Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, Б. В. Заятуев, Дифференциальная геометрия тангенциальных эрмитовых поверхностей, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 203–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm985>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:55:14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В. Ф. Кириченко, Б. В. Зятуев

Эрмитовой поверхностью называется двумерное комплексное многообразие, на котором фиксирована положительно определенная эрмитова форма, называемая эрмитовой метрикой многообразия. Такие многообразия являются комплексными аналогами двумерных римановых многообразий (римановых поверхностей). Эрмитовы поверхности представляют существенный интерес с точки зрения как дифференциальной геометрии, так и ее приложений в математической физике, и изучались рядом авторов [1]–[4].

В настоящей заметке показано, что пространство касательного расслоения над ориентированной римановой поверхностью обладает канонической структурой эрмитовой поверхности, названной нами *тангенциальной эрмитовой поверхностью*. Изучены свойства таких эрмитовых поверхностей, представляющие существенный интерес с точки зрения конформной и эрмитовой геометрий.

Пусть $(M, g = (\cdot, \cdot))$ – ориентированная риманова поверхность, J – ее каноническая комплексная структура, которая, как хорошо известно, не зависит от выбора представителя конформного класса метрики g , (TM, π, M) – касательное расслоение над многообразием M . Тогда $C^\infty(M)$ -модуль $\mathfrak{X}_\pi(TM)$ гладких векторных полей на многообразии TM , проектируемых на M (т.е. π -связанных с векторными полями на M), распадается в прямую сумму двух распределений: $\mathfrak{X}_\pi(TM) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$, где $\mathcal{V}$ – вертикальное распределение, $\mathcal{H}$ – горизонтальное распределение, порожденное римановой связностью метрики g , рассматриваемые как $C^\infty(M)$ -модули. Пусть p_v и p_h – ортогональные проекторы на вертикальное и горизонтальное распределения, соответственно, i_v и i_h – операторы отождествления модулей $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ с $C^\infty(M)$ -модулем $\mathfrak{X}(M)$ гладких векторных полей на многообразии M , соответственно. Зафиксируем положительную функцию $\lambda \in C^\infty(M)$ и положим

$$(1) \quad \begin{aligned} \mathcal{J} &= i_h^{-1} \circ J \circ \pi_* + i_v^{-1} \circ J \circ i_v \circ p_v, \\ \langle X, Y \rangle &= (\pi_* X, \pi_* Y) \circ \pi + \lambda(i_v \circ p_v X, i_v \circ p_v Y) \circ \pi, \end{aligned}$$

где $\pi_*: \mathfrak{X}_\pi(TM) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ – отображение увлечения, $X, Y \in \mathfrak{X}_\pi(TM)$. Эти отображения естественно продолжаются до отображений произвольных векторных полей на многообразии TM , которые мы будем обозначать теми же символами.

ТЕОРЕМА 1. *Пара $\{\mathcal{J}, \mathcal{G} = \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ тензорных полей образует эрмитову структуру на многообразии TM . Эта структура является келеровой тогда и только тогда, когда (M, g) – плоское многообразие.*

Таким образом, многообразие TM , наделенное этой структурой, становится эрмитовой поверхностью, которую мы назовем *тангенциальной эрмитовой поверхностью*. В случае $\lambda = 1$ тангенциальную эрмитову поверхность мы назовем *канонической*. Более того, существование изотермической системы координат на двумерном римановом многообразии влечет существование открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия TM и системы функций $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$; $\sigma_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$, $\alpha \in A$, таких, что $\{\mathcal{J}, e^{\sigma_\alpha} \mathcal{G}\}$ – келерова структура на U_α . Иначе говоря, справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Тангенциальная эрмитова поверхность является локально конформно-келеровым многообразием.*

Эта теорема открывает целый класс принципиально новых примеров локально конформно-келеровых структур, теория которых находит важные приложения при построении нелинейных сигма-моделей в квантовой теории поля [4].

Напомним [5], что эрмитово многообразие (M, J, g) является локально конформно-келеровым тогда и только тогда, когда внешний дифференциал $d\Omega$ его фундаментальной формы $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$ удовлетворяет условию $d\Omega = \omega \wedge \Omega$, где ω – форма Ли многообразия. Если форма Ли

такого многообразия параллельна в римановой связности, многообразие называется *обобщенным многообразием Хопфа*. Эти многообразия играют важную роль в эрмитовой геометрии (см., например, [5]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{TM, \mathcal{J}, \mathcal{G}\}$ – тангенциальная эрмитова поверхность. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $(TM, \mathcal{J}, \mathcal{G})$ – обобщенное многообразие Хопфа;
- (2) $(TM, \mathcal{G})$ – риманово многообразие постоянной скалярной кривизны;
- (3) (M, g) – плоское риманово многообразие.

Важную роль в геометрии почти эрмитовых многообразий играют так называемые *тождества кривизны*, т.е. дополнительные свойства симметрии, которыми обладает их тензор римановой кривизны [6].

ТЕОРЕМА 4. Тангенциальная эрмитова поверхность $(TM, \mathcal{J}, \mathcal{G})$ принадлежит какому-либо из классов R_1, R_2, R_3 кривизны тогда и только тогда, когда многообразие (M, g) плоско.

Пусть теперь (M, g) – двумерное конфигурационное пространство некоторой механической системы. Его касательное расслоение с помощью метрики g внутренним образом отождествляется с кокасательным расслоением (T^*M, M, π) , т.е. с фазовым пространством этой системы. Рассмотрим каноническую контактную 1-форму $\varphi_\xi(X) = \xi(\pi_*X)$, где $\pi: T^*M \rightarrow M$ – естественная проекция, $\xi \in T_{\pi(\xi)}(M)$ – точка слоя расслоения, X – касательный вектор к многообразию T^*M в этой точке. Хорошо известно, что внешний дифференциал этой формы определяет каноническую симплектическую структуру Φ на фазовом пространстве механической системы. Следующий результат позволяет внутренним образом дополнить эту структуру до почти келеровой структуры (т.е. почти эрмитовой структуры с замкнутой фундаментальной формой), что определяет интересные связи между классической механикой и эрмитовой геометрией. Пусть g – произвольная неплоская риманова метрика на конфигурационном пространстве M механической системы с двумя степенями свободы. Применим к ней конформное преобразование $g \rightarrow \frac{2|\varkappa|}{\|\nabla\omega\|}g$, где $\varkappa$ – кривизна метрики g . Построим согласно (1) по преобразованной метрике метрику $\mathcal{G}$ (ко)касательного расслоения. Поднимая с помощью метрики $\mathcal{G}$ индекс у формы Φ , получим эндоморфизм $\mathcal{J}$.

ТЕОРЕМА 5. Эндоморфизм $\mathcal{J}$ является почти комплексной структурой на многообразии (ко)касательного расслоения, для которой симплектическая структура Φ является фундаментальной формой, и, значит, пара $(\mathcal{J}, \mathcal{G})$ является почти келеровой структурой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Vaisman I. // Ann. Math. Pura Appl. (4). 1965. V. 32. P. 1–18. [2] Vaisman I. // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 1987. V. 45. №3. P. 117–123. [3] Tricerri F., Vaisman I. // Math. Z. 1986. V. 192. P. 205–216. [4] Ianus S., Visinescu M. // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4. №3. P. 1317–1325. [5] Vaisman I. // Rend. Mat. Appl. (7). 1979. V. 12. P. 263–284. [6] Gray A. // Tôhoku Math. J. 1976. V. 28. P. 601–612.

Московский педагогический
государственный университет

Принято редколлегией
11.03.1996