Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Соловьев, Минимаксное и минимаксно-байесовское оценивание параметров линейной регрессии, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm989>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 08:14:27

МИНИМАКСНОЕ И МИНИМАКСНО-БАЙЕСОВСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ

В. Н. СОЛОВЬЕВ

1. Минимаксные оценки точечных параметров. Пусть в линейной регрессионной модели

$$(1) \quad \mathcal{Y} = \mathcal{A}\theta + \xi, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ I_m \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \rho \\ -\varepsilon \end{pmatrix},$$

наряду с косвенными наблюдениями $\gamma = A\theta + \rho \in \mathbb{R}^n$ имеются прямые наблюдения $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ параметров $\theta \in \mathbb{R}^m$, а их ошибки удовлетворяют априорным ограничениям

$$(2) \quad E\xi = 0, \quad \text{cov}(\xi, \xi) = X \in \mathcal{X},$$

в которых $\mathcal{X}$ – выпуклый компакт положительно определенных матриц порядка $n + m$. Рассмотрим линейные оценки $\tilde{l}_j = (x_j, \mathcal{Y})$, $x_j \in \mathbb{R}^{n+m}$, параметров $l_j = (c_j, \theta)$, $j = 1, \dots, r$. Обозначим через x блочный вектор $x = \{x_1, \dots, x_r\} \in \mathbb{R}^{(n+m)r}$. Гарантированное значение $2D(x) := \sup_{\theta, \xi} E|\tilde{l} - l|^2$ среднеквадратичной ошибки оценивания вектора $l = C\theta \in \mathbb{R}^r$ конечно, если $\mathcal{A}^T x_j = c_j$, $j = 1, \dots, r$. В этом случае

$$(3) \quad 2D(x) = \max_{X \in \mathcal{X}} \sum_{j=1}^r (Xx_j, x_j).$$

Чтобы найти минимаксные оценки $\tilde{l}_j^* = (x_j^*, \mathcal{Y})$ параметров l_j , $j = 1, \dots, r$, нужно решить задачу

$$(4) \quad \tilde{D}_{\min}/2 = \min_x \{D(x) \mid \mathcal{A}^T x_j = c_j, j = 1, \dots, r\}.$$

Фундаментальную роль играет двойственная задача [1], [2]

$$(5) \quad \tilde{D}_{\min}/2 = - \min_{\theta_j \in \mathbb{R}^m} \left\{ D^*(\mathcal{A}\theta_1, \dots, \mathcal{A}\theta_r) - \sum_{j=1}^r (c_j, \theta_j) \right\}.$$

ЛЕММА. Сопряженная функция $D^*(y)$ дифференцируема и может быть записана в форме

$$(6) \quad D^*(y) = \min_{X \in \mathcal{X}} \sum_{j=1}^r (X^{-1}y_j, y_j)/2.$$

Для фиксированного вектора $y = \{y_1, \dots, y_r\} \in \mathbb{R}^{(n+m)r}$, матрица $X_y \in \mathcal{X}$ тогда и только тогда дает решение вспомогательной задачи (6), когда она дает решение задачи (3) для вектора $x = x(y)$ с компонентами $x_j(y) = X_y^{-1}y_j$, $j = 1, \dots, r$. В этом случае $D^*(y) = D(x(y))$, $\nabla D^*(y) = x(y)$.

2. Теорема эквивалентности. Обозначим через $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ класс всех распределений случайного вектора $Y = \{\gamma, \theta\}$, удовлетворяющих априорным ограничениям $\gamma = A\theta + \rho$, $E\theta = \theta_0$, $E\rho = 0$ и $\text{cov}(\xi, \xi) = X \in \mathcal{X}$ с вектором $\xi = \{\rho, \theta_0 - \theta\}$. Пусть

$$(7) \quad D_{\min} = \inf_{\tilde{l}(\cdot)} \sup_{P \in \mathcal{P}} E_P |\tilde{l} - l|^2$$

