Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Аптекарев, В. М. Бухштабер, В. А. Васильев, М. Л. Громов, Ю. С. Ильяшенко, Б. С. Кашин, В. М. Кесельман, В. В. Козлов, М. Л. Концевич, И. М. Кричевер, Н. Г. Кружилин, С. К. Ландо, Ю. И. Манин, Г. А. Маргулис, С. Ю. Немировский, С. П. Новиков, Ю. Г. Решетняк, Я. Г. Синай, С. П. Суетин, Д. В. Трещёв, Д. Б. Фукс, А. Г. Хованский, Е. М. Чирка, А. С. Шварц, А. Н. Ширяев, Владимир Антонович Зорич (к восьмидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2018, том 73, выпуск 5, 193–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9828>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:44:45

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Владимир Антонович Зорич

(к восьмидесятилетию со дня рождения)

16 декабря 2017 г. исполнилось 80 лет профессору Владимиру Антоновичу Зоричу, замечательному математику и преподавателю, учителю многих поколений студентов механико-математического факультета МГУ, автору известных во всем мире учебников.

В. А. Зорич окончил мехмат МГУ в 1960 г. и поступил в аспирантуру, где его научным руководителем был Борис Владимирович Шабат. С 1963 г. он работает на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ в должности ассистента, доцента, а с 1971 г. по настоящее время – профессора. Помимо десятков опубликованных научных работ ему принадлежит авторское свидетельство по прикладным исследованиям в области технологии машиностроения. В. А. Зорич – лауреат премии Ленинского комсомола в области науки (1969) и заслуженный профессор Московского университета (2007).

В самом конце пятидесятых – начале шестидесятых годов минувшего века началось активное исследование многомерных квазиконформных отображений. Двумерный случай был уже достаточно хорошо изучен и нашёл яркие применения в работах Л. Альфорса¹ и О. Тейхмюллера².

Первая работа В. А. Зорича по пространственной теории квазиконформных отображений (студенческая дипломная работа) была выполнена в 1960 г. В ней было показано, что квазиконформный автоморфизм евклидова шара (или пространства Лобачевского) продолжается на границу (абсолют гиперболического пространства) до гомеоморфного отображения замкнутого шара [1]. Один из основных творцов многомерной теории квазиконформных отображений Фредерик Геринг в работе 1962 г. заметил, что отображение граничных сфер, возникающее при таком продолжении,

¹Получившего в 1936 г. одну из двух первых Филдсовских медалей за геометрическое обобщение теории Неванлинны распределения значений голоморфных функций. Л. Альфорсу принадлежит сам термин “квазиконформное отображение”.

²Исследовавшего комплексные структуры на поверхностях и определившего объект, который теперь называется пространством Тейхмюллера и привлекает внимание как математиков, так и физиков-теоретиков.

также квазиконформно. Это наблюдение имело замечательные последствия. Используя его, Г. Мостов в красивой работе о жёсткости пространственных гиперболических форм, в частности, показал, что *если два компактных римановых многообразия одинаковой постоянной отрицательной кривизны диффеоморфны, а их размерность больше двух, то они изометричны*. Эта теорема Мостова имела большой резонанс и развивалась во многих направлениях в работах Г. А. Маргулиса, Д. Салливана, П. Тукиа, Ю.-Т. Сю и других.

Продолжая исследование граничного поведения квазиконформных отображений пространственных областей, В. А. Зорич построил для них теорию, аналогичную классической теории Каратеодори, описывающей граничное поведение конформных отображений областей на плоскости. Некоторые выводы этой теории оказались новыми даже в применении к двумерному случаю. Например, был указан максимальный класс отображений, для которого соответствие границ может быть описано в рамках теории Каратеодори.

Эти результаты составили основу кандидатской диссертации В. А. Зорича “Соответствие границ при некоторых классах отображений в пространстве” (научный руководитель Б. В. Шабат, официальные оппоненты А. И. Маркушевич и С. Я. Хавинсон), которая была защищена в МГУ в 1963 г. и отмечена как выдающаяся.

