Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Измеримость представлений бесконечномерных групп, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 205–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:56:33

ИЗМЕРИМОСТЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП

С. В. Лютковский

В данной статье доказано существование неизмеримых представлений для бесконечномерных групп Банаха–Ли (БЛ), ядерных групп Ли (ЯЛ) и групп диффеоморфизмов (ГД) $\text{Diff}(l, b, M)$ локально компактных $C(l+1)$ -многообразий M (ЛКМ), где $0 \leq b < 1$, $l \in \mathbb{N}$. Топология в $\text{Diff}(l, b, M)$ индуцируется из соответствующего пространства Гёльдера $C(l, b, TM)$ (сечений расслоения TM) с компактно-открытой топологией.

ЛЕММА 1. Пусть G – группа БЛ или ЯЛ над полем $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или конечным алгебраическим расширением $\mathbb{Q}_p$ с сепарабельной $C := \bigcup \{U^n : n \in \mathbb{N}\}$, где $U = U^{-1} \ni e$ – окрестность нейтрального элемента e . Тогда существует σ -аддитивная мера m со значениями в $[0, \infty)$, определенная на борелевской σ -алгебре $B(G)$ и на ее пополнении $A(G, m)$ по мере m , причем m : (1) радонова, (2) регулярна, (3) $m(S) = 0$ для любого собственного топологического подмногообразия S в G ($\text{codim}_K S > 0$), (4) $0 < m(C) < \infty$, (5) m – действительная рассеянная (непрерывная) мера.

Для доказательства отметим, что структура группы на G согласована со структурой аналитического многообразия, пусть $X = T_e G$ – соответствующее сепарабельное банахово пространство (БП). На X в случаях $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ можно задать гауссову меру с помощью стандартной конструкции абстрактного винеровского пространства [3]. Аналогично в случае ЯЛ [4]. БП X над $\mathbb{Q}_p$ изоморфно $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{Q}_p)$ [5]. На аддитивной группе $\mathbb{Q}_p$ имеется мера Хаара w со значениями в $[0, \infty)$, $w(\mathbb{Z}_p) = 1$, $w(Y) > 0$ для любого открытого $Y \neq \emptyset$ в $\mathbb{Q}_p$. Множества $S(j-1, n) := p^{j-1}\mathbb{Z}_p \setminus p^j\mathbb{Z}_p$, $S(n^2, n) = p^{n^2}\mathbb{Z}_p \quad \forall n \in \mathbb{N}, j \leq n^2$, являются открыто-замкнутыми в $\mathbb{Q}_p$. Можно задать следующее семейство мер

$$v(n, E) = \sum \{a(j, n)w(p^{n^2-j}(E \cap S(j, n)))/w(p^{n^2-j}S(j, n)) : j \in \mathbb{Z}, j \leq n^2\},$$

где $a(j, n) = (1 - 2^{-n})2^{n(j-n^2)}$, $E \in B(\mathbb{Q}_p)$. В c_0 существует ортонормированный (в p -адическом смысле) базис $\{f(j) : j \in \mathbb{N}\}$ и ортогональные проекторы $\pi(n; *)$ на $S'(n) = \text{sr}\{f(1), \dots, f(n)\}$. На $S'(n)$ существуют меры $b(l, *) = v(1, *) \times \dots \times v(l, *)$. Семейство мер $r(l, \pi_n^{-1}(E)) := b(l, E)$ согласовано и индуцирует q на X . Подмножества вида $L := \{x = [x(j) : j \in \mathbb{N}] : x(j) \in p^{k+k(j)}\mathbb{Z}_p \text{ при } j = 1, \dots, l \text{ и } x(j) \in p^j\mathbb{Z}_p \text{ при } j > l\}$ компактны в c_0 , причем $\forall \delta > 0 \exists L : q(c_0 \setminus L) < \delta$. По теореме Прохорова q продолжается до σ -аддитивной меры на $A(c_0, q)$. Из сильной паракомпактности G и существования гомеоморфизма открытых окрестностей U в G и $V \ni 0$ в X , получим m на G , удовлетворяющую (1)–(5).

Далее, $\text{Dif}(s; l, b, M) := \{g \in \text{Diff}(l, b, M) : \nabla^j(g(x) - x) = 0 \forall 0 \leq j \leq s, x \in \partial M\}$, $s \leq l$, $\nabla^0 := 1$; $\text{Di}(l, b, M; s) := \{g \in \text{Diff}(l, b, M) : \Delta^j(g(x) - x) = 0 \forall x \in \partial M, j = 0, 1, \dots, s\}$, $0 \leq 2s \leq l$.

ЛЕММА 2. Пусть $G = \text{Diff}(l, b, M)$, $\text{Dif}(s; l, b, M)$ или $\text{Di}(l, b, M; s)$ для $C(\infty)$ -КМ (или σ -компактного ЛКМ) M или $G = G(t)$ из [1]. Тогда существует окрестность $W^{-1} = W \ni e$, такая, что семейство элементов $J := \{g \in W : |r| \leq 1, r \in K \text{ с } h = g^r \in W\}$ плотно в W , где $\{g^r\} =: \langle g \rangle$ – локальные однопараметрические подгруппы.

Доказательство леммы проводится с помощью рассмотрения векторных полей на M и соответствия между окрестностями 0 в $C(l, b, TM)$ и e в G (см. [8] и имеющиеся там ссылки).

