Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Дубровский, Глобальные представления ядра резольвенты несамосопряженного оператора по Келдышу, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm983>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:11:08

ГЛОБАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЯДРА РЕЗОЛВЕНТЫ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ПО КЕЛДЫШУ

В. В. ДУБРОВСКИЙ

Пусть T – полуограниченный снизу, дискретный оператор в $L_2(D)$, где D – компакт в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$; $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ – все собственные числа оператора T , занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности; $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ – собственные ортонормированные векторы оператора T , отвечающие собственным значениям λ_n , т.е. $Tv_n = \lambda_n v_n$, $(v_n, v_m) = \int_D v_n(x) \overline{v_m(x)} dx = \delta_{nm}$. Предположим, что $\lambda_n = Cn^\alpha + o(n^\alpha)$, где $C > 0$, $\alpha > 1$. Хорошо известны (см. [2]):

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует подпоследовательность $\{n_m\}_{m=1}^\infty$ натуральных чисел такая, что*

$$\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq \text{const}(n_m)^{\alpha-1} > 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если $|n - n_m| \geq C_1 n_m$, где $C_1 > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число, то*

$$|\lambda_n - \lambda_{n_m}| \geq C_2 \max\{n, n_m\}^\alpha,$$

где $C_2 > 0$ зависит от C_1 .

Пусть P – вообще говоря, несамосопряженный ограниченный оператор в $L_2(D)$; μ_n – все собственные числа оператора $T + P$, взятые с учетом алгебраической кратности и занумерованные в порядке возрастания их действительных частей.

Возьмем для данного μ_n произвольную каноническую систему (см. [1]) собственных и присоединенных векторов оператора $T + P$. Присоединим к ней надлежаще выбранную систему собственных и присоединенных векторов оператора $T + P$, отвечающую собственному числу μ_n оператора $T + P$, такую, что ядро резольвенты $K_{T+P}(x, y, \lambda)$ оператора $T + P$ имеет с точностью до ограниченного остатка в $L_\infty(D)$ вид суммы простейших дробей вблизи μ_n , выраженных через эти канонические системы (см. [1]). Обозначим $O_m = \{\lambda : |\lambda| = \frac{1}{2}(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1})\}$ окружности с центром в начале координат радиуса $\frac{1}{2}(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1}) > 0$. Если для некоторого натурального q (см. [3])

$$(1) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{\max_{x \in O_m} \|K_{T+P}(x, y, \lambda)\|_{L_2(D \times D)}}{(\frac{1}{2}(\lambda_{n_m} + \lambda_{n_m+1}))^q} < \infty,$$

то ядро $K_{T+P}(x, y, \lambda)$ резольвенты оператора $T + P$ представимо в виде суммы простейших дробей без остатка, просуммированных в $L_2(D \times D)$. Но из тождества Гильберта для ядер резольвенты вытекает, что неравенство (1) достаточно доказать для ядра $K_T(x, y, \lambda)$ резольвенты оператора T на окружностях O_m . Тогда

$$K_T(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x) \overline{v_i(y)}}{\lambda_i - \lambda},$$

следовательно (см. [2]), имеем

$$\begin{aligned} \|K_T(x, y, \lambda)\|_{L_2(D \times D)} &\leq \text{const} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i - \lambda|} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n_m - [C_1 n_m] - 1} + \sum_{i=n_m - [C_1 n_m]}^{n_m + [C_1 n_m]} + \sum_{i=n_m + [C_1 n_m] + 1}^{\infty} \\ &\equiv J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

Оценим каждое из J_j , $j = \overline{1, 3}$: пользуясь утверждением 2, имеем

$$J_1 = \text{const} \sum_{i=1}^{n_m - [C_1 n_m] - 1} |\lambda_i - \lambda|^{-1} \leq \text{const} \sum_{i=1}^{n_m - [C_1 n_m] - 1} \frac{\text{const}}{(n_m)^\alpha} \leq \text{const} (n_m)^{1-\alpha}.$$

Далее, из утверждения 1 вытекает, что

$$J_2 \leq \text{const} \sum_{i=n_m - [C_1 n_m]}^{n_m + [C_1 n_m]} \text{const} n_m^{1-\alpha} \leq \text{const} n_m^{2-\alpha}.$$

Точно так же, как J_1 , оценивается J_3 при $\alpha > 1$. Следовательно, при $\lambda \in O_m$

$$\|K_T(x, y, \lambda)\|_{L_2(D \times D)} \leq \text{const} (n_m)^{2-\alpha},$$

где const не зависит от m . Тогда

$$\frac{\max_{O_m} \|K_T(x, y, \lambda)\|_{L_2(D \times D)}}{n_m^{\alpha q}} \leq \text{const} n_m^{2-(q+1)\alpha} < \infty$$

при $q > 1$. Следовательно, доказана следующая

ТЕОРЕМА 3. *Ядро резольвенты оператора $T + P$ представимо при $\alpha > 1$ в виде суммы простейших дробей, выраженных через выбранные по М. В. Келдышу канонические системы собственных и присоединенных векторов операторов $T + P$ и $T + P^*$, причем сходимость этой суммы понимается со скобками со значениями в $L_2(D \times D)$.*

Аналогично доказывается с помощью теоремы Рисса–Торина

ТЕОРЕМА 4. *Если собственные ортонормированные векторы $v_n(x)$ оператора T равномерно ограничены в $L_\infty(D)$, то ядро резольвенты оператора $T + P$ представимо при $\alpha > 1$ в виде суммы простейших дробей, выраженных через выбранные по М. В. Келдышу канонические системы собственных и присоединенных векторов операторов $T + P$ и $T + P^*$, причем сходимость этой суммы понимается со скобками со значениями в $L_p(D \times D)$ $\forall p \geq 2$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Класс эллиптических псевдодифференциальных операторов, к которым применима теорема 3, достаточно широк. Сюда входят все операторы вида $(-\Delta)^\alpha + P$, $\alpha > 1$, где Δ – оператор Лапласа, заданный на замкнутом двумерном римановом многообразии, а P – вообще говоря, комплексная существенно ограниченная измеримая на многообразии функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Суммируемость ядра резольвенты оператора $T + P$ со скобками можно было рассматривать в $L_p(D \times D)$, $p \geq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Оператор P для простоты взят ограниченным, а не подчиненным, в том или ином смысле малости, оператору T .

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Частные случаи теорем 3 и 4 рассмотрены в работах [4], [5].

Автор выражает благодарность В. А. Ильину, В. А. Садовничему, В. Ф. Кравченко, Е. И. Моисееву, Л. М. Велюсу и Т. К. Плышевской за обсуждение тематики данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Келдыш М. В. // ДАН СССР. 1951. Т. 77. С. 11–14. [2] Дубровский В. В. // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2046–2051. [3] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. [4] Дубровский В. В., Кравченко В. Ф. // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 211–212. [5] Дубровский В. В. // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 163–164.