Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Смолкин, Об одном свойстве решений специального класса вырождающихся эллиптических уравнений, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 209–210

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:04:23

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. А. Смолкин

В настоящей статье усилены результаты работ [1]–[2], касающихся проблемы гипоеллиптичности специального класса Φ дифференциальных операторов. Для описания этого класса мы используем общепринятые определения и обозначения теории обобщенных функций и псевдодифференциальных операторов (см., например, [3]). Пусть Ω – окрестность плоскости $x_1 = 0$ в пространстве $\mathbb{R}^3 \equiv \{x : x = (x_1, x_2, x_3)\}$; ω – подобласть, принадлежащая Ω вместе с замыканием: $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$, $i^2 = -1$, $j = 1, 2, 3$; n, m, l – натуральные числа. Оператор $P(x, D)$ из класса Φ имеет вид

$$P(x, D) = D_1^{2n} + b^2(x_1) D_2^{2m} + g^2(x_1) D_1^{2l},$$

где вещественные бесконечно дифференцируемые в Ω функции $b(x_1), g(x_1)$ удовлетворяют условиям: 1) $g(x_1) \neq 0$, если $x_1 \neq 0$; 2) $|g(x_1)| \leq C|b(x_1)|$, C – ограниченная константа на всяком компакте из Ω .

ТЕОРЕМА. *Дифференциальный оператор из Φ гипоеллиптичен в Ω тогда и только тогда, когда для любой функции $U \in C_0^\infty(\mathbb{R} \cap K)$, где K – произвольный компакт из Ω , и любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число $T = T(K, \varepsilon)$ такое, что при всех $t \geq T$ выполнено неравенство*

$$(1) \quad \int |bU|^2 dx_1 \leq \frac{\varepsilon}{t^{2m}} \int (|D_1^n U|^2 + \exp(t)|gU|^2) dx_1.$$

Для доказательства теоремы сформулируем представляющее самостоятельный интерес вспомогательное утверждение. С этой целью положим $r = 8 \max(n, m, l)$; $\lambda(\xi) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/r}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$. Обозначим через $H^s(\mathbb{R}^3)$, $s \in \mathbb{R}$, пространство распределений $U \in S'(\mathbb{R}^3)$, для которых

$$\|U\|_s = \left(\int |\widehat{U}(\xi)|^2 \lambda^{2s}(\xi) d\xi \right)^{1/2} < \infty,$$

$\widehat{U}(\xi)$ – преобразование Фурье функционала U . В случае $s = 0$ вместо $\|U\|_s$ будем просто писать $\|U\|$.

Для замораживания двойственной переменной определим функции $\Psi_k(\xi) = F(\ln \lambda(\xi) - k)$, $\overline{\Psi}_k(\xi) = F(0.5(\ln \lambda(\xi) - k))$ ($k = 0, 1, \dots$), где $F(x_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq F(x_1) \leq 1$; $F(x_1) = 1$ при $|x_1| \leq 0.6$; $F(x_1) = 0$, если $|x_1| \geq 0.7$.

Всюду в дальнейшем k – натуральное число.

Кроме того, для микролокализации оценок нам также потребуются функции $h_1(x), H_1(x), H(x) \in C_0^\infty(\omega)$, причем $h_1(x) = 1$ в окрестности носителей функций $H_1(x), H(x)$, и $H(x) = 1$ в окрестности носителей функции $H_1(x)$. Здесь $H_1(x) = F(qx_1)G(y)$, $q > 0$, $y = (x_2, x_3)$, а $G(y) = F(q|y|) \cdot \exp(-2krn(1 - F(4q|y|)))$.

