рангов $N > 1$. К сожалению, нам не удалось найти, где, когда и в связи с чем Альфред Тарский впервые упоминал эти вопросы.² Но несомненным является то, что эти вопросы естественно возникали у всех, кто интересовался вопросами разрешимости элементарных теорий алгебраических систем.

Во второй половине XX в. в теории рекурсии и теории моделей были созданы методы, позволившие получить ответ на вопрос о разрешимости элементарных теорий для многих интересных алгебраических структур (см., например, [18]), но в решении этих естественных вопросов для элементарной теории свободных групп не было заметных успехов. По-видимому, это можно частично объяснить тем, что интересовавшиеся этими задачами исследователи были больше настроены на поиск отрицательного ответа на эти вопросы.

Несомненно, вопрос о разрешимости уравнений в свободных группах является наиболее важной частью более общего вопроса об алгоритмической разрешимости всей элементарной теории свободных групп. В работе [M16] Г. С. Маканин доказал разрешимость для фрагмента элементарной теории свободной группы, состоящего из универсальных формул, т. е. для формул, содержащих только кванторы всеобщности, а также для позитивного фрагмента этой теории (т. е. для множества истинных формул, не содержащих отрицания).

Интересно отметить, что доказанный Г. С. Маканиным положительный результат для позитивного фрагмента элементарной теории свободной группы явно контрастирует с ранее доказанным результатом о неразрешимости элементарной теории свободных полугрупп, который был получен В. Г. Дурневым. Дело в том, что ещё в 1943 г. У. Куайн доказал неразрешимость множества истинных формул всей элементарной теории свободных полугрупп. Этот результат в 1973 г. был существенно усилен неожиданным результатом аспиранта Тульского педагогического института В. Г. Дурневым, которому удалось доказать неразрешимость позитивного фрагмента элементарной теории свободной полугруппы (см. [9]), а ещё через десять лет Г. С. Маканин опроверг аналог теоремы Дурнева для элементарной теории свободной группы. Здесь полезно также отметить, что при доказательстве разрешимости позитивного фрагмента элементарной теории свободных групп Г. С. Маканин в работе [M16] существенно использовал утверждение теоремы 1 из работы Ю. И. Мерзлякова [24], которое представляет несомненный научный интерес само по себе.

Таким образом, цикл исследований Г. С. Маканина по вопросам разрешимости уравнений в свободных группах и полугруппах дал мощный толчок для дальнейших исследований по проблеме разрешимости элементарных теорий свободных групп.

²Одно из первых упоминаний об этой проблеме содержится в книге А. Тарского, А. Мостовского и Р. Робинсона “Неразрешимые теории” [29; с. 85], опубликованной в 1953 г.

В частности, весьма полезными оказались и использующие идеи и технику Г. С. Маканина результаты защищённой в Математическом институте им. В. А. Стеклова кандидатской диссертации аспиранта С. И. Адяна А. А. Разборова (см. [26]), который предложил удобное для приложений описание множества решений систем уравнений в свободной группе.

Только после публикации результатов Г. С. Маканина появилась надежда, что можно будет доказать и разрешимость всей элементарной теории свободной группы. В начале XXI в. почти одновременно три автора опубликовали серию работ с решениями этой задачи, существенно использующими идеи и технику Г. С. Маканина. Это совместная работа А. Мясникова и О. Харлампович [12] и работа [27] З. Селы – ученика И. Рипса, который окончил Рижский университет под руководством Б. И. Плоткина в 1968 г.³

В 2010 г. за цикл работ по разрешимости уравнений в свободных полугруппах и группах Г. С. Маканин был удостоен премии им. И. М. Виноградова, которая учреждена Российской академией наук.

