Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Бородин, Александр И. Буфетов, Алексей И. Буфетов, А. М. Вершик, В. Е. Горин, А. И. Молев, В. Ф. Молчанов, Р. С. Исмагилов, А. А. Кириллов, М. Л. Назаров, Ю. А. Неретин, Н. И. Нессонов, А. Ю. Окуньков, Л. А. Петров, С. М. Хорошкин, Григорий Иосифович Олшанский (к семидесятилетию со дня рождения), *УМН*, 2019, том 74, выпуск 3, 193–213

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:38:26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Григорий Иосифович Ольшанский

(к семидесятилетию со дня рождения)

Настоящая статья представляет собой обзор математических работ Григория Иосифовича Ольшанского, автора основополагающих исследований по представлениям бесконечномерных групп, по детерминантным случайным точечным процессам и по многомерным специальным функциям. Также мы вкратце коснемся новых направлений и новых возможностей, возникших в связи с его открытиями.

Григорий Иосифович учился на мехмате МГУ в 1964–1969 гг. В его дипломной работе (см. [1]) была получена двойственность Фробениуса для пространств типа $L^2(G/\Gamma)$, где G – нильпотентная группа Ли, а Γ – решетка. В 1972 г. он окончил аспирантуру по кафедре теории функций и функционального анализа мехмата под руководством А. А. Кириллова. Кандидатская диссертация “Представления редуктивных групп над локальными неархимедовыми полями” была защищена в 1973 г. Далее он занимался *представлениями групп автоморфизмов деревьев Бруа–Титса* [2], эта работа приобрела определенную известность; на деревьях также были отлажены некоторые приемы [4], использованные им в исследованиях по классическим группам.

Быть может, главная работа Григория Иосифовича – **построение теории представлений бесконечномерных классических групп**; его дальнейшие исследования так или иначе были связаны с этой работой, она же во многом определила оригинальность его взгляда на классические группы, специальные функции, случайные процессы и комбинаторику. Работа была опубликована в серии статей 1978–1991 гг. (начало в [3], итоговые публикации¹ – [19], [21], этому была посвящена и докторская диссертация [15], защищенная в 1990 г. в Ленинградском отделении Математического института им. В. А. Стеклова).

К тому моменту, когда Григорий Иосифович включился в деятельность по представлениям бесконечномерных классических групп, содержательные работы на эту тему уже опубликовали многие авторы, в том числе М. Г. Крейн, Ф. А. Березин (книга [57] 1965 г., посвященная построению бесконечномерных симплектических и ортогональных спиноров), Д. Шейл, Ф. Стайнспринг, Г. Е. Шилов, Фан Дык Тинь,

¹Частично эти результаты переизложены в книге Ю. А. Неретина [62] (1996); полных переизложений пока нет.

А. А. Кириллов, С. В. Стратила, Д. Войкулеску. К началу 1980-х относятся работы на эту тему А. М. Вершика и С. В. Керова, ставшие важной точкой опоры в исследованиях Григория Иосифовича. Имелись также опубликованные исследования на родственную тему – о представлениях бесконечной симметрической группы – у Э. Тома, А. Либермана, А. М. Вершика, С. В. Керова. С этим была тесно связана асимптотическая теория симметрических групп, берущая начало в работах В. Л. Гончарова и У. Феллера и обретшая новую жизнь с появлением работы А. М. Вершика и А. А. Шмидта 1977 г.

Однако попытки создания связной картины представлений бесконечномерных классических групп сразу же наталкивались на вопросы о том, что есть бесконечномерная классическая группа и что такое ее представления. На первый взгляд кажется, что естественней всего рассматривать индуктивные пределы, например группу $GL(\infty, \mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} GL(n, \mathbb{R})$ всех бесконечных вещественных *финитарных матриц*, т.е. матриц g таких, что $g - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых матричных элементов, и аналогичные группы вещественных ортогональных матриц $O(\infty)$, унитарных матриц $U(\infty)$ и т.п. (такие матрицы естественно понимать как операторы в ℓ^2). Однако быстро стало ясно, что для подобных групп легко построить неисчислимо количество унитарных представлений (столько, сколько уже не хочется, и много больше), при этом делать бесспорно содержательные высказывания о таких массовых представлениях как будто не получается, так же как не получается найти какие-либо содержательные их связи с другими разделами математики. Можно было бы пробовать вводить разные топологии на индуктивных пределах и пытаться рассматривать получаемые классы представлений в зависимости от этих топологий. Но кандидатов в такие топологии удручающе много, а вопрос о том, чтобы строить теорию представлений в зависимости от топологий, выглядел крайне неудобным. Ольшанский нашел выход в этой весьма сложной и запутанной ситуации. Ключевой “зацепкой” оказалось понятие сферичности.

Пусть G – группа, K – ее подгруппа. Напомним, что K называется *сферической подгруппой*, если любое неприводимое унитарное представление ρ группы G содержит не более одного (с точностью до пропорциональности) K -неподвижного вектора; ρ называется *сферическим представлением*, если такой ненулевой вектор v есть. *Сферической функцией* называется соответствующий матричный элемент $\Phi(g) := \langle \rho(g)v, v \rangle$; мы предполагаем, что $\|v\| = 1$. Согласно теореме И. М. Гельфанда максимальные компактные подгруппы некомпактных полупростых групп Ли сферичны (например, $G = GL(\infty, \mathbb{R})$, $K = O(n)$), сферичны также симметрические подгруппы компактных групп Ли (например, $G = U(n) \times U(n)$, а $K = \text{diag } U(n)$ – ее диагональная подгруппа). Всего теорема Гельфанда дает 20 серий классических полупростых сферических пар $G(n) \supset K(n)$, они нумеруются полупростыми римановыми симметрическими пространствами ($G(n)$ – группа изометрий, $K(n)$ – стабилизатор точки). В сферических функциях естественно видеть многомерные аналоги гипергеометрических функций Гаусса (для пространств Лобачевского и их комплексных и кватернионных аналогов это обычные гипергеометрические функции). Теория гипергеометрических функций, интерполирующая сферические функции, была построена Г. Хекманом и Е. Опдамом, а более широкая теория, интерполирующая и p -адические объекты, – И. Макдональдом. Отметим, что характеры компактных групп Ли попадают в класс сферических функций и соответствуют парам типа² $G = U(n) \times U(n)$, $K = \text{diag } U(n)$ и т.п.

²Пусть ρ – неприводимое унитарное представление группы $U(n)$ в пространстве V . Пусть $\text{End}(V)$ – пространство линейных операторов в V со скалярным произведением $\langle A, B \rangle := (\dim V)^{-1} \text{tr } AB^*$. Группа $U(n) \times U(n)$ действует в $\text{End}(V)$ так: $(g_1, g_2): A \mapsto \rho(g_1)A\rho(g_2^{-1})$. Тогда единичный оператор – сферический вектор, а сферическая функция имеет вид $\Phi(g_1, g_2) = \text{tr } \rho(g_1 g_2^{-1})$, т.е. равна значению характера в точке $g_1 g_2^{-1}$.

А теперь заменим n на ∞ и рассмотрим пары типа $G(\infty) \supset K(\infty)$. Г. И. Ольшевский предложил простую и изящную конструкцию, основанную на симплектических и ортогональных спинорах, которая дает все сферические представления для всех таких пар. В качестве примера отметим, что для пары $GL(\infty) \supset O(\infty)$ сферические представления нумеруются конечными наборами вещественных чисел $s_1, \dots, s_k$ (возможно, с кратностями), а сферические функции выражаются через сингулярные числа λ_l матрицы g по формуле

$$\Phi_{s;a}(g) = |\det(g)|^{ia} \prod_{j=1}^k \prod_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(1 + is_j)\lambda_l + \frac{1}{2}(1 - is_j)\lambda_l^{-1} \right)^{-1/2}. \quad (1)$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$ – дополнительный (тривиальный и, в определенном смысле, паразитический) параметр. Для других симметрических пар $G(\infty) \supset K(\infty)$ ответ имеет примерно такую же форму (двойное произведение по параметрам и сингулярным числам с линейными множителями в степенях $\pm 1/2, \pm 1, \pm 2$). Для групп $G(\infty)$ компактного типа множество параметров счетно, и, скажем, для пары $U(\infty) \times U(\infty) \supset \text{diag } U(\infty)$, играющей важную роль в нашем дальнейшем изложении, оно распадается на четыре разных семейства³.

Класс сферических представлений, при его очевидной разумности, не замкнут относительно простейших операций – тензорных произведений и ограничений на подгруппы и, очевидно, должен был быть расширен. Оказалось, что любое $O(\infty)$ -сферическое представление ρ группы $GL(\infty, \mathbb{R})$ в гильбертовом пространстве H автоматически обладает следующими свойствами.

1°. Ограничение ρ на K – прямая сумма тензорных представлений⁴ K .

2°. Пусть $K^\alpha \subset K$ – подгруппа, оставляющая на месте первые α базисных векторов в ℓ^2 , и пусть H^α – пространство всех K^α -неподвижных векторов в H . Тогда $\bigcup H^\alpha$ плотно в H .

3°. Ограничение ρ на K непрерывно относительно равномерной операторной топологии на K . (Свойства 4°–6° ниже последовательно усиливают это свойство.)

4°. Ограничение ρ на K непрерывно относительно слабой операторной топологии на K .

5°. Представление ρ продолжается по непрерывности на группу операторов вида $A(1+T)$, где A – произвольный ортогональный оператор, а T – ядерный оператор.

6°. Если мы ограничим представление ρ на подгруппу $SL(\infty, \mathbb{R})$ матриц с единичным определителем, то полученное представление продолжается уже до представления группы операторов $A(1+T)$, где A – ортогональный оператор, а T – оператор Гильберта–Шмидта^{5,6}.

