Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Лыскова, Полиномиальные решения некоторого класса обыкновенных дифференциальных уравнений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 207–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm987>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:26:49

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. С. ЛЫСКОВА

В настоящей работе рассматривается задача на собственные значения для дифференциального уравнения следующего типа:

$$(0) \quad p_n y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + \lambda y = 0,$$

где $p_i(x)$ – многочлен степени не выше i , и исследуется вопрос об ортогональности собственных функций с весом $\rho(x)$ на некотором интервале (a, b) .

Известно, что для случая $n = 2$ решения уравнения (0) являются классическими ортогональными многочленами.

Решения уравнения (0) обладают замечательным свойством: производные любого порядка от этих решений также удовлетворяют уравнению типа (0). Используя метод, предложенный в работе [1], можно доказать аналогичные теоремы для уравнения (0) произвольного порядка.

ТЕОРЕМА 1. Если $y = y(x)$ – решение уравнения (0), то $v_k(x) = y^{(k)}(x)$ – решение уравнения (k) такого же типа:

$$(k) \quad \sum_{i=1}^n p_i^k v_k^{(i)} + \lambda_k v_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом коэффициенты p_i^k и p_i связаны следующими соотношениями:

$$(1) \quad p_j^k = p_j + C_k^1 p_{j+1}' + C_k^2 p_{j+2}'' + \dots + C_k^{n-j} p_n^{(n-j)},$$

$$(2) \quad \lambda_k = \lambda + C_k^1 p_1' + C_k^2 p_2'' + \dots + C_k^{(n)} p_n^{(n)},$$

где $C_k^j = 0$ при $j > k$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Справедливо и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 1'. Любое решение уравнения (k) при $\lambda_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$, можно представить в виде $v_k(x) = y^{(k)}(x)$, где $y(x)$ – некоторое решение уравнения (0).

Рассмотренное свойство позволяет построить семейство частных решений уравнения (0), соответствующих определенным значениям λ .

ТЕОРЕМА 2. Существуют частные решения уравнения (0), являющиеся полиномами степени k и отвечающие собственным значениям λ_k :

$$(3) \quad \lambda_k = -C_k^1 p_1' - C_k^2 p_2'' - \dots - C_k^{(n)} p_n^{(n)},$$

где $C_k^j = 0$ при $j > k$.

Исследуем вопрос об ортогональности многочленов и их производных с некоторой плотностью $\rho(x)$ на интервале (a, b) .

Известно, что всякое самосопряженное дифференциальное выражение с действительными коэффициентами является суммой дифференциальных выражений четного порядка $l_{2\nu}(y) = (q(x)y^{(\nu)})^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$,

$$(4) \quad l(y) = \sum_{i=0}^{\mu} (q_{2i}(x)y^{(i)}(x))^{(i)},$$

где $q_{2\mu}(x), q_{2(\mu-1)}(x), \dots, q_0(x)$ – вещественные функции.

Умножим уравнения (0) и (к) на такие функции $\rho(x)$ и $\rho_k(x)$, чтобы записать их в самосопряженном виде:

$$(5) \quad \sum_{i=1}^n \rho p_i y^{(i)} + \lambda \rho y = \sum_{i=1}^{\mu} (q_{2i} y^{(i)})^{(i)} + \lambda \rho y,$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \rho_k p_i^k v_k^{(i)} + \mu_k \rho_k v_k = \sum_{i=1}^{\mu} (q_{2i}^k v_k^{(i)})^{(i)} + \mu_k \rho_k v_k.$$

Из равенств (5) и (6) следует, что $n = 2\mu$ и функции $\rho(x), \rho_k(x)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$(7) \quad \rho p_{n-1} = C_{\mu}^1 (\rho p_n)',$$

$$(8) \quad \rho_k p_{n-1}^k = C_{\mu}^1 (\rho_k p_n^k)',$$

откуда получаем, что

$$\frac{\rho'}{\rho} + \frac{k}{\mu} \frac{p_n'}{p_n} = \frac{\rho_k'}{\rho_k}$$

и, следовательно, $\rho_k = \rho(p_n)^{2k/n}$.

Из уравнений (7) и (8) можно найти плотности $\rho(x)$ и $\rho_k(x)$. Для любых многочленов u, v справедлива формула Лагранжа (см. [3])

$$(9) \quad \int_a^b (lu)v \, dx = \int_a^b u(lv) \, dx + P(\eta, \xi),$$

где $P(\eta, \xi)$ – некоторая билинейная форма относительно

$$\eta = (u_a, u'_a, \dots, u_a^{(n-1)}, u_b, u'_b, \dots, u_b^{(n-1)}), \quad \xi = (v_a, v'_a, \dots, v_a^{(n-1)}, v_b, v'_b, \dots, v_b^{(n-1)}).$$

Если $P(\eta, \xi) = 0$ (например, если $x^k \rho(x)|_{x=a} = x^k \rho(x)|_{x=b} = 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$), то многочлены $u(x), v(x)$ ортогональны на интервале (a, b) с плотностью $\rho(x)$. То есть справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены граничные условия $P(\eta, \xi) = 0$, то решения $y(x)$ уравнения (0) и их производные $v_k(x) = y^{(k)}(x)$ ортогональны на интервале (a, b) с плотностями $\rho(x)$ и $\rho_k(x) = \rho(p_n)^{2k/n}$, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. [2] Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным. М.: Наука, 1988. [3] Костюченко А. Г., Саргсян И. С. Распределение собственных значений. М.: Наука, 1979.

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана

Принято редколлегией
26.12.1995