Список основных публикаций Г. С. Маканина

- [M1] “Новый разрешимый случай проблемы разрешения исчисления предикатов первой степени”, *Формальная логика и методология науки*, Наука, М., 1964, 125–153.
- [M2] “К проблеме тождества в конечно-определённых полугруппах”, *Докл. АН СССР*, **171**:2 (1966), 285–287; англ. пер.: “The identity problem in finitely defined semigroups”, *Soviet Math. Dokl.*, **7**:6 (1966), 1478–1480.
- [M3] “Проблема сопряженности в группе кос”, *Докл. АН СССР*, **182**:3 (1968), 495–496; англ. пер.: “The conjugacy problem in the braid group”, *Soviet Math. Dokl.*, **9**:5 (1968), 1156–1157.
- [M4] “О нормализаторах группы кос”, *Матем. сб.*, **86(128)**:2(10) (1971), 171–179; англ. пер.: “On normalizers in the braid group”, *Math. USSR-Sb.*, **15**:2 (1971), 167–175.
- [M5] “О системах уравнений в свободных группах”, *Сиб. матем. журн.*, **13**:3 (1972), 587–595; англ. пер.: “On systems of equations in free groups”, *Sib. Math. J.*, **13**:3 (1972), 402–408.
- [M6] “Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе”, *Докл. АН СССР*, **233**:2 (1977), 287–290; англ. пер.: “The problem of solvability of equations in a free semigroup”, *Soviet Math. Dokl.*, **18**:2 (1977), 330–334.
- [M7] “О ранге бескоэффициентных уравнений с четырьмя неизвестными в свободной полугруппе”, *Матем. сб.*, **100(142)**:2(6) (1976), 285–311; англ. пер.: “On the rank of coefficientless equations in four unknowns in a free semigroup”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:2 (1976), 257–280.
- [M8] “Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе”, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 147–236; англ. пер.: “The problem of solvability of equations in a free semigroup”, *Math. USSR-Sb.*, **32**:2 (1977), 129–198.
- [M9] “Распознавание ранга бескоэффициентных уравнений в свободной полугруппе”, *Докл. АН СССР*, **243**:4 (1978), 851–854; англ. пер.: “Recognizing the rank of coefficientless equations in a free semigroup”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:6 (1978), 1434–1437.
- [M10] “Системы стандартных уравнений в словах в n -слойном алфавите неизвестных”, *Сиб. матем. журн.*, **19**:3 (1978), 637–645; англ. пер.: “Systems of standard equations in words in an n -layer alphabet of unknowns”, *Sib. Math. J.*, **19**:3 (1978), 448–454.

³Ныне И. Рипс и Б. И. Плоткин, как и З. Села, живут в Израиле.