Свойства 1°–4° доказываются довольно просто, а свойства 5°, 6° получаются уже как следствие классификации сферических функций, что, наоборот, очень сложно.

³А. М. Вершик и С. В. Керов показали, как сферические функции на $U(\infty) \times U(\infty)$ получаются в качестве пределов характеров $U(n)$ при $n \rightarrow \infty$. См. также сноски 9, 10 далее.

⁴Возьмем стандартное представление π группы $O(\infty)$ в ℓ^2 и разложим его тензорные степени $\pi^{\otimes n}$ на неприводимые подпредставления. В этом месте интересных бесконечномерных эффектов не появляется, задача эта фактически та же, что и разложение тензорных степеней для $GL(N, \mathbb{C})$ (и проще, чем для $O(N)$). То, что появляется в разложениях, назовем *тензорными представлениями*.

⁵Например, представление, связанное со сферической функцией (1), для такого продолжения нужно подправить, положив $a = \sum s_j$; полученный расходящийся множитель погасит расходимость большого произведения.

⁶Рассмотрим однородное (симметрическое) пространство $GL(\infty, \mathbb{R})/O(\infty)$, снабженное естественной и (по существу) единственной инвариантной римановой метрикой. Пополним его по геодезическому расстоянию и рассмотрим группу изометрий пополнения. Оказывается, что получается именно эта группа.

Но важнее то, что свойства 1° – 4° оказались равносильными как абстрактные свойства унитарных представлений группы G (без условия сферичности)⁷.

Этот естественный класс представлений был назван Г. И. Ольшанским *допустимыми представлениями*⁸ и стал предметом его исследований. Важно и то, что предлагаемый подход позволял включить в общую картину большинство ранее написанных интересных работ на эту тему.

Немного повторимся, допустимые представления – это представления группы G , которые имеют “хорошее” ограничение на подгруппу K ; в качестве определения “хорошего ограничения” можно взять любое из свойств 1° , 2° . С другой стороны, при желании мы можем считать, что рассматриваются представления некоторой топологической группы $\hat{G} = \hat{G}(K)$, полученной пополнением G . По существу, это группа, описанная в утверждении 6° , но есть другие топологии, которые приведут к равносильной теории представлений.

Встав на эту точку зрения, мы получаем 20 классических групп (или пар группа–подгруппа) бесконечного ранга, в которых можно видеть группы изометрий бесконечномерных римановых симметрических пространств. Скажем, бесконечномерная унитарная группа $G = U(\infty)$ присутствует в списке не сама по себе, а вместе с подгруппой K ; именно, мы имеем пары

$$U(\infty) \supset O(\infty), \quad U(2\infty) \supset U(\infty) \times U(\infty), \quad U(2\infty) \supset Sp(\infty),$$

а также $U(\infty) \times U(\infty) \supset \text{diag } U(\infty)$. С ними связаны разные сферические функции и разные классы унитарных представлений. Если считать, что речь идет о представлениях топологических групп, то это просто разные топологические группы. Про группу $U(\infty) \times U(\infty)$ хочется сказать, что ее представления – это тензорные произведения представлений сомножителей, но элементарная теорема, на которую хочется сослаться, в данном случае не работает⁹, а соответствующая топологическая группа не является произведением групп.

Г. И. Ольшанский доказал, что все возникающие пары (G, K) являются группами типа I (из этого свойства топологических групп, которое трудно объяснить неспециалистам, вытекает, например, единственность разложения унитарных представлений на неприводимые представления). Он также предложил простую массовую конструкцию представлений групп (G, K) , основанную на симплектических и ортогональных спинорах и двойственности Хау, см. короткое простое изложение в [9]. В данной

⁷В данном случае свойства 5° , 6° тоже эквивалентны свойствам 1° – 4° ; что же касается утверждения в полной общности (для *всех* обсуждаемых ниже пар $G \supset K$), то это не доделано.

⁸ Проблема такого рода возникала когда-то и для конечномерных групп. Например, попытка расклассифицировать неприводимые *неунитарные* представления группы $SL(2, \mathbb{R})$ немедленно упирается в проблему инвариантного подпространства, и, как заметил в 1988 г. В. Сёргель, любой контрпример к проблеме производит монструозное неприводимое представление группы $SL(2, \mathbb{R})$. В 1950-х годах Хариш-Чандра выделил класс *допустимых представлений*, для которого такого рода бедствий не возникает.

⁹Ограничивая сферическое представление этой пары на один из множителей, мы получаем представление финитной группы $U(\infty)$ в факторе Мюррея–фон Неймана типа Π_1 . Для операторов в таких факторах определено понятие следа, а для представлений в факторах – понятие характера. Классификации характеров бесконечномерной симметрической группы в факторах типа Π_1 была посвящена статья Эльмара Тóма [64] – одна из первых работ по представлениям бесконечномерных групп. Позже характеры бесконечномерных классических групп компактного типа $U(\infty)$, $O(\infty)$, $Sp(\infty)$ были предметом исследований Д. Войкулеску, А. М. Вершика, С. В. Керова. Как заметил Григорий Иосифович, для любой группы K ее характеры типа Π_1 – это то же самое, что ограничения сферических функций $K \times K$ относительно $\text{diag } K$ на один из множителей, т. е. мы получаем эквивалентные теории.

теории спиноры заменяют собой параболическое индуцирование, используемое в теории представлений полупростых групп Ли (введенное И. М. Гельфандом, М. А. Наймарком и Хариш-Чандрой). Не вызывает сомнений, что данное семейство включает в себя все неприводимые представления *всех* (G, K) -пар, но далеко продвинутая попытка доказательства не была доведена до конца, и в полной общности утверждение остается не доказанным¹⁰.

Работа [9] была сразу же применена Ю. А. Неретиным для построения унитарных представлений группы диффеоморфизмов окружности, ее комбинаторного (древесного) аналога и групп петель. Г. И. Олшанский [17] успешно применил обсуждаемый подход к бесконечной симметрической группе, а его ученик А. Ю. Окуньков в своей диссертации провел до конца классификацию допустимых представлений пары $S(\infty) \times S(\infty) \supset \text{diag } S(\infty)$.

Для работы с бесконечномерными классическими группами Г. И. Олшанский разработал **полугрупповой метод**, который в итоге привел к построению алгебраических структур, представляющих самостоятельный интерес.

Первый подход. Рассмотрим *унитарное* представление ρ некоторой группы G . Рассмотрим также множество операторов $\rho(g)$, где g пробегает G , и замкнем его в слабой операторной топологии¹¹. Легко понять, что это замыкание компактно. Если G – полупростая группа Ли, то, как показали Р. Хау и К. Мур, всегда (с небольшими оговорками) получается одноточечная компактификация¹². Однако для бесконечномерных групп компактификация должна сильно отличаться от самой группы. Ключевым объектом (и камнем преткновения, несколько лет обсуждавшимся на семинаре А. А. Кириллова) оказалась полугруппа, возникающая в слабом замыкании “представления Вейля” (симплектических спиноров). Это полугруппа ограниченных гауссовых операторов в бозонном пространстве Фока, т. е. полугруппа интегральных операторов вида

$$\mathcal{B}[S]f(z) = \int \exp\left\{\frac{1}{2}(zKz^t + 2zL\bar{u}^t + \bar{u}M\bar{u}^t)\right\} f(u) e^{-|u|^2} du d\bar{u},$$

где

$$S = \begin{pmatrix} K & L \\ L^t & M \end{pmatrix},$$

$z, u \in \ell_2(\mathbb{C})$, $S = S^t$ – симметричная матрица; инвариантная гауссова мера, как объяснил в 1956 г. И. Сегал, существует и сидит на расширении гильбертова пространства, а f – голоморфная функция на ℓ_2 . Г. И. Олшанский нашел необходимые условия ограниченности для таких операторов ($\|S\| \leq 1$, $\|K\| < 1$, $\|M\| < 1$, а K , M – операторы Гильберта–Шмидта¹³) и предположил, что они достаточны. Несложно

¹⁰В доказательство полноты списка сферических функций в 1976–1991 гг. внесли вклад многие математики, в том числе Д. Войкулеску [66], А. М. Вершик, С. В. Керов, Н. И. Нессонов, Д. Пикрель.

¹¹Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех операторов с нормой ≤ 1 . Последовательность из $\mathcal{B}$ слабо сходится, если сходятся последовательности всех матричных элементов. Это превращает $\mathcal{B}$ в метризуемый компакт; операторное умножение раздельно непрерывно на $\mathcal{B}$.

¹²Есть интересный классический аналог задачи о слабом замыкании. Рассмотрим конечномерное неприводимое представление ρ полупростой группы Ли. Возьмем множество всех операторов вида $C \cdot \rho(g)$ и замкнем его в пространстве всех линейных преобразований, получится коническое многообразие, возьмем его проективизацию. Если ρ находится в общем положении (а именно, когда все числовые отметки на диаграмме Дынкина отличны нуля), то результат не зависит от ρ . Получается весьма забавное и нетривиальное гладкое алгебраическое многообразие, известное как *complete collineations* и *complete symmetric varieties*; ему были посвящены работы Дж. Семпля, К. де Кончини, К. Прочези.

¹³В случае, когда число переменных конечно, эти условия достаточны. Г. И. Олшанский нашел также формулы для норм этих операторов [25].