Докторская диссертация В. А. Зорича “Глобальная обратимость квазиконформных отображений пространства” (официальные оппоненты А. Г. Витушкин, А. И. Маркушевич, С. П. Новиков), защищённая в МГУ в 1969 г., содержала решение проблемы обратимости в целом квазиконформных погружений многомерных евклидовых пространств, поставленной М. А. Лаврентьевым в 1938 г. Основным ее результатом является следующее замечательное утверждение.

ТЕОРЕМА О ГЛОБАЛЬНОМ ГОМЕОМОРФИЗМЕ [2]. *Локально обратимое квазиконформное отображение евклидова пространства размерности больше двух в себя обратимо глобально.*

Таким образом, многомерная ситуация существенно отличается от классической двумерной. Например, экспоненциальная функция задает конформное отображение комплексной прямой (т. е. вещественной плоскости) в себя, которое не является ни инъективным, ни сюръективным.

В этой связи С. П. Новиков задал естественный для геометра и тополога общий вопрос о том, для каких некомпактных римановых многообразий (помимо евклидова пространства) всякое квазиконформное погружение автоматически оказывается вложением.

Вскоре М. Л. Громов дал частичный ответ на этот вопрос, указав, что в размерностях выше двух это так для квазиконформных погружений полных римановых многообразий конечного объёма в односвязные многообразия.

Классы конформных и квазиконформных отображений инвариантны относительно конформной замены римановой метрики, поэтому теорема Громова, в свою очередь, приводит к геометрическому вопросу о том, когда некомпактное риманово многообразие конформной заменой метрики можно сделать полным многообразием конечного объёма. Нетрудно убедиться, что для евклидова пространства это сделать можно, поэтому теорема Громова (с точностью до несущественных деталей) действительно обобщает теорему Зорича о глобальном гомеоморфизме.

Дальнейшие исследования в этом направлении привели к классификации открытых римановых многообразий по их конформному типу – конформно параболические (как евклидово пространство) и конформно гиперболические (как пространство Лобачевского). Теорема о глобальном гомеоморфизме естественно распространяется на погружения многообразий конформно параболического типа. Более того, В. А. Зорич

нашёл точную асимптотику допустимого роста коэффициента квазиконформности отображения на бесконечности, при которой всё ещё можно гарантировать инъективность исходного погружения.

Вопрос о конформном типе открытого риманова многообразия (как заметил ещё Л. Альфорс, изучая двумерный случай) приводит к такому классическому объекту, как изопериметрическое соотношение (изопериметрическое неравенство)

$$P(V(D)) \leq S(\partial D),$$

связывающее объём $V(D)$ области D на римановом многообразии и площадь $S(\partial D)$ её границы. Появляющаяся здесь функция $P(\cdot)$, называемая изопериметрической функцией многообразия, конечно, зависит от его римановой метрики. В совместных работах В. А. Зорича и В. М. Кесельмана, в частности, было установлено, что конформной заменой метрики риманова многообразия его изопериметрическую функцию можно привести либо к тому виду, который она имеет в пространстве Евклида соответствующей размерности, либо к линейному виду, который она имеет в пространстве Лобачевского, в полном соответствии с конформным типом исходного риманова многообразия. Впоследствии эти результаты были доведены В. М. Кесельманом до критериев конформного типа риманова многообразия. Этому кругу вопросов посвящена опубликованная в “Успехах математических наук” обзорная статья В. А. Зорича “Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий” [3].

В недавней статье “Несколько замечаний о многомерных квазиконформных отображениях” [4], написанной в 2016 г. к 150-летию журнала “Математический сборник”, поставлен ряд открытых вопросов теории квазиконформных отображений и получена асимптотика по размерности конформной ёмкости конденсаторов Греча и Тейхмюллера – важнейших рабочих инструментов теории квазиконформных отображений. Примечательно, что эта асимптотика была найдена из соображений, далёких от самой теории квазиконформных отображений.

Область научных интересов В. А. Зорича выходит далеко за пределы теории квазиконформных отображений. Например, в вышедшей в 2017 г. вторым изданием книге “Математический анализ задач естествознания” [5] он описывает математические аспекты термодинамики и демонстрирует связь классической термодинамики с контактной геометрией, а статистической механики – с многомерной геометрией.