- [M11] “Распознавание ранга уравнений в свободной полугруппе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:3 (1979), 547–602; англ. пер.: “Recognition of the rank of equations in a free semigroup”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:3 (1980), 499–545.
- [M12] “Уравнения в свободной полугруппе”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. V. I* (Helsinki, 1978), Acad. Sci. Fennica, Helsinki, 1980, 263–268; англ. пер.: “Equations in a free semigroup”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **117**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1981, 1–6.
- [M13] “Equations in a free semigroup”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **117** (1981), 1–6.
- [M14] “Уравнения в свободной группе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1199–1273; англ. пер.: “Equations in a free group”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:3 (1983), 483–546.
- [M15] “Исследования по алгоритмическим вопросам алгебры”, *Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология*, Сборник обзорных статей. 1. К 50-летию Института, Тр. МИАН СССР, **168**, 1984, 197–217 (совм. с С. И. Адьяном); англ. пер.: “Investigations on algorithmic questions of algebra”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **168** (1986), 207–226 (with S. I. Adian).
- [M16] “Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:4 (1984), 735–749; англ. пер.: “Decidability of the universal and positive theories of a free group”, *Math. USSR-Izv.*, **25**:1 (1985), 75–88.
- [M17] “К вопросу о разрешимости теории свободной группы”, *Fundamentals of computation theory* (Cottbus, 1985), Lecture Notes in Comput. Sci., **199**, Springer, Berlin, 1985, 279–284.
- [M18] “Об одном сведении проблемы разрешимости теории свободной группы”, *Матем. заметки*, **40**:1 (1986), 31–35; англ. пер.: “A reduction of the decidability problem of the theory of a free group”, *Math. Notes*, **40**:1 (1986), 519–521.
- [M19] “Разделимые замкнутые косы”, *Матем. сб.*, **132(174)**:4 (1987), 531–540; англ. пер.: “Separable closed braids”, *Math. USSR-Sb.*, **60**:2 (1988), 521–531.
- [M20] “Об одном представлении ориентированного узла”, *Докл. АН СССР*, **299**:5 (1988), 1060–1063; англ. пер.: “On a representation of an oriented knot”, *Soviet Math. Dokl.*, **37**:2 (1988), 522–525.
- [M21] “Об одном разрешимом фрагменте элементарной теории свободной группы”, *Вопросы кибернетики*, **134**, Сложность вычислений и прикладная математическая логика, Науч. совет по комплексной проблеме “Кибернетика” АН СССР, М., 1988, 103–114.
- [M22] “Об одном аналоге теоремы Александра–Маркова”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:1 (1989), 200–210; англ. пер.: “On an analogue of the Alexander–Markov theorem”, *Math. USSR-Izv.*, **34**:1 (1990), 201–211.
- [M23] “Investigations on equations in a free group”, *Word equations and related topics* (Tübingen, 1990), Lecture Notes in Comput. Sci., **572**, Springer, Berlin, 1992, 1–11.
- [M24] “On general solution of equations in a free semigroup”, *Word equations and related topics* (Rouen, 1991), Lecture Notes in Comput. Sci., **677**, Springer, Berlin, 1993, 1–5.
- [M25] “On general solution of word equations”, *Results and trends in theoretical computer science* (Graz, 1994), Lecture Notes in Comput. Sci., **812**, Springer, Berlin, 1994, 251–263 (with H. Abdulrab).
- [M26] “Formal parametric equations”, *Fundamentals of computation theory* (Dresden, 1995), Lecture Notes in Comput. Sci., **965**, Springer, Berlin, 1995, 353–362 (with H. Abdulrab, M. N. Maksimenko).
- [M27] “Multiplication of natural number parameters and equations in a free semigroup”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**:12 (1996), 4813–4824.

- [M28] “Functions for the general solution of parametric word equations”, *Logical foundations of computer science* (Yaroslavl, 1997), Lecture Notes in Comput. Sci., **1234**, Springer, Berlin, 1997, 189–202 (with H. Abdulrab, P. Goralcik).
- [M29] “Параметризация решений некоторых уравнений квадратов в свободном моноиде”, *Дискрет. матем.*, **11**:3 (1999), 133–148 (совм. с Т. А. Маканиной); англ. пер.: “A parametrization of the solutions of some equations of squares in a free monoid”, *Discrete Math. Appl.*, **9**:4 (1999), 419–435 (with T. A. Makanina).
- [M30] “Parametrisation of solutions of parametric equation in free monoid”, *Theoret. Comput. Sci.*, **242**:1-2 (2000), 403–475 (with T. A. Makanina).
- [M31] “Functions for parametrization of solutions of an equation in a free monoid”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:1 (2000), 1–54 (with T. A. Makanina).
- [M32] “Towards parametrizing word equations”, *Theor. Inform. Appl.*, **35**:4 (2001), 331–350 (with H. Abdulrab, P. Goralčík).
- [M33] “Параметризация решений уравнения $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ в свободной группе”, *Дискрет. матем.*, **13**:2 (2001), 35–88; англ. пер.: “The parametrisation of solutions of the equation $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ in a free group”, *Discrete Math. Appl.*, **11**:3 (2001), 235–290.
- [M34] “Уравнение в свободной группе, определяющее крашенные косы”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 591–602 (совм. с А. Г. Савушкиной); англ. пер.: “An equation in a free group defining pure braids”, *Math. Notes*, **70**:4 (2001), 535–544 (with A. G. Savushkina).
- [M35] “Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. II”, *Матем. сб.*, **195**:4 (2004), 65–96; англ. пер.: “Finite parametrization of solutions of equations in a free monoid. II”, *Sb. Math.*, **195**:4 (2004), 521–552.
- [M36] “Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I”, *Матем. сб.*, **195**:2 (2004), 41–90; англ. пер.: “Finite parametrization of solutions of equations in a free monoid. I”, *Sb. Math.*, **195**:2 (2004), 187–235.
- [M37] “Параметризация решений уравнения $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ в свободном моноиде”, *Матем. заметки*, **89**:6 (2011), 879–884; англ. пер.: “Parametrization of the solutions of the equation $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ in a free monoid”, *Math. Notes*, **89**:6 (2011), 839–844.
- [M38] “General solution of quadratic equations in free groups”, *Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci.*, 2015, № 2(237), 62–65 (with A. Sh. Malkhasyan).