проверить, что

$$\mathcal{B}[S_1]\mathcal{B}[S_2] = \det(1 - M_1K_2)^{-1/2}\mathcal{B}[S_3],$$

где

$$S_3 := \begin{pmatrix} K_1 + L_1K_2(1 - M_1K_2)^{-1}L_1^t & L_1(1 - K_2M_2)^{-1}L_2 \\ L_2^t(1 - M_2K_1)^{-1}L_1^t & M_2 + L_2^t(1 - M_1K_2)^{-1}M_1L_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Однажды, осенью 1987 г., Григорий Иосифович вместе с двумя авторами настоящей статьи обсуждал 12 неудачных подходов к доказательству условий ограниченности операторов $\mathcal{B}[S]$. Ситуация вскоре прояснилась [16]: оказалось, что условия, сформулированные выше, все же не достаточны (но ядерности K и M уже хватает), что элементы полугруппы Γ (т. е. гауссовы интегральные операторы) нумеруются лагранжевыми линейными отношениями¹⁴, удовлетворяющими некоторому условию “положительности”, а формула (2) соответствует умножению линейных отношений. Оказалось также, что картина над p -адическими и конечными полями параллельна вещественной.

Второй подход. Для определенности рассмотрим ту же пару $G = \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R})$, $K = \mathrm{O}(\infty)$. Пусть $K^\alpha \subset K$ – те же подгруппы, что и выше в определении допустимости. Рассмотрим множество двойных классов смежности $\Gamma^\alpha := K^\alpha \backslash G / K^\alpha$. Оказывается, что на Γ^α определено следующее ассоциативное умножение $*$. Запишем g как блочную матрицу размера $(\alpha + \infty) \times (\alpha + \infty)$:

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

эти матрицы определены с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & bv \\ uc & udv \end{pmatrix},$$

где u, v – ортогональные матрицы. В этих обозначениях

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & b & aq \\ cp & d & cq \\ r & 0 & t \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Итоговая матрица имеет размер $\alpha + (\infty + \infty) = \alpha + \infty$ и рассматривается как элемент множества Γ^α . Более того, для любого допустимого представления ρ в пространстве H полугруппа Γ^α действует в подпространстве H^α всех K^α -неподвижных векторов. А именно, обозначим через P^α проектор на H^α . Для любого $g \in \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{R})$ определим следующий оператор в пространстве H^α :

$$\tilde{\rho}_\alpha(g) := P^\alpha \rho(g) P^\alpha.$$

Этот оператор зависит лишь от двойного класса смежности (что само собой разумеется), кроме того (что удивительно), выполнено тождество

$$\tilde{\rho}_\alpha(g_1 * g_2) = \tilde{\rho}_\alpha(g_1) \tilde{\rho}_\alpha(g_2).$$

Сделаем несколько общих замечаний. В классической теории представлений используются несколько объектов следующего типа (алгебры типа Гекке–Ивахори). Пусть G – локально компактная группа, а L – ее компактная подгруппа. Тогда определена сверточная алгебра L -биинвариантных функций с компактным носителем на G (т. е. $f(l_1gl_2) = f(g)$ для любых $l_1, l_2 \in L$), иными словами, мы берем функции,

¹⁴ *Линейное отношение* в линейном пространстве V – это подпространство в $V \oplus V$; в таком подпространстве можно видеть “линейный оператор”, только, быть может, не всюду определенный и, быть может, многозначный.

постоянные на двойных классах смежности G по L . Легко понять, что для любого унитарного представления ρ группы G сверточная алгебра действует в пространстве L -инвариантных векторов (более того, в случае неприводимого представления по этому действию, если оно ненулевое, восстанавливается начальное представление ρ). По этой причине подобные сверточные алгебры (в меру своей умопостигаемости, каковая встречается не часто) являются средством исследования унитарных представлений; в некоторых случаях такие алгебры живут своей жизнью независимо от породивших их групп (как алгебры Гекке и аффинные алгебры Гекке). Оказалось, что в бесконечномерном пределе сверточные алгебры могут вырождаться в полугруппы и что эти полугруппы часто оказываются интересными умопостигаемыми объектами. Полугрупповую структуру на множестве двойных классов смежности впервые обнаружил Р. С. Исмаилов в 1967 г., рассматривая сферические функции на группе $SL(2, P)$, где P – неархимедово не локально компактное поле. Г. И. Олшанский в [4] интерпретировал результаты Исмаилова в терминах группы автоморфизмов дерева, у которых из каждой вершины исходит счетное число ребер. При всей экзотичности этого графа, он, в определенном смысле, является аналогом (причем “игрушечным”) бесконечномерного пространства Лобачевского $SO_0(1, \infty)/SO(\infty)$. Так или иначе, обнаруженный эффект был применен уже к более привычным объектам.

Вернемся к паре $GL \supset O$. Г. И. Олшанский обнаружил связи умножения двойных классов смежности с некоторыми конструкциями теории операторов. В 1946–1955 гг. М. С. Лившиц и В. П. Потапов (параллельно похожие изыскания проводили Ч. Фойаш и Б. Секефальви-Надь, Дж. Хелтон и др.) в качестве спектральных данных операторов, близких к унитарным, рассматривали *характеристические функции*. Пусть для простоты d – оператор с нормой 1, отличающийся от унитарного оператора на конечномерный оператор ранга α . Тогда d встраивается в качестве блока в некоторую унитарную матрицу $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $\alpha + \infty$ (это простая операция, которая может быть проведена канонически). *Характеристическая оператор-функция* задается формулой

$$\chi(\lambda) := a + \lambda b(1 - \lambda d)^{-1}c, \quad (4)$$

она определена в единичном круге¹⁵ $|\lambda| < 1$ в $\mathbb{C}$. Тогда $\|\chi(\lambda)\| \leq 1$, а делители $\chi(\lambda)$ в классе таких голоморфных функций находятся в однозначном соответствии с инвариантными подпространствами оператора d .

В теории операторов известна операция “умножения операторных узлов”. Под “узлом” (colligation) подразумевается класс сопряженности полной бесконечномерной унитарной группы относительно меньшей (но бесконечномерной) унитарной группы, т. е. эквивалентность унитарных матриц имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & bu^{-1} \\ uc & udu^{-1} \end{pmatrix},$$

где u унитарна. Умножение “узлов” задается формулой (3). Эта операция была определена (по-видимому, в окончательном виде В. М. Бродским в 1971 г.) как ответ на вопрос о том, как интерпретировать умножение характеристических функций на языке операторов. Сегодня удобнее понимать все в обратном порядке: “узлу”, т. е. классу сопряженности, ставится в соответствие характеристическая функция (4), а умножению узлов соответствует умножение характеристических функций.

Так или иначе, сходство формул умножения (3) было вопиющим¹⁶, а вычисляя явно операторы $\tilde{\rho}_\alpha(g)$ (это гауссовы интегральные операторы в бозонном пространстве

¹⁵Имея в виду дальнейшее обсуждение, отметим, что в случае финитарных матриц $\chi(\lambda)$ унитарна на окружности $|\lambda| = 1$ (и, разумеется, мероморфна на всей сфере Римана).

¹⁶Стоит отметить, что, при внешнем совпадении формул, эквивалентности существенно различны, поэтому различны и операции умножения. Но похожи. . .

Фока), Григорий Иосифович обнаружил, что ядра операторов могут быть записаны через выражения типа (4) с некоторыми блочными матрицами a, b, c, d . Соответственно, умножение интегральных операторов переписывалось как некоторая операция на характеристических функциях. Эта операция умножения задавалась весьма сложной формулой, но чуть позже конструкция была подправлена Ю. А. Неретиним. Опишем то, что получается в результате естественного упрощения. Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^{2\alpha}$ с естественной кососимметричной формой $\{\cdot, \cdot\}$ и естественным комплексным сопряжением, тогда определено и знаконеопределенное скалярное произведение $M(v, w) := i\{v, \bar{w}\}$. Оказалось, что каждому двойному классу смежности ставится в соответствие мероморфная функция $\chi(\lambda)$ на сфере Римана со значениями в симплектической группе $\mathrm{Sp}(2\alpha, \mathbb{C})$, причем при вещественных λ матрица $\chi(\lambda)$ лежит в вещественной группе $\mathrm{Sp}(2\alpha, \mathbb{R})$, при $\mathrm{Im} \lambda > 0$ эта матрица является M -сжимающей, т. е.

$$M(\chi(\lambda)v, \chi(\lambda)v) \leq M(v, v) \quad \text{для всех } v, \quad (5)$$

а при $\mathrm{Im} \lambda < 0$ – соответственно M -растягивающей, умножению в полугруппе Γ^α соответствует поточечное умножение характеристических функций¹⁷. Таким образом, Γ^α становится умпостигаемым объектом и превращается в некоторую полугруппу голоморфных матричнозначных функций.

Осталось сказать, как связаны два подхода к построению полугрупповых оболочек: слабое замыкание может быть интерпретировано как предел полугрупп Γ^α при $\alpha \rightarrow \infty$.

Получается, что слабое замыкание группы может быть весьма непохожим на саму группу, а полугрупповые оболочки могут оказываться новыми интересными алгебраическими структурами. В частности, Ю. А. Неретин обнаружил комплексную оболочку группы диффеоморфизмов окружности (существование которой предположил Григорий Иосифович) и, используя полугрупповую технологию и работу [16], построил ее представления и модели конформной квантовой теории поля. Полугрупповая техника применима также к некоторым другим классам бесконечномерных групп: к бесконечным симметрическим группам, группам преобразований пространств с мерой, бесконечномерным классическим группам над p -адическими и конечными полями.