Опубликованная в 2017 г. в журнале “Теория вероятностей и её применения” статья “Геометрия и вероятность” [6] посвящена связи интегральной геометрии и теории вероятностей. В ней, в частности, даётся геометрическая интерпретация идеологии линейных и нелинейных законов больших чисел, связанная с явлением концентрации меры, характерным для многомерных пространств. Это явление приводит к тому, что с точки зрения наблюдателя функции очень многих равноправных переменных оказываются практически постоянными.

Поколениям бывших и настоящих студентов, не только математикам и не только в нашей стране, профессор В. А. Зорич, конечно, известен своим учебником “Математический анализ”, переведённым на английский, немецкий и китайский языки и выдержавшим уже восемь одних только отечественных изданий. Заметим, что это не стереотипные издания. В них каждый раз появляются новые дополнения, которые порой интересны не только студентам, но и профессионалам. Например, в последнем издании [7] добавлен заключительный обзор “Современная формула Ньютона–Лейбница и единство математики”.

Очень многим известна также статья В. А. Зорича “Математика как язык и метод (пояснение для не маленьких)”, написанная в защиту математики, науки и образования. Её, как и иные, порой написанные с юмором, статьи и материалы можно найти

на сайте В. А. Зорича (<http://matan.math.msu.su/vzor>). В частности, там же есть короткая автобиографическая заметка “Путь в математику”.

Поздравляя Владимира Антоновича с восьмидесятилетием, мы желаем ему здоровья, творческого долголетия, любви и уважения учеников и коллег.

А. И. Аптекарев, В. М. Бухштабер, В. А. Васильев, М. Л. Громов,
Ю. С. Ильяшенко, Б. С. Кашин, В. М. Кесельман,
В. В. Козлов, М. Л. Концевич, И. М. Кричевер,
Н. Г. Кружилин, С. К. Ландо, Ю. И. Манин, Г. А. Маргулис,
С. Ю. Немировский, С. П. Новиков, Ю. Г. Решетняк,
Я. Г. Синай, С. П. Суетин, Д. В. Трещев, Д. Б. Фукс,
А. Г. Хованский, Е. М. Чирка, А. С. Шварц, А. Н. Ширяев

Список цитированных работ В. А. Зорича

- [1] “Соответствие границ при Q -квазиконформных отображениях шара”, *Докл. АН СССР*, **145**:6 (1962), 1209–1212; англ. пер.: V. A. Zorich, “Correspondence of the boundaries in Q -quasiconformal mapping of a sphere”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 1183–1186.
- [2] “Теорема М. А. Лаврентьева о квазиконформных отображениях пространства”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 417–433; англ. пер.: “A theorem of M. A. Lavrent’ev on quasiconformal space maps”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3 (1967), 389–403.
- [3] В. А. Зорич, “Квазиконформные отображения и асимптотическая геометрия многообразий”, *УМН*, **57**:3(345) (2002), 3–28; англ. пер.: V. A. Zorich, “Quasi-conformal maps and the asymptotic geometry of manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **57**:3 (2002), 437–462.
- [4] “Несколько замечаний о многомерных квазиконформных отображениях”, *Матем. сб.*, **208**:3 (2017), 72–95; англ. пер.: “Some observations concerning multidimensional quasiconformal mappings”, *Sb. Math.*, **208**:3 (2017), 377–398.
- [5] *Математический анализ задач естествознания*, 2-е изд., МЦНМО, М., 2017, 160 с.; англ. пер. 1-го изд.: *Mathematical analysis of problems in the natural sciences*, Springer, Berlin, 2011, xi+135 pp.
- [6] “Геометрия и вероятность”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **62**:2 (2017), 292–310; англ. пер.: “Geometry and probability”, *Theory Probab. Appl.*, **62**:2 (2018), 236–251.
- [7] *Математический анализ*, Части I, II, 8-е изд., МЦНМО, М., 2017, 576 с., 688 с.; англ. пер. 4-го и 6-го изд.: *Mathematical analysis*, Part I, 2nd ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2015, xx+616 pp.; Part II, 2016, xx+720 pp.