Другие цитируемые работы

- [1] С. И. Адян, “Математическая логика”, *Математическая энциклопедия*, т. 3, Советская энциклопедия, М., 1982, 568–574.
- [2] С. И. Адян, “О фрагментах слова Δ в группе кос”, *Матем. заметки*, **36**:1 (1984), 25–34; англ. пер.: S. I. Adyan, “Fragments of the word Δ in a braid group”, *Math. Notes*, **36**:1 (1984), 505–510.
- [3] С. И. Адян, “Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 150-летию со дня рождения академика Владимира Андреевича Стеклова, Тр. МИАН, **289**, МАИК “Наука/Интерпериодика”, М., 2015, 41–82; англ. пер.: S. I. Adian, “New estimates of odd exponents of infinite Burnside groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **289** (2015), 33–71.
- [4] E. Artin, “Theorie der Zöpfe”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **4**:1 (1925), 47–72.
- [5] E. Artin, “Theory of braids”, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 101–126.
- [6] В. К. Булитко, “Об уравнениях и неравенствах в свободной группе и свободной полугруппе”, *Учёные записки матем. кафедр*, **2**, Тульский гос. пед. ин-т им. Л. Н. Толстого, Тула, 1970, 242–253.

- [7] A. Church, “An unsolvable problem of elementary number theory”, *Amer. J. Math.*, **58**:2 (1936), 345–363.
- [8] A. Church, “A note on the Entscheidungsproblem”, *J. Symbolic Logic*, **1** (1936), 40–41.
- [9] В. Г. Дурнев, “Позитивная теория свободной полугруппы”, *Докл. АН СССР*, **211**:4 (1973), 772–774; англ. пер.: V. G. Durnev, “Positive theory of a free semigroup”, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 1100–1103.
- [10] Ю. Л. Ершов, И. А. Лавров, А. Д. Тайманов, М. А. Тайцлин, “Элементарные теории”, *УМН*, **20**:4(124) (1965), 37–108; англ. пер.: Yu. L. Ershov, I. A. Lavrov, A. D. Taimanov, M. A. Taitslin, “Elementary theories”, *Russian Math. Surveys*, **20**:4 (1965), 35–105.
- [11] Ф. А. Гарсайд, “Группа кос и другие группы”, *Математика*, **14**:4 (1970), 117–132; пер. с англ.: F. A. Garside, “The braid group and other groups”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **20** (1969), 235–254.
- [12] О. Kharlampovich, А. Myasnikov, “Elementary theory of free non-abelian groups”, *J. Algebra*, **302**:2 (2006), 451–552.
- [13] Ю. И. Хмелевский, “Уравнения в свободной полугруппе”, *Тр. МИАН СССР*, **107**, 1971, 3–288; англ. пер.: Yu. I. Khmelevskii, “Equations in a free semigroup”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **107** (1971), 1–270.
- [14] Ю. И. Хмелевский, “Системы уравнений в свободной группе. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:6 (1971), 1237–1268; англ. пер.: Yu. I. Hmelevskii, “Systems of equations in a free group. I”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:6 (1971), 1245–1276.
- [15] Ю. И. Хмелевский, “Системы уравнений в свободной группе. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:1 (1972), 110–179; англ. пер.: Yu. I. Hmelevskii, “Systems of equations in a free group. II”, *Math. USSR-Izv.*, **6**:1 (1972), 109–180.
- [16] R. C. Lyndon, “Equations in free groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **96** (1960), 445–457.
- [17] А. А. Лоренц, “О представлениях множеств решений систем уравнений с одним неизвестным в свободной группе”, *Докл. АН СССР*, **178**:2 (1968), 290–292; англ. пер.: A. A. Lorents, “Representations of sets of solutions of systems of equations with one unknown in a free group”, *Soviet Math. Dokl.*, **9** (1968), 81–84.