Упомянем несколько сопутствующих статей Григория Иосифовича по полупростым группам Ли [5], [18], [26], [6], [7], [8], связанных с его большой работой по бесконечномерным группам. Не имея возможности обсудить все эти статьи, мы кратко скажем лишь о работах по “**полугруппам Ольшанского**” [6]–[8] (интересно, что в 1980-х – начале 1990-х годов Григорий Иосифович был известен главным образом как автор этих работ). Рассматривается (полупростая) алгебра Ли $\mathfrak{g}$, а в ней выпуклый конус C , инвариантный относительно сопряжений элементами группы Ли G . Рассматриваются всевозможные кривые $\gamma(t)$ в G такие, что $\gamma(t)^{-1}\gamma'(t) \in C$, и точки группы, которые могут быть достигнуты посредством движения из единицы по таким кривым. Легко понять, что локально получается подполугруппа в G и касательный конус к ней в единице совпадает с C . Г. И. Ольшанский получил классификацию всех таких выпуклых конусов в полупростых алгебрах, всех глобальных подполугрупп в G , которые порождены выпуклыми конусами, а также представлений таких полугрупп сжимающими линейными операторами в гильбертовом пространстве¹⁸. Кроме того,

¹⁷Рациональную функцию $\mathbb{C} \rightarrow \mathrm{Sp}(2\alpha, \mathbb{C})$ можно рассматривать как голоморфное отображение Ξ сферы Римана в лагранжево грассманиан в $\mathbb{C}^{4\alpha}$ (график элемента группы $\mathrm{Sp}(2\alpha, \mathbb{C})$ – лагранжево подпространство, а все особенности устранимы). Тогда форма M при $\mathrm{Im} \lambda > 0$ будет неотрицательной на подпространстве $\Xi(\lambda)$, а при $\mathrm{Im} \lambda < 0$ – неположительной.

¹⁸Отдельный интерес представляет случай (к которому и относится термин “полугруппы Ольшанского”), когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является комплексификацией $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{h}$, а конус (клин) содержит $\mathfrak{h}$. Пример такой полугруппы – подполугруппа M -сжимающих матриц в $\mathrm{Sp}(2\alpha, \mathbb{C})$, см. (5)).

он использовал эти подгруппы для отделения голоморфных серий в L^2 -спектрах на группах. Григорий Иосифович заинтересовался этими объектами как инструментом для классификации допустимых унитарных представлений групп “конечного ранга” $O(p, \infty)$, $U(p, \infty)$, $Sp(p, \infty)$, которая была получена им в [10].

Вернемся к картине, оставшейся в бесконечномерных классических группах после работ Г.И. Ольшанского. Класс представлений¹⁹, введенный Григорием Иосифовичем, по-видимому, естественно расширить. Дело в том, что сферичность, будучи редким явлением для групп Ли, для бесконечномерных групп довольно обычна. Некоторое время было неясно, можно ли в расширенной общности работать, однако Н.И. Нессонов получил ряд классификационных теорем, не имеющих классических аналогов. Например (см. [63]), возьмем счетное множество Ω , разбитое на n счетных подмножеств $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, группу $G = S(\Omega)$, состоящую из всех финитных перестановок Ω , и ее юнговскую подгруппу K , состоящую из перестановок, переводящих каждое Ω_j в себя. Тогда K -сферические функции на G нумеруются комплексными положительно определенными матрицами $A = \{a_{kl}\}$ размера $n \times n$ с единицами на диагонали, а сферические функции задаются формулой

$$\Phi_A(g) = \prod_{k,l} a_{kl}^{\tau_{kl}(g)},$$

где $\tau_{kl}(g)$ – число элементов, которые g переводит из Ω_k в Ω_l . Так или иначе, переход в более общую теорию возможен (и постепенно происходит), но это означает и расширение области применения технологий, предложенных Г.И. Ольшанским.

В различных задачах гармонического анализа, связанных с некомпактными группами Ли (разложение регулярных и квазирегулярных представлений, ограничения на подгруппы, тензорные произведения), как правило, присутствуют непрерывные спектры. В течение шестидесятих–восемидесятих годов прошлого века во всех сколько-нибудь интересных задачах, связанных с бесконечномерными группами, возникали лишь дискретные спектры или представления не типа I. **Бесконечномерный некоммутативный гармонический анализ**, однако, существует, и в его открытие решающий вклад внес Григорий Иосифович.

Оказывается, что существует естественное каноническое отображение Υ_{n-1}^n из симметрической группы $S(n)$ в *меньшую* (!) симметрическую группу $S(n-1)$. Одно из многих возможных его определений такое. Разложим $g \in S(n)$ в произведение независимых циклов: $g = (i_1 i_2 \dots)(j_1 j_2 \dots) \dots$, и просто вычеркнем n из этой записи. Понятно, что полученное отображение не является гомоморфизмом, однако оно хорошо согласовано со структурой групп, а именно, для любых $h_1, h_2 \in S(n-1)$ выполнено равенство

$$\Upsilon_{n-1}^n(h_1 g h_2) = h_1 \Upsilon_{n-1}^n(g) h_2. \quad (6)$$

Теперь мы можем рассмотреть бесконечную возрастающую цепочку

$$S(1) \xleftarrow{\Upsilon_1^2} \dots \xleftarrow{\Upsilon_{n-2}^{n-1}} S(n-1) \xleftarrow{\Upsilon_{n-1}^n} S(n) \xleftarrow{\Upsilon_n^{n+1}} \dots \quad (7)$$

¹⁹Стоит отметить, что Григорий Иосифович нашел-таки одну удивительно общую абстрактную теорему [12] об индуктивных пределах $\lim_{\rightarrow} G(n) =: G(\infty)$ локально компактных групп. А именно, любой матричный элемент $\langle T(g)v, v \rangle$ неприводимого унитарного представления группы $G(\infty)$ аппроксимируется равномерно на компактных подмножествах матричными элементами $\langle T_n(g)v_n, v_n \rangle$ неприводимых представлений T_n групп $G(n)$. Это утверждение дает, например, новый способ доказательства утверждений теории exchangeability (см. [29]).

и проективный предел $\mathfrak{S}$ этой цепочки²⁰. Очевидно, что для каждого $p \in S(n-1)$ его прообраз $(\Upsilon_{n-1}^n)^{-1}p \subset S(n)$ состоит ровно из n точек, поэтому наши отображения согласованы с равномерными вероятностными распределениями на группах $S(n)$, следовательно, по теореме Колмогорова об обратных пределах, на $\mathfrak{S}$ определена вероятностная мера μ_0 , чьи проекции на все $S(n)$ совпадают с равномерными распределениями (на самом деле на $\mathfrak{S}$ имеется естественное однопараметрическое семейство мер μ_t – меры Ювенса).

Эта конструкция возникла в связи с работами У. Ювенса 1970-х годов по распределению аллелей в биологических популяциях; в конце 1970-х – начале 1980-х годов она привлекла внимание ряда математиков (Дж. Кингман, Д. Питман, Д. Альдус и др.). А. М. Вершик, С. В. Керов и Г. И. Олшанский [23] поняли, что, хотя обратный предел и не является группой, на нем действует левыми и правыми умножениями бесконечная симметрическая группа $S(\infty)$; в этом легко убедиться, глядя на формулу (6). Мера μ_0 инвариантна относительно этих действий, а меры μ_t квазиинвариантны. Поэтому мы получаем семейство унитарных представлений группы²¹ $S(\infty) \times S(\infty)$ в пространствах $L^2(\mathfrak{S}, \mu_t)$. В этих представлениях естественно видеть аналог регулярного представления²².

Теперь рассмотрим унитарную блочную матрицу $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $m + (n - m)$. Положим

$$\Upsilon_m^n(g) := a - b(1 + d)^{-1}c. \quad (8)$$

Оказывается, что мы получаем отображение $U(n) \rightarrow U(m)$, определенное почти всюду (это не очевидно²³), оно коммутирует с левыми и правыми умножениями на элементы группы $U(n)$, образ меры Хаара относительно Υ_m^n оказывается мерой Хаара, а поэтому мы можем рассмотреть обратный предел цепочки $\mathfrak{U} := \lim_{\leftarrow n} U(n)$. Ю. А. Нертин построил на $\mathfrak{U}$ естественное двухпараметрическое семейство вероятностных мер. В связи с этим возникает задача разложения пространств L^2 на $\mathfrak{U}$ в интеграл сферических представлений.

Итоговые выражения для спектральных мер совсем не похожи на классические “формулы Планшереля” для полупростых групп Ли (типа длинного произведения Г-функций у С. Г. Гиндикина и Ф. И. Карпелевича). Как мы видели, сферические

²⁰Этот предел (Chinese restaurant process) допускает разные конструктивные описания – см. [41], а также статью С. В. Керова и Н. В. Цилевич [59].

²¹Имеется в виду группа бесконечных финитных подстановок, причем фактически на $\mathfrak{S}$ действует пополнение группы $S(\infty) \times S(\infty)$, состоящее из пар подстановок (g_1, g_2) таких, что $g_1 g_2^{-1}$ финитна.

²²Представление группы $S(\infty) \times S(\infty)$ в $\ell^2(S(\infty))$, кажущееся естественным кандидатом в регулярные представления, неприводимо, а ограничение на один из сомножителей дает фактор Мюррея–фон Неймана типа Π_1 ; формально такие представления разлагаются в интеграл неприводимых представлений, но задача эта резко патологична. Ничего похожего на классические утверждения о регулярных представлениях конечных или компактных групп (Ф. Г. Фробениус, Ф. Э. Молин, Ф. Петер, Г. Вейль) не получается, как и вообще не получается ничего интересного. Эти обстоятельства для счетных дискретных групп были давно известны.

²³Очевидно, однако, что выражение (8) – частный случай выражения (4), а сформулированное высказывание – частный случай утверждения в сноске 15, обнаруженного М. С. Лившицем в 1940-х годах. С другой стороны, график элемента $g \in U(n)$ является подпространством $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, изотропным относительно эрмитовой формы, определяемой матрицей $i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Оказывается, что Υ_m^n – отображение грассманианов, заданное некоторым линейным отношением (см. сноску 14). Отметим также, что странные вычисления интегралов в знаменитой книге Хуа Ло-Кена [58] объясняются такими “вырожденными симметриями”.