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – компактное $C(k)$ -многообразие, $\dim M = n$, $n \in \mathbb{N}$, $q \geq [(n+1)/2] + 1 + \text{sign}(b)$, $l \geq 2(3qn+1)$, $k \geq l + 3q + \text{sign}(b)$, $0 \leq b < 1$, p' – максимальное натуральное число такое, что $b(l, p') \leq [l/2]$, $b(l, p') = 3p' - 1$ при четном l и $b(l, p') = 3p'$ при нечетном l . Тогда существует мера m , квазиинвариантная относительно $G(3) := \text{Diff}(l + 3q, b, M) \cap G(p, b, j)$ на (1) $\text{Di}(p, b, M; s) =: G(p, b, 1)$, $0 \leq 2s \leq p$; (2) $\text{Diff}(p, b, M) =: G(p, b, 2)$, $p = 0, 1, 2, \dots, l$; $j = 1, 2$. При этом в случаях (1), (2) $\exists$ окрестность $W \ni e$

в $G(p, b, j)$ с $0 < m(W) < \infty$ такая, что $\forall \xi > 0$ и $\forall \delta > 0 \exists S \subset W$ – подмножество с $m(W \setminus S) < \delta \cdot \max(1, m(W))$ и $\exists U$ – окрестность e , и $Y \subset U$ такие, что $m(U \setminus Y) < \delta \cdot \max(1, m(U))$, $m(U) > 0$, $U \subset W$ и Y могут быть выбраны компактными, а W , S и U симметричны (т.е. $S^{-1} = S$), причем каждая $\langle g \rangle := \{g^r : r\}$ (для $C(\infty)$ -многообразия M) пересекается с S и Y по интервалам, отличным от $\{e\}$ (т.е. $\{r \in (a, b) : a < 0 < b\}$), функция плотности $t(g, x) = m_g(dx)/m(dx)$ равномерно непрерывна по $(g \in Y \cap G(3), x \in S)$ и $|t(g, x) - 1| < \xi \forall (g, x) \in (Y \cap G(3)) \times S$, причем $\forall g \neq e, g \in W \cap G(3) \exists x \in W : t(g, x) \neq 1$. Здесь $m_g(Q) := m(gQ)$ для $Q \in A(G(p, b, j), m)$, $j = 1, 2$.

Случаи 1 и 2 теоремы 1 для четных l и $p = l$ содержатся в теоремах 1, 2 в [6]. Для нечетных l следует рассмотреть оператор $d \circ A$ вместо оператора A из [6] и использовать теорему Пуанкаре, где d – внешнее дифференцирование. При $p < l$ можно рассмотреть счетное всюду плотное подмножество точек $\{z(i) : i \in \mathbb{N}\}$ в M и соответствующие отображения вычисления $F(i, g) := g(z(i))$, тогда можно задать подмножества $W(k, p, c; f) := \{g \in W(p) : |F(i, g) - F(i, f)|_{C(p, b, TM)} \leq c, i = 1, \dots, k\}$, где $c > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in W(l)$, $W(l) = W(p) \cap G(p, b, j)$, $W(l)$ – окрестность id в $G(l, b, j)$, $m(l, *)$ – мера на $W(l)$. Тогда можно определить $m(p, W(k, p, c; f)) := m(l, W(k, l, c; f))$. Поскольку семейство $\{W(k, p, c; f) : k \in \mathbb{N}, c > 0, f \in W(l)\}$ порождает $B(W(p))$ с помощью счетного числа объединений и дополнений, то $m(l, *)$ индуцирует $m(*) = m(p, *)$ на $G(p, b, j)$, так как топология на $G(l, b, j)$ сильнее, чем на $G(p, b, j)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – нетривиальная группа БЛ или ЯЛ с m из леммы 1, или $G(p, b, j)$ с m из теоремы 1, или неартимедова $G(t)$ из [1], или недискретная ЛК группа с левой мерой Хаара m . Тогда G имеет топологически неприводимые унитарные представления $T : G \rightarrow U(H)$, не являющиеся слабо измеримыми. В случае коммутативной G или ГД она имеет неизмеримые характеры. Кардинальное число семейства таких представлений равно $2^{\text{card } G}$.

Доказательство проводится аналогично [2] с помощью построения алгебраических автоморфизмов $f : G \rightarrow G$, $f(G) = G$, таких, что для некоторой симметричной окрестности $U \ni e$ с $0 < m(U) < \infty$, $U \subset C$ для любых открытых E и F в U выполняется: (1) $\text{card}(f(E) \cap F) = \mathfrak{C}$. В случае групп Ли в шаре V с центром в 0, $V \subset X$, рассматривается топология ежа и соответствующая топология в U [7]. Причем в (1) накладывается дополнительное условие, что E и F – открытые подмножества в J , где J – объединение счетного семейства локальных однопараметрических подгрупп из U , причем J плотно в U . Для $G(p, b, j)$ и M , не принадлежащих классу $C(\infty)$, или $G(t)$ из [1], элементы бесконечного порядка плотны в U и мощность их семейства равна $\mathfrak{C}$, так как существует подходящая последовательность $C(\infty)$ многообразий $\{M(i) : i \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся равномерно к M в $\mathbb{R}^{2n+1}$, что дает f . Если представление $T : G \rightarrow U(H)$ – измеримое и нетривиальное, то $T \circ f$ – неизмеримое слабо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Людковский С. В. // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 169–170. [2] Людковский С. В. // Матем. сб. 1995. Т. 186. №2. С. 83–92. [3] Го Х. Гауссовы меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979. [4] Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Т. 4. М.: Физматлит, 1961. [5] van Rooij F. C. M. Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker, 1978. [6] Шавгулидзе Е. Т. // ДАН СССР. 1988. Т. 303. №4. С. 811–814. [7] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. [8] Lang S. Differential manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1985.