- [18] А. А. Марков, “Основы алгебраической теории кос”, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **16**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1945, 3–53.
- [19] А. А. Марков, “Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем”, *Докл. АН СССР*, **55**:7 (1947), 587–590; англ. пер.: A. Markoff, “On the impossibility of certain algorithms in the theory of associative systems”, *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N. S.)*, **55** (1947), 583–586.
- [20] А. А. Марков, “Невозможность некоторых алгоритмов в теории ассоциативных систем. II”, *Докл. АН СССР*, **58**:3 (1947), 353–356.
- [21] А. А. Марков, “Теория алгоритмов”, *Тр. МИАН СССР*, **42**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1954, 3–375; англ. пер.: A. A. Markov, *Theory of algorithms*, The Israel Program for Scientific Translations, Jerusal, 1961, iv+444 pp.
- [22] Ю. В. Матиясевич, “Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений”, *Докл. АН СССР*, **173**:6 (1967), 1264–1266; англ. пер.: Yu. V. Matiyasevich, “Simple examples of undecidable associative calculi”, *Soviet Math. Dokl.*, **8** (1967), 555–557.
- [23] Ю. В. Матиясевич, “Диофантово представление перечислимых предикатов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:1 (1971), 3–30; англ. пер.: Yu. V. Matiyasevich, “Diophantine representation of enumerable predicates”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:1 (1971), 1–28.
- [24] Ю. И. Мерзляков, “Позитивные формулы на свободных группах”, *Алгебра и логика*, **5**:4 (1966), 25–42.

- [25] П. С. Новиков, “Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп”, Тр. МИАН СССР, **44**, Изд-во АН СССР, М., 1955, 3–143; англ. пер.: P. S. Novikov, “On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1958, 1–122.
- [26] А. А. Разборов, “О системах уравнений в свободной группе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:4 (1984), 779–832; англ. пер.: A. A. Razborov, “On systems of equations in a free group”, *Math. USSR-Izv.*, **25**:1 (1985), 115–162.
- [27] Z. Sela, “Diophantine geometry over groups. VI. The elementary theory of a free group”, *Geom. Funct. Anal.*, **16**:3 (2006), 707–730.
- [28] J. Surányi, *Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe*, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, 1959, 216 pp.
- [29] A. Tarski, A. Mostowski, R. M. Robinson, *Undecidable theories*, Stud. Logic Found. Math., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1953, xi+98 pp.
- [30] Г. С. Цейтин, “Ассоциативное исчисление с неразрешимой проблемой эквивалентности”, *Проблемы конструктивного направления в математике*. 1, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, **52**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1958, 172–189; англ. пер.: G. S. Tseitin, “An associative calculus with an unsolvable problem of equivalence”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **94**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, 73–92.
- [31] A. M. Turing, “On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **42**:3 (1936), 230–265.

Сергей Иванович Адян
(Sergei I. Adian)

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
21.02.2018