представления зависят от счетного набора параметров, и нужно было найти меру на некотором пространстве счетных подмножеств прямой. Задача оказалась очень тяжелой и требовала поиска новых подходов. Пытаясь вычислить спектральную меру, Г. И. Олшанский понял, что появляющиеся у него выражения напоминают формулы, которые были известны в теоретической физике в теории случайных матриц. В итоге задача для бесконечной симметрической группы была решена в серии препринтов Г. И. Олшанского и его ученика А. М. Бородина 1998 г., итоговые публикации: [33], [39]. Для бесконечномерной унитарной группы задача тоже была решена Олшанским и Бородиным в 2001 г. (см. [41]).

Ответ в обоих случаях был дан на языке *детерминантных случайных точечных процессов*. Такой процесс, для определенности на прямой, задается ядром $K(x, y)$. Мера на множестве Ξ счетных подмножеств прямой определяется следующим свойством: вероятность того, что бесконечно малые отрезки $[x_1, x_1 + dx_1], \dots, [x_n, x_n + dx_n]$ имеют непустые пересечения с множеством $\xi \in \Xi$, равна

$$\det_{\alpha, \beta} K(x_\alpha, x_\beta) dx_1 \cdots dx_n.$$

Ядра в случае симметрической группы выражаются через вырожденные гипергеометрические функции, в случае унитарной группы – через гипергеометрические функции Гаусса.

На сегодняшний день известен определенный зоопарк естественных задач бесконечномерного гармонического анализа. Обратные пределы типа $\lim_{n \leftarrow \infty} U(n)$ есть для всех десяти серий классических компактных симметрических пространств. Чтобы их увидеть из формулы (8), нужно рассмотреть унитарные матрицы над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и кватернионами $\mathbb{H}$ и перебрать все возможные условия симметрии матриц, $g = \pm g^t$, $g = \pm g^*$. Первый обратный предел компактных римановых симметрических пространств был построен Д. Пикрелем в 1987 г. (комплексные грассманианы). Имеются вариации вышеупомянутой конструкции с симметрической группой (задача гармонического анализа на одном из таких пространств – обратном пределе паросочетаний – рассматривалась Е. Страховым), Ю. А. Неретин также построил обратные пределы грассманианов над p -адическими полями и похожие конструкции для бесконечномерных грассманианов и флаговых многообразий над конечными полями. На сегодняшний день не ясно, ограничены ли возможности гармонического анализа вычислением спектральных мер или за этим последует продолжение. В любом случае, с решением связанных с $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{U}$ задач возникло новое поле деятельности.

Интересы самого Г. И. Олшанского к концу 1990-х годов сместились в сторону теории вероятностей и **детерминантных процессов**, которыми он стал заниматься, имея опору на теорию представлений. Напомним, что первый по времени пример детерминантного случайного точечного процесса был обнаружен физиком Ф. Дайсоном в 1962 г. Он рассматривал распределение собственных чисел унитарных матриц порядка N при $N \rightarrow \infty$. Понятно, что собственные числа в пределе “сидят” на окружности плотно и равномерно. Однако если одновременно удлинять окружность, то получается детерминантный процесс на прямой, задаваемый ядром

$$K(x, y) = \frac{\sin \pi(x - y)}{\pi(x - y)}.$$

Позже детерминантные выражения были получены для других распределений собственных чисел матриц (например, в середине 1990-х годов К. Трэйси и Г. Уидом получали асимптотики типа “у края спектра”). Широкий класс ядер детерминантных процессов (а выражений за последние 25 лет накопилось много) имеет вид

$$\frac{f(x)g(y) - g(x)f(y)}{x - y},$$

где f и g – некоторые функции. Выражения сходной структуры получаются и в случае анализа на пространствах $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{U}$.

Работы Г.И. Олшанского и А.М. Бородина конца 1990-х годов имели многих последователей и повлекли взрывное внедрение детерминантных процессов в математику (сам термин *determinantal point process* был введен в обиход ими же); оказалось, что эти процессы на удивление часто возникают в самых разных естественных задачах. Формализм детерминантных процессов был использован А.М. Бородиным, А.Ю. Окуньковым и Г.И. Олшанским для доказательства известной гипотезы Дж. Байка–П. Дейфта–К. Йоханссона об асимптотическом поведении длин нескольких наибольших возрастающих подпоследовательностей случайной перестановки большого размера [37]. В работе [49] Г.И. Олшанский установил квазиинвариантность детерминантного процесса с гамма-ядром под действием группы финитных перестановок и поставил вопрос о степени общности, в которой имеет место такая квазиинвариантность. Совместно со своим учеником В.Е. Гориным он построил q -аналог теории для $\mathfrak{U}$ (см. [52]); это направление продолжает активно развиваться. Г.И. Олшанский разработал чрезвычайно элегантный и эффективный метод асимптотического анализа детерминантных процессов, основанный на спектральной теории разностных операторов [44], [45]; его метод был многократно использован при анализе разнообразных мер на разбиениях и плоских разбиениях. Совместно с А.М. Бородиным Г.И. Олшанский показал, как детерминантные процессы ведут к асимптотике системы взаимодействующих частиц под названием ASEP (asymmetric simple exclusion process) [54], которая ранее считалась недоступной для детерминантного (или свободно-фермионного) анализа. Была также построена теория марковских процессов, сохраняющих детерминантные процессы, связанные с классическими специальными функциями [42], [50].

Другой комбинаторно-вероятностный аспект в работах Г.И. Олшанского последних 20 лет – это **изучение графов ветвления и их границ**. Это направление началось с работы А.М. Вершика и С.В. Керова о “графе Юнга” и характерах бесконечномерной симметрической подгруппы [65]. Однако у Григория Иосифовича такие графы зажили своей жизнью, далеко уйдя от изначальных мотивировок.

Для определенности рассмотрим граф Гельфанда–Цетлина. Напомним, что неприводимые представления ρ_α группы $U(n)$ нумеруются *сигнатурами* α – наборами целых чисел вида $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n$. Ограничение представления ρ_α на $U(n-1)$ – это прямая сумма всех ρ_β , удовлетворяющих условию

$$\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n-1} \leq \alpha_n$$

(мы в этом случае пишем $\alpha \downarrow \beta$). Вершины графа Гельфанда–Цетлина разделены по уровням $n = 0, 1, 2, \dots$, вершины уровня n нумеруются сигнатурами α , ребра соединяют лишь вершины соседних этажей при условии $\alpha \downarrow \beta$. Функцию $\phi(n, \alpha)$ на множестве вершин назовем *гармонической*, если

$$\phi(n, \alpha) = \sum_{\gamma: \gamma \downarrow \alpha} \phi(n+1, \gamma). \quad (9)$$

Рассмотрим линейные комбинации характеров $F_n := \sum_{\alpha} \phi(n, \alpha) \chi_{\alpha}$, тогда гармоничность означает, что ограничение F_n на $U(n-1)$ равно F_{n-1} . На этом языке характеры типа Π_1 группы $U(\infty)$ (они же сферические функции пары $U(\infty) \times U(\infty) \supset \text{diag } U(\infty)$) – это крайние точки Φ_{ω} пространства неотрицательных гармонических функций (говоря формальным языком, это точки минимальной границы марковского процесса). Задача написания спектральной меры μ для $\mathfrak{U}$ превращается в задачу разложения некоторой конкретной положительной гармонической функции Ψ по

крайним точкам,

$$\Psi(n, \alpha) = \int \Phi_\omega(n, \alpha) d\mu(\omega).$$

Г. И. Ольшанский понял, что здесь, по аналогии с теорией сферических функций, можно выйти из теории представлений. В определении гармонической функции можно правильным образом вводить коэффициенты в правой части (9), тогда возникают новые задачи о крайних точках, появляются и задачи о разложении некоторых естественных гармонических функций по крайним точкам.

Г. И. Ольшанский развил широкий набор методов, применимых к задачам отыскания границ: с С. В. Керовым и А. Ю. Окуньковым [35], [34], [44] они использовали комбинаторику симметрических и сдвинутых симметрических функций и обобщили результаты о границах на общие значениях джековского параметра θ (этот параметр обобщает размерность основного поля в теории сферических функций и связан со случайно-матричным параметром, который принято обозначать β ; в примере с $U(n)$ выше мы имеем $\theta = 1$). А вместе с А. М. Бородиным [51] они нашли красивые детерминантные формулы для кратностей в задаче ограничения неприводимых представлений $U(n)$ на $U(m)$.

Свежий поворот в развитии этого сюжета связан с изучением q -деформаций классических объектов. Первый результат такого рода был получен Г. И. Ольшанским совместно с А. В. Гнединым [47], [48]: они решили q -версию классической задачи де Финетти о характеристизации всех последовательностей случайных величин, инвариантных относительно перестановок. Недавно, совместно с В. Е. Гориным [52], удалось найти новую и пока что до конца не понятую q -деформацию в намного более сложной задаче, связанной с унитарной группой $U(\infty)$. Неожиданным следствием и ответвлением этой деятельности стало открытие нового класса неоднородных симметрических ортогональных полиномов от бесконечного числа переменных в работах Г. И. Ольшанского и Ц. Куенка [55], [56].

Еще одним приложением теории границ оказалось построение Л. А. Петровым бесконечномерных марковских диффузий, тесно связанных с популяционной генетикой. А. М. Бородин и Г. И. Ольшанский [46], [50] продемонстрировали, как такие процессы можно строить из графов ветвления, переводя на вероятностный язык и развивая идею об аппроксимации бесконечномерных групп конечномерными подгруппами. Удивительным образом, этот способ позволил доказать свойства и теоремы о бесконечномерных диффузиях, которые не поддавались усилиям специалистов по классической теории вероятностей.