Наконец, пусть $V = h_1 U(x)$, $U(x) \in D'(\Omega)$. Тогда имеет место

ЛЕММА. *Если k достаточно большое, то существует константа c , не зависящая от k , такая, что*

$$(2) \quad \|H_1 \Psi_k(x, D) V\|^2 \leq C (\|h_1 \Psi_k(x, D) H P(x, D) V\|^2 + \exp(-k) \|\overline{\Psi}_k(D) V\|^2).$$

Опуская доказательство леммы, отметим лишь, что в нем используются методы получения оценок, развитые в [3], исчисление псевдодифференциальных операторов из [4].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. *Достаточность.* Пусть $U \in D'(\Omega)$, $P(x, D)U \in C^\infty(\omega)$. Выберем $\mu \in \mathbb{R}$ так, что $h_1 U \in H^\mu(\omega)$. Тогда, заменив в неравенстве (2) V на $\exp(k\mu + \frac{k}{4})V$ и сложив указанные оценки по k , получаем

$$\|H_1 U\|_{\mu+1/4}^2 \leq C(\|HP(x, D)h_1 U\|_{\mu+1/4}^2 + \|h_1 U\|_{\mu-1/4}^2).$$

Отсюда следует гипоеллиптичность нашего оператора $P(x, D)$.

Необходимость. Обозначим через Q_t , $t > 0$, дифференциальный оператор:

$$Q_t = D_1^{2n} + \exp(t)g^2(x_1).$$

Определим (G, W) равенством $(G, W) = \int G(x_1) \overline{W(x_1)} dx_1$, считая $G(x_1), W(x_1) \in H^0(\mathbb{R})$, а функцию $\overline{W(x_1)}$ комплексно сопряженной к функции $W(x_1)$.

Предположим, что оценка (1) не выполнена, т.е. для некоторой окрестности ω нуля существуют последовательность целых чисел $\{k_j\}$ с $\lim_{j \rightarrow \infty} k_j = \infty$ и функции $U_j = U_j(x_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \cap \omega)$

такие, что $\|U_j\| = \left(\int |U_j|^2 dx_1 \right)^{1/2} = 1$ и

$$(3) \quad (Q_{k_j} U_j, U_j) \leq k_j^{2m} (bU_j, bU_j).$$

Далее, пусть числа $N_j \in \mathbb{R}$ и функции $W_j(x_1) \in H^0(\mathbb{R} \cap \omega)$ удовлетворяют условиям

$$N_j^{2m} = \frac{(Q_{k_j} W_j, W_j)}{(bW_j, bW_j)} = \inf_{\|U\|=1} \frac{(Q_{k_j} U, U)}{(bU, bU)}, \quad U = U(x_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \cap \omega).$$

Из неравенства (3) и того, что $g(x_1) \neq 0$, $x_1 \neq 0$, имеем

$$(4) \quad N_j^{2m} \leq k_j^{2m}, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} N_j = \infty.$$

Поскольку $Q_{k_j} W_j(x_1) = N_j^{2m} \cdot b^2 \cdot W_j(x_1)$, $x_1 \in \mathbb{R} \cap \omega$, то можно выбрать $\gamma > 0$ так, что функции

$$Z_j(x) = F\left(\frac{1}{\gamma}|x|\right) \cdot W_j(x_1) \cdot \exp((x_2 - \gamma)N_j) \cdot \exp\left(ix_3 \exp\left(\frac{k_j}{2}\right)\right), \quad t^2 = -1,$$

удовлетворяют соотношениям:

$$\|Z_j\| \leq \gamma^3; \quad P(x, D)Z_j(x) = 0, \quad |x| \leq 0.6\gamma.$$

Однако из условий (4) для любых целых $s > 2\gamma$ следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|D_3^s Z_j\| = \infty.$$

Это противоречит гипоеллиптичности оператора $P(x, D)$.

В заключение автор выражает благодарность профессору Ю. В. Егорову за постановку задачи, а также признательность М. В. Мещерякову за ценные советы при подготовке текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Федий В. С. // Матем. сб. 1971. Т. 78. С. 18–48. [2] Morimoto Y. // Osaka J. Math. 1987. V. 24. №3. P. 651–675. [3] Радкевич Е. В. // Матем. сб. 1969. Т. 79. С. 193–216. [4] Parenti C., Rodino L. // Comm. Partial Differential Equations. 1980. V. 5. №6. P. 561–594.