Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. А. Тужилин, Структура множества плоских минимальных сетей с заданными топологией и границей, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm984>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 14:36:21

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА ПЛОСКИХ МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ С ЗАДАНЫМИ ТОПОЛОГИЕЙ И ГРАНИЦЕЙ

А. О. ИВАНОВ, А. А. ТУЖИЛИН

Назовем *обобщенной сетью* произвольное непрерывное отображение Γ связного конечного одномерного клеточного комплекса G (*топологического графа*) в плоскость $\mathbb{R}^2$. При этом граф G будем называть *топологией обобщенной сети* Γ . Ограничения отображения Γ на нульмерные и одномерные клетки графа G называются, соответственно, *вершинами* и *ребрами* обобщенной сети Γ . Обобщенная сеть, все ребра которой – вложенные регулярные кривые, называется просто *сетью*. *Границей φ обобщенной сети Γ* назовем ограничение отображения Γ на некоторое фиксированное подмножество V множества вершин графа G . Если $M = \varphi(V) \subset \mathbb{R}^2$ – образ границы φ , то будем говорить, что обобщенная сеть Γ *затягивает* множество M по граничному отображению φ .

Определим *длину сети* как сумму длин всех ее ребер. Тогда естественно возникает обобщенная проблема Штейнера, состоящая в поиске среди всех сетей, растягивающих некоторое фиксированное конечное множество M точек плоскости, сетей минимальной длины. В данной работе под минимальностью мы понимаем *локальную минимальность*, которая, напомним, означает, что каждый достаточно малый фрагмент сети является абсолютно минимальной сетью. Другими словами, никакая деформация такой сети, сохраняющая ее границу и малая по носителю и по амплитуде, не уменьшает длину сети. Локальное устройство таких сетей хорошо известно (см. [1], [2]). А именно, все ребра локально минимальной сети представляют собой отрезки, стыкующиеся под углами, больше или равными 120° , в частности, степени вершин такой сети не превосходят трех. При этом можно предполагать, что граница минимальной сети состоит в точности из всех ее вершин степеней 1 и 2, что мы и будем делать. Сеть Γ с границей φ , степени вершин которой не превосходят 3, и все вершины степеней 1 и 2 являются граничными, назовем *сетью Штейнера*. Соответствующие параметризующие графы будем называть *графами Штейнера*.

Если ограничиться рассмотрением минимальных сетей без циклов, т.е. деревьев, – то хорошо известен алгоритм Мелзака–Хванга (см. [3], [4]), позволяющий для каждой такой топологии G и каждого граничного отображения или построить соответствующую локально минимальную сеть, или убедиться в том, что ее не существует. Одним из центральных наблюдений, позволивших добиться быстрой работы этого алгоритма, является теорема Хванга [4] о единственности минимальной сети данной топологии с данной границей. Цель настоящей работы – обобщить результат Хванга на случай минимальных сетей с циклами, которые, как известно, также часто встречаются в приложениях (см. [5], [6]).

Обобщенную сеть назовем *линейной сетью*, если все ее ребра представляют собой прямолинейные отрезки (возможно, вырожденные). Обозначим через $[G, \varphi]$ конфигурационное пространство $\mathbb{R}^{2s}$ всех подвижных вершин линейных сетей фиксированной топологии G с заданной границей φ . Пусть $[G, \varphi]_{\min}$ – множество всех минимумов функционала длины на $[G, \varphi]$. Ясно, что множество $\mathcal{M}_G(\varphi)$ всех минимальных сетей топологии G с границей φ содержится в $[G, \varphi]_{\min}$.

Нам также понадобятся следующие определения. Ребро сети назовем *циклическим*, если оно принадлежит какому-нибудь циклу этой сети. Ребро, не входящее ни в один цикл, но инцидентное некоторому циклическому ребру, назовем *ребром первого уровня*, а все остальные не циклические ребра назовем *ребрами второго уровня*. Итак, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА. Если $k(G)$ – цикломатическое число графа Штейнера G , а множество $\mathcal{M}_G(\varphi)$ не пусто, то оно совпадает с внутренностью множества $[G, \varphi]_{\min}$, которое, в свою очередь, является выпуклым телом в $k(G)$ -мерном подпространстве из $[G, \varphi]$. В частности, все сети из $\mathcal{M}_G(\varphi)$ параллельны, имеют одинаковую длину и могут быть продеформированы друг в друга в классе локально минимальных сетей того же

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Международной Ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными Независимых Государств бывшего Советского Союза (INTAS) и гранта Международного центра теоретической физики (ICTP), Италия.

типа и с той же границей. Более того, при каждой такой деформации остаются неподвижными все ребра второго уровня и все прямые, содержащие ребра первого уровня.

Авторы надеются, что данная теорема позволит в ближайшее время создать алгоритм, который для произвольного графа Штейнера G и произвольного граничного отображения φ или строит локально минимальную сеть из $\mathcal{M}_G(\varphi)$ (какую-нибудь), или определяет, что множество $\mathcal{M}_G(\varphi)$ пусто.

Авторы пользуются случаем выразить свою глубокую и искреннюю признательность академику РАН А. Т. Фоменко за его постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Иванов А. О., Тужилин А. А. // Матем. сб. 1991. Т. 182. №12. С. 1813–1844.
- [2] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal Networks. Steiner Problem and Its Generalizations. CRC, 1994. [3] Melzak Z. A. // Canad. Math. Bull. 1960. V. 4. P. 143–148.
- [4] Hwang F. K. // Oper. Res. Lett. 1986. V. 5. P. 235–237. [5] Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Элементы геометрии топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
- [6] Фоменко А. Т. Топологические вариационные задачи. М.: Изд-во МГУ, 1984.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
11.03.1996