Перейдем к работам Г. И. Ольшанского по **янгианам**. Работая в 1980-х годах с представлениями бесконечномерных групп, Григорий Иосифович попытался применить к ним технику универсальных обертывающих алгебр и предложил алгебраическую параллель полугрупповой конструкции. Зафиксируем число m . Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{gl}(n)$ всех матриц порядка n и в ней подалгебру $\mathfrak{gl}(n-m)$, состоящую из блочных $(m + (n-m))$ -матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$. Обозначим через $e_{\alpha\beta}$ стандартный базис в $\mathfrak{gl}(n)$. Рассмотрим универсальную обертывающую алгебру $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$ и в ней централизатор $\mathcal{A}_m(n)$ подалгебры $\mathfrak{gl}(n-m)$. Ссылаясь на классическую теорию инвариантов, можно показать, что алгебра $\mathcal{A}_m(n)$ порождена элементами вида $p_M, p_{ij|M}$, где $1 \leq i, j \leq m, M \in \mathbb{N}$:

$$p_M := \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_M=1}^n e_{\alpha_1 \alpha_2} e_{\alpha_2 \alpha_3} \cdots e_{\alpha_M \alpha_1}, \quad p_{ij|M} := \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{M-1}=1}^n e_{i \alpha_1} e_{\alpha_1 \alpha_2} \cdots e_{\alpha_{M-1} j},$$

элементы p_M лежат в центре алгебры $\mathcal{A}_m(n)$. Имеется естественный гомоморфизм $o_m: \mathcal{A}_m(n) \rightarrow \mathcal{A}_m(n-1)$, определенный по аналогии с гомоморфизмом Хариш-Чандры

(оказывается, что он переводит образующие $p_M, p_{ij|M}$ алгебры $\mathcal{A}_m(n)$ в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{A}_m(n-1)$). Это позволяет определить цепочку

$$\mathcal{A}_m(m) \xleftarrow{o_{m+1}} \mathcal{A}_m(m+1) \xleftarrow{o_{m+2}} \dots \xleftarrow{o_n} \mathcal{A}_m(n) \xleftarrow{o_{n+1}} \dots$$

и ее проективный предел $\mathcal{A}_m$ (алгебра Ольшевского). Ее образующими можно считать те же элементы $p_M, p_{ij|M}$. Г. И. Ольшевский показал, что получается алгебра с квадратичными соотношениями, которые были явно выписаны и имеют несложный вид. Далее он ввел алгебру $\mathcal{A}$ как индуктивный предел $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{A}_m$ и предложил видеть в ней аналог обертывающей алгебры для $\mathfrak{gl}(\infty)$.

Эта конструкция была анонсирована в работе [13] 1987 г., подробности опубликованы в [14], [20] (обстоятельное изложение есть в обзоре [27] и подробнее в книге А. И. Молева [61]). Б. Л. Фейгин предположил, что алгебры $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}$ связаны с янгианом²⁴. Это действительно оказалось так, алгебра $\mathcal{A}_m$ разлагается в тензорное произведение

$$\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{Y}(\mathfrak{gl}(m))$$

алгебры виртуальных операторов Лапласа $\mathcal{A}_0$, порожденной элементами p_M , и янгиана $\mathcal{Y}(\mathfrak{gl}(m))$, ассоциированного с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(m)$. Интересно, что янгианы естественно “вырастают” как объекты теории представлений²⁵.

В тот момент Григорий Иосифович ожидал, что применение аналогичной централизаторной конструкции к другим сериям классических алгебр Ли приведет к соответствующим янгианам, введенным В. Г. Дринфельдом в 1985 г. Однако в случаях ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{o}(N)$ и симплектической алгебры Ли $\mathfrak{sp}(2n)$ проективный предел централизаторов оказался связанным с новыми алгебрами $\mathcal{Y}^+(N)$ и $\mathcal{Y}^-(2n)$ соответственно, которые Григорий Иосифович назвал *скрученными янгианами*. Прямой их связи с янгианами Дринфельда для $\mathfrak{o}(N)$ и $\mathfrak{sp}(2n)$ не обнаружилось. Скрученные янгианы $\mathcal{Y}^+(N)$ и $\mathcal{Y}^-(2n)$ отождествляются с подалгебрами в соответствующем янгиане $\mathcal{Y}(\mathfrak{gl}(N))$ или $\mathcal{Y}(\mathfrak{gl}(2n))$, причем эти подалгебры являются коидеалами относительно структуры алгебры Хопфа. Эти результаты были впервые опубликованы в работе [22], а подробное изложение было дано позже в статьях [27] и [36].

Для алгебр Ли всех четырех классических серий соответствующие (скрученные) янгианы обладают важным свойством: определены точечные (evaluation) эпиморфизмы в универсальные обертывающие алгебры:

$$\mathcal{Y}(\mathfrak{gl}(m)) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{gl}(m)), \quad \mathcal{Y}^+(N) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{o}(N)), \quad \mathcal{Y}^-(2n) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{sp}(2n)),$$

что важно для приложений к классической теории представлений. И. В. Чередник обнаружил, что скрученные янгианы могут использоваться в классической теории представлений как средство для разделения кратностей. Поскольку определяющие соотношения янгианов и скрученных янгианов допускают специальную “ R -матричную” форму, их структуру можно изучать с помощью соответствующей техники, берущей свое начало в работах ленинградской школы Л. Д. Фаддеева. В частности, эта техника применима к построению центральных элементов в янгианах, так что применение точечных гомоморфизмов приводит к новым конструкциям элементов Казимира для классических алгебр Ли и соответствующим “тождествам Капелли” (см. упомянутую выше книгу А. И. Молева [61]). С помощью централизаторной конструкции Ольшевского А. И. Молеву удалось построить в 1998 г. базисы типа Гельфанда–Цетлина

²⁴Речь шла о янгиане $\mathcal{Y}(\mathfrak{gl}(m))$ алгебры $\mathfrak{gl}(m)$, он был известен как “ленинградская алгебра” и появился в начале 1980-х годов в школе Л. Д. Фаддеева в связи с “квантовым методом обратной задачи” (см., например, [60]).

²⁵Это, кстати, дает возможность построить представления самих янгианов, опираясь на представления централизаторов. Таким образом возникает естественный класс так называемых “ручных”, или “косых”, представлений янгианов, подробно изученных М. Л. Назаровым и В. О. Тарасовым; их суперверсии рассматривались А. И. Молевым.

для представлений симплектических алгебр Ли (вопрос о таких базисах был задан Д. П. Желобенко в начале 1960-х годов) и *весовые* базисы для ортогональных алгебр.

Совместная с М. Л. Назаровым работа [28] посвящена применению R -матричной техники к построению семейств коммутативных подалгебр в янгианах. Использование точечных гомоморфизмов позволило авторам дать положительное решение проблемы Э. Б. Винберга о квантовании: они построили максимальные коммутативные подалгебры в классических универсальных обертывающих алгебрах, так что соответствующие присоединенные градуированные алгебры – это коммутативные пуассоновы подалгебры “сдвига аргумента” в симметрических алгебрах, построенные А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко.

Работы Г. И. Олшанского по янгианам стимулировали дальнейшие исследования в этой области как со стороны специалистов по теории представлений, так и со стороны специалистов по математической физике (Н. Гай, Э. Рагуси, А. И. Молев, М. Л. Назаров и С. М. Хорошкин, В. Регелескис, К. Вендландт, Дж. Браун, Х. Чен, С. Ма, Л. О. Чехов, К. Мазоччо, Х. Бао, В. Ванг, Ш. Кольб, Б. Влаар, Г. Летцтер, М. Балагович и др.). В частности, были получены различные обобщения централизаторной конструкции на другие семейства алгебр, а скрученные янгианы исследовались как алгебры симметрий в моделях статистической механики.

У централизаторной конструкции есть неожиданный аналог, а именно, она применима и к цепочке групповых алгебр симметрических групп

$$\mathbb{C}[S(1)] \subset \mathbb{C}[S(2)] \subset \dots \subset \mathbb{C}[S(n)] \subset \mathbb{C}[S(n+1)] \subset \dots$$

и приводит к вырожденным *аффинным алгебрам Гекке* [13], [11], [38].

Очень важное место в трудах Г. И. Олшанского занимают **специальные функции теории представлений**. Разумеется, конкретный вид неприводимых представлений, их характеры и пр. связаны с богатейшей теорией специальных функций, что было ясно уже основателям теории представлений. Новаторство и важность работ Г. И. Олшанского во многом проистекают из той новой точки зрения на классическую теорию представлений, которая открывается с высоты бесконечномерной теории и, в частности, с точки зрения теории представлений бесконечномерных классических групп, развитой Г. И. Олшанским.

В качестве самого простого, но очень яркого примера можно взять представления симметрической группы $S(n)$ и соответствующий неприводимый характер $\chi^\lambda(\sigma) = \chi_\mu^\lambda$, нумеруемый двумя разбиениями λ, μ числа n . Разбиение μ кодирует длины циклов перестановки $\sigma \in S(n)$, и традиционная теория представлений рассматривает μ как аргумент функции χ_μ^λ , а λ – как параметр. С точки зрения представлений $S(\infty) = \bigcup_n S(n)$, наоборот, важно зафиксировать нетривиальные циклы σ и смотреть на λ как на аргумент. В работе 1994 г. [24] С. В. Керов и Г. И. Олшанский, во-первых, доказали замечательный результат о том что нормированные характеры $f_\sigma(\lambda) = \chi^\lambda(\sigma)/\chi^\lambda(1)$ образуют базис в некоторой алгебре многочленов Λ^* от дискретной переменной λ , а во-вторых, объяснили важность и естественность этой алгебры и ее связь с классической алгеброй Λ симметрических функций. В частности, идентификация компоненты старшей степени f_σ есть принципиальный шаг в современном понимании асимптотической теории характеров, зародившейся в трудах А. М. Вершика и С. В. Керова.

Можно было бы подумать что функция $f_\mu(\lambda)$ не определена для $|\lambda| < |\mu|$, но на самом деле она определена и *обращается в нуль* в этом случае. Это замечательное свойство положено в основу характеристики *интерполяционных функций Шура* s_μ^* , изученных в работах Г. И. Олшанского и А. Ю. Окунькова [30]–[32]. Эти функции могут быть определены как своего рода интерполяционные многочлены Ньютона в алгебре Λ^* , и тот факт, что их компоненты старшей степени $|\mu|$ совпадают с обычными функциями Шура, т. е. с характерами неприводимых представлений группы GL, есть

отражение глубоких симметрий в теории представлений. Такого рода интерполяционные функции для общих классических групп G неразрывно связаны с биномиальными формулами (т. е. с разложением неприводимых характеров в ряд в окрестности $1 \in G$), важными базами в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, асимптотической теорией характеров G и многими другими вопросами.

Исключительной по своей важности и проницательности оказалась идея Г. И. Ольшанского о том, что теория интерполяционных функций естественно распространяется с алгебр типа Λ^* на их деформации, связанные с многочленами Макдональда и родственными им многомерными специальными функциями. Хотя группа G как таковая в этой теории отходит на задний план, появляется много других важных структур и приложений, играющих центральную роль в современной математике. Соответствующая теория интерполяционных функций, развитая Г. И. Ольшанским, А. Ю. Окуньковым, Ф. Кнопом, С. Сахи, Э. Райнсом и другими, играет ключевую смысловую и техническую роль в современном состоянии теории специальных функций.

Скажем несколько слов о **биографии** Григория Иосифовича. Он родился в Москве 8 января 1949 г. в семье киносценариста и писателя Иосифа Григорьевича Ольшанского. По окончании аспирантуры, в 1972–1975 гг., работал в должности младшего научного сотрудника в НИИ дошкольного воспитания АПН СССР, в 1975–1987 гг. (когда были сделаны основные работы по представлениям бесконечномерных классических групп) работал старшим научным сотрудником ВНИИПИСтромсырье (Все-союзный²⁶ научно-исследовательский и проектно-изыскательский институт по проблемам добычи, транспорта и переработки минерального сырья в промышленности строительных материалов), а в 1987–1990 гг. он был старшим научным сотрудником отдела гляциологии Института географии АН СССР. С 1991 г. Григорий Иосифович работает в Институте проблем передачи информации РАН (ведущим, а затем главным научным сотрудником), с 2013 г. он является также профессором Высшей школы экономики, а с 2017 г. – профессором Сколтех.

В 1970–1980-е годы Г. И. Ольшанский был одним из самых активных участников семинара А. А. Кириллова по теории представлений – в то время одного из важнейших математических семинаров Москвы. Кроме того, Григорий Иосифович поставил у себя дома доску и регулярно проводил встречи и небольшие семинары с молодыми людьми (об одном таком семинаре упомянуто выше). В 1980-х – начале 1990-х годов он фактически был научным руководителем ряда участников семинара Кириллова, среди его учеников того времени – такие ставшие впоследствии известными авторы, как А. М. Бородин, А. И. Молев, М. Л. Назаров, А. Ю. Окуньков. Среди более поздних учеников – Алексей И. Буфетов, В. Е. Горин, В. Н. Иванов, А. А. Осиненко, Л. А. Петров. С 2009 г. Григорий Иосифович ведет (совместный с МИАН) семинар в Московском независимом университете (сейчас вместе с А. И. Буфетовым, А. В. Дымовым и А. В. Клименко).

Г. И. Ольшанский – автор 110 научных статей и совместной с А. М. Бородиным книги “Representations of the infinite symmetric groups” ([53], 2017 г.). Он также редактор сборника “Kirillov’s seminar on representation theory”, изданного в 1998 г. Американским математическим обществом.

Г. И. Ольшанский был приглашенным докладчиком на IV Европейском математическом конгрессе 2004 г. (совместный доклад с А. М. Бородиным “Теория представлений и точечные случайные процессы”), а также на Международном математическом конгрессе 2014 г. (доклад “Графы Гельфанда–Цетлина и марковские процессы”). Он входит в правление Московского математического общества и в редколлегии журналов “Функциональный анализ и его приложения”, “Transformation Groups”, “Journal of Lie Theory”, “SIGMA”.

²⁶В настоящее время это слово из названия института (занимающегося проектированием карьерных разработок) опущено, но спереди добавлена аббревиатура ФГУП.

Григорий Иосифович оказал сильнейшее математическое влияние на каждого из нас. Мы сердечно поздравляем его с семидесятилетием и от всей души желаем здоровья, успехов в науке и воспитании молодых математиков.

А. М. Бородин, Александр И. Буфетов, Алексей И. Буфетов,
А. М. Вершик, В. Е. Горин, А. И. Молев, В. Ф. Молчанов,
Р. С. Исмаилов, А. А. Кириллов, М. Л. Назаров, Ю. А. Неретин,
Н. И. Нессонов, А. Ю. Ожуньков, Л. А. Петров, С. М. Хорошкин

Список цитированных работ Г. И. Олшанского

- [1] “О теореме двойственности Фробениуса”, *Функц. анализ и его прил.*, **3**:4 (1969), 49–58; англ. пер.: “On the duality theorem of Frobenius”, *Funct. Anal. Appl.*, **3**:4 (1969), 295–302.
- [2] “Классификация неприводимых представлений групп автоморфизмов деревьев Брюа–Титса”, *Функц. анализ и его прил.*, **11**:1 (1977), 32–42; англ. пер.: “Classification of irreducible representations of groups of automorphisms of Bruhat–Tits trees”, *Funct. Anal. Appl.*, **11**:1 (1977), 26–34.
- [3] “Унитарные представления бесконечномерных классических групп $U(p, \infty)$, $SO_0(p, \infty)$, $Sp(p, \infty)$ и соответствующих групп движений”, *Докл. АН СССР*, **238**:6 (1978), 1295–1298; англ. пер.: “Unitary representations of the infinite-dimensional classical groups $U(p, \infty)$, $SO_0(p, \infty)$, $Sp(p, \infty)$ and the corresponding groups of motions”, *Soviet Math. Dokl.*, **19** (1978), 220–224.
- [4] “Новые ‘большие’ группы типа I”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем.*, **16**, ВИНТИ, М., 1980, 31–52; англ. пер.: “New ‘large’ groups of type I”, *J. Soviet Math.*, **18**:1 (1982), 22–39.
- [5] “Описание унитарных представлений со старшим весом для групп $U(p, q)$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:3 (1980), 32–44; англ. пер.: “Description of unitary representations with highest weight for groups $U(p, q)$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:3 (1980), 190–200.
- [6] “Инвариантные конусы в алгебрах Ли, полугруппы Ли и голоморфная дискретная серия”, *Функц. анализ и его прил.*, **15**:4 (1981), 53–66; англ. пер.: “Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups, and the holomorphic discrete series”, *Funct. Anal. Appl.*, **15**:4 (1981), 275–285.
- [7] “Инвариантные упорядочения в простых группах Ли: решение задачи Э. Б. Винберга”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:4 (1982), 80–81; англ. пер.: “Invariant orderings in simple Lie groups. The solution to E. B. Vinberg’s problem”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:4 (1982), 311–313.
- [8] “Комплексные полугруппы Ли, обобщенные пространства Харди и программа Гельфанда–Гиндикина”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, Изд. Ярослав. ун-та, Ярославль, 1982, 85–98; англ. пер.: “Complex Lie semigroups, Hardy spaces and the Gel’fand–Gindikin program”, *Differential Geom. Appl.*, **1**:3 (1991), 235–246.
- [9] “Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Хау”, *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 33–36; англ. пер.: “Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe”, *Soviet Math. Dokl.*, **27**:2 (1983), 290–294.
- [10] “Бесконечномерные классические группы конечного R -ранга: описание представлений и асимптотическая теория”, *Функц. анализ и его прил.*, **18**:1 (1984), 28–42; англ. пер.: “Infinite-dimensional classical groups of finite r -rank: description of representations and asymptotic theory”, *Funct. Anal. Appl.*, **18**:1 (1984), 22–34.

- [11] “Unitary representations of the infinite symmetric group: a semigroup approach”, *Representations of Lie groups and Lie algebras* (Budapest, 1971), Acad. Kiadó, Budapest, 1985, 181–197.
- [12] “Унитарные представления группы $SO_0(\infty, \infty)$ как пределы унитарных представлений групп $SO_0(n, \infty)$ при $n \rightarrow \infty$ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:4 (1986), 46–57; англ. пер.: “Unitary representations of the group $SO_0(\infty, \infty)$ as limits of unitary representations of the groups $SO_0(n, \infty)$ as $n \rightarrow \infty$ ”, *Funct. Anal. Appl.*, **20**:4 (1986), 292–301.
- [13] “Расширение $U(\mathfrak{g})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$, и янгианы $Y(\mathfrak{gl}(m))$ ”, *Докл. АН СССР*, **297**:5 (1987), 1050–1054; англ. пер.: “Extension of the algebra $U(\mathfrak{g})$ for infinite-dimensional classical Lie algebras $\mathfrak{g}$, and the Yangians $Y(\mathfrak{gl}(m))$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, **36**:3 (1988), 569–573.
- [14] “Янгианы и универсальные обертывающие алгебры”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. IX*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **164**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1987, 142–150; англ. пер.: “Yangians and universal enveloping algebras”, *J. Soviet Math.*, **47**:2 (1989), 2466–2473.
- [15] *Унитарные представления бесконечномерных классических групп*, Дисс. ... докт. физ.-матем. наук, Ин-т географии АН СССР, М., 1989, 271 с., http://iitp.ru/upload/userpage/52/Olshanski_thesis.pdf.
- [16] “Semi-groupes engendrés par la représentation de Weil du groupe symplectique de dimension infinie”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **309**:7 (1989), 443–446 (with M. Nazarov, Yu. Neretin).
- [17] “Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ ”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: “Unitary representations of (G, K) -pairs connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$ ”, *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
- [18] “Неприводимые унитарные представления групп $U(p, q)$, выдерживающие предельный переход при $q \rightarrow \infty$ ”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 10*, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **172**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1989, 114–120; англ. пер.: “Irreducible unitary representations of the groups $U(p, q)$ sustaining passage to the limit as $q \rightarrow \infty$ ”, *J. Soviet Math.*, **59**:5 (1992), 1102–1107.
- [19] “Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe”, *Representations of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 269–463.
- [20] “Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras, and Yangians”, *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 1–66.
- [21] “On semigroups related to infinite-dimensional groups”, *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–101.
- [22] “Twisted Yangians and infinite-dimensional classical Lie algebras”, *Quantum groups* (Leningrad, 1990), Lecture Notes in Math., **1510**, Springer, Berlin, 1992, 104–119.
- [23] “Harmonic analysis on the infinite symmetric group. A deformation of the regular representation”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **316**:8 (1993), 773–778 (with S. Kerov, A. Vershik).
- [24] “Polynomial functions on the set of Young diagrams”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **319**:2 (1994), 121–126 (with S. Kerov).
- [25] “Представление Вейля и нормы гауссовых операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **28**:1 (1994), 51–67; англ. пер.: “Weil representation and norms of Gaussian operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **28**:1 (1994), 42–54.
- [26] “Граничные значения голоморфных функций, особые унитарные представления групп $O(p, q)$ и их пределы при $q \rightarrow \infty$ ”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. I*, Зап. науч. сем. ПОМИ,

- 223**, ПОМИ, СПб., 1995, 9–91 (совм. с Ю. А. Неретиным); англ. пер.: “Boundary values of holomorphic functions, singular unitary representations of $O(p, q)$, and their limits as $q \rightarrow \infty$ ”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **87**:6 (1997), 3983–4035 (with Yu. A. Neretin).
- [27] “Янгианы и классические алгебры Ли”, *УМН*, **51**:2(308) (1996), 27–104 (совм. с А. Молевым, М. Назаровым); англ. пер.: “Yangians and classical Lie algebras”, *Russian Math. Surveys*, **51**:2 (1996), 205–282 (with A. Molev, M. Nazarov).
- [28] “Bethe subalgebras in twisted Yangians”, *Comm. Math. Phys.*, **178**:2 (1996), 483–506 (with M. Nazarov).
- [29] “Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices”, *Contemporary mathematical physics*, F. A. Berezin memorial volume, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **175**, Adv. Math. Sci., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 137–175 (with A. Vershik).
- [30] “Сдвинутые функции Шура”, *Алгебра и анализ*, **9**:2 (1997), 73–146 (совм. с А. Окуньковым); англ. пер.: “Shifted Schur functions”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:2 (1998), 239–300 (with A. Okounkov).
- [31] “Shifted Jack polynomials, binomial formula, and applications”, *Math. Res. Lett.*, **4**:1 (1997), 69–78 (with A. Okounkov).
- [32] “Shifted Schur functions. II. The binomial formula for characters of classical groups and its applications”, *Kirillov’s seminar on representation theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **181**, Adv. Math. Sci., 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 245–271 (with A. Okounkov).
- [33] “Point processes and the infinite symmetric group”, *Math. Res. Lett.*, **5**:6 (1998), 799–816 (with A. Borodin).
- [34] “Asymptotics of Jack polynomials as the number of variables goes to infinity”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1998**:13 (1998), 641–682 (with A. Okounkov).
- [35] “The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1998**:4 (1998), 173–199 (with S. Kerov, A. Okounkov).
- [36] “Centralizer construction for twisted Yangians”, *Selecta Math. (N. S.)*, **6**:3 (2000), 269–317 (with A. Molev).
- [37] “Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups”, *J. Amer. Math. Soc.*, **13**:3 (2000), 481–515 (with A. Borodin, A. Okounkov).
- [38] “Degenerate affine Hecke algebras and centralizer construction for the symmetric groups”, *J. Algebra*, **237**:1 (2001), 302–341 (with A. I. Molev).
- [39] “An introduction to harmonic analysis on the infinite symmetric group”, *Asymptotic combinatorics with applications to mathematical physics*, Lecture Notes in Math., **1815**, Springer, Berlin, 2003, 127–160.
- [40] “Harmonic analysis on the infinite symmetric group”, *Invent. Math.*, **158**:3 (2004), 551–642 (with S. Kerov, A. Vershik).
- [41] “Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes”, *Ann. of Math. (2)*, **161**:3 (2005), 1319–1422 (with A. Borodin).
- [42] “Markov processes on partitions”, *Probab. Theory Related Fields*, **135**:1 (2006), 84–152 (with A. Borodin).
- [43] “Limits of BC -type orthogonal polynomials as the number of variables goes to infinity”, *Jack, Hall–Littlewood and Macdonald polynomials*, Contemp. Math., **417**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 281–318 (with A. Okounkov).
- [44] “Asymptotics of Plancherel-type random partitions”, *J. Algebra*, **313**:1 (2007), 40–60 (with A. Borodin).
- [45] “Разностные операторы и детерминантные точечные процессы”, *Функц. анализ и его прил.*, **42**:4 (2008), 83–97; англ. пер.: “Difference operators and determinantal point processes”, *Funct. Anal. Appl.*, **42**:4 (2008), 317–329.

- [46] “Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions”, *Probab. Theory Related Fields*, **144**:1-2 (2009), 281–318 (with A. Borodin).
- [47] “A q -analogue of de Finetti’s theorem”, *Electron. J. Combin.*, **16**:1 (2009), R78, 16 pp. (with A. Gnedin).
- [48] “ q -exchangeability via quasi-invariance”, *Ann. Probab.*, **38**:6 (2010), 2103–2135 (with A. Gnedin).
- [49] “The quasi-invariance property for the Gamma kernel determinantal measure”, *Adv. Math.*, **226**:3 (2011), 2305–2350.
- [50] “Markov processes on the path space of the Gelfand–Tsetlin graph and on its boundary”, *J. Funct. Anal.*, **263**:1 (2012), 248–303 (with A. Borodin).
- [51] “The boundary of the Gelfand–Tsetlin graph: a new approach”, *Adv. Math.*, **230**:4-6 (2012), 1738–1779 (with A. Borodin).
- [52] “A quantization of the harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group”, *J. Funct. Anal.*, **270**:1 (2016), 375–418 (with V. Gorin).
- [53] *Representations of the infinite symmetric groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016, vii+160 pp. (with A. Borodin).
- [54] “The ASEP and determinantal point processes”, *Comm. Math. Phys.*, **353**:2 (2017), 853–903 (with A. Borodin).
- [55] “Аналог больших полиномов q -Якоби”, *Функц. анализ и его прил.*, **51**:3 (2017), 56–76; англ. пер.: “An analogue of the big q -Jacobi polynomials in the algebra of symmetric functions”, *Funct. Anal. Appl.*, **51**:3 (2017), 204–220.
- [56] *Elements of the q -Askey scheme in the algebra of symmetric functions*, 2018, 53 pp., arXiv:1808.06179 (with C. Cuenca).

Цитированные работы других авторов

- [57] Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, Наука, М., 1965, 235 с.; англ. пер.: F. A. Berezin, *The method of second quantization*, Pure and Applied Physics, **24**, Academic Press, New York–London, 1966, xii+228 pp.
- [58] Хуа Ло-кен, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, пер. с китайск., ИЛ, 1959, 163 с.; англ. пер.: L. K. Hua, *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*, Repr. of 1963 original, Transl. Math. Monogr., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1979, iv+186 pp.
- [59] С. В. Керов, Н. В. Цилевич, “Случайное дробление отрезка порождает виртуальные перестановки с распределением Ювенса”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы. I*, Зап. науч. сем. ПОМИ, **223**, ПОМИ, СПб., 1995, 162–180; англ. пер.: S. V. Kerov, N. V. Tsilevich, “Stick breaking process generated by virtual permutations with Ewens distribution”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **87**:6 (1997), 4082–4093.
- [60] P. P. Kulish, N. Yu. Reshetikhin, E. K. Sklyanin, “Yang–Baxter equation and representation theory. I”, *Lett. Math. Phys.*, **5**:5 (1981), 393–403.
- [61] А. И. Молев, *Янгианы и классические алгебры Ли*, МЦНМО, М., 2009, 534 с.; англ. изд.: A. Molev, *Yangians and classical Lie algebras*, Math. Surveys Monogr., **143**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, xviii+400 pp.
- [62] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, Эдиториал УРСС, М., 1998, 431 с.; англ. изд.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N. S.), **16**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1996, xiv+417 pp.

- [63] Н. И. Нессонов, “Представления $\mathfrak{S}_\infty$, допустимые относительно подгрупп Юнга”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 127–160; англ. пер.: N. I. Nessonov, “Representations of $\mathfrak{S}_\infty$ admissible with respect to Young subgroups”, *Sb. Math.*, **203**:3 (2012), 424–458.
- [64] E. Thoma, “Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe”, *Math. Z.*, **85** (1964), 40–61.
- [65] А. М. Вершик, С. В. Керов, “Асимптотическая теория характеров симметрической группы”, *Функц. анализ и его прил.*, **15**:4 (1981), 15–27; англ. пер.: A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Asymptotic theory of characters of the symmetric group”, *Funct. Anal. Appl.*, **15**:4 (1981), 246–255.
- [66] D. Voiculescu, “Représentations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$ ”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **55**:1 (1976), 1–20.