– это минимаксно-байесовская точность оценивания вектора $l = C\theta$ для класса $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ и класса всех измеримых функций $\tilde{l}(\gamma): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^r$, а $\tilde{D}_{\min}$ – это минимаксная точность оценивания (4) точечных параметров l в регрессионной модели (1)–(2). Обозначим через $\hat{l}_*$ и $\tilde{l}_*$ решения задач (7) и (4), соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Если $\mathcal{X}$ – выпуклый компакт положительно определенных матриц, то

$$(8) \quad D_{\min} = \tilde{D}_{\min} = \max_{X \in \mathcal{X}} \sum_{j=1}^r ((\mathcal{A}^T X^{-1} \mathcal{A})^{-1} c_j, c_j).$$

Пусть $X_* \in \mathcal{X}$ – решение задачи (8). Тогда МНК-оценка

$$(9) \quad \hat{l}_* = \tilde{l}_* = C(\mathcal{A}^T X_*^{-1} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{A}^T X_*^{-1} y$$

дает решение задач (7) и (4), а векторы

$$(10) \quad \theta_j^* = (\mathcal{A}^T X_*^{-1} \mathcal{A})^{-1} c_j, \quad j = 1, \dots, r,$$

дают решение двойственной задачи (5). И, наоборот, если θ^* – решение двойственной задачи, а $X_* \in \mathcal{X}$ – решение вспомогательной задачи (6), вычисленное для векторов $y_j = \mathcal{A}\theta_j^*$, $j = 1, \dots, r$, то X_* – наименее благоприятная матрица ковариаций для МНК-оценок вектора l (т.е. решение задачи (8)), и справедливы равенства (9), (10). Наименее благоприятно нормальное распределение $\xi \sim \mathcal{N}(0, X_*)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$ – класс всех распределений вектора ошибок ξ со вторыми моментами $E\xi\xi^T \in \mathcal{B} = \{B = X + ee^T \mid X \in \mathcal{X}, e \in \mathcal{E}\}$ где $\mathcal{E}$ – выпуклый центрально-симметричный компакт в $\mathbb{R}^m$, то для задач (7) и (4) оценивания скалярного параметра $l = (c, \theta)$ справедливы равенства (8)–(10), если заменить матрицы ковариаций $X \in \mathcal{X}$ на матрицы вторых моментов $B \in \mathcal{B}$. Наименее благоприятно нормальное распределение $\xi \sim \mathcal{N}(0, B_*)$.

3. Минимаксно-байесовские оценки параметров в случае произвольной корреляции сигнала и шума. Пусть теперь в модели наблюдений $E\theta = \theta_0$, $E\rho = 0$, $\text{cov}(\theta, \theta) = T \in \mathcal{T}$, $\text{cov}(\rho, \rho) = R \in \mathcal{R}$ нам ничего не известно о взаимной ковариации $\text{cov}(\rho, \theta)$, кроме неотрицательности определенности матрицы ковариаций вектора $\{\theta, \rho\} \in \mathbb{R}^{n+m}$. Здесь мы будем считать, что ранги матриц A и C равны m ($r = m$).

ТЕОРЕМА 3. Справедливо равенство

$$(11) \quad D_{\min} = \max_{D \geq 0, T \in \mathcal{T}, R \in \mathcal{R}} \{ \text{Sp } CDC^T \mid D \leq T, D \leq (A^T R^{-1} A)^{-1} \}.$$

Пусть D_* , T_* , R_* – решение задачи (11), $\hat{l}_1 = C(A^T R_*^{-1} A)^{-1} A^T R_*^{-1} \gamma$ – МНК-оценка вектора $l = C\theta$, $\hat{l}_0 = C\theta_0$ – априорная оценка и $D_1 := C(A^T R_*^{-1} A)^{-1} C^T$, $D_0 := CT_*C^T$ – ковариационные матрицы оценок $\hat{l}_1$ и $\hat{l}_0$. Тогда минимаксно-байесовской будет линейная оценка $\hat{l}_* = P_*\hat{l}_1 + (I_m - P_*)\hat{l}_0$, в которой P_* – проектор ($P_*^2 = P_*$), вид которого указан ниже. При этом

$$(12) \quad CD_*C^T = P_*D_1 + (I_m - P_*)D_0$$

и наименее благоприятно нормальное распределение вектора $\{\theta, \rho\}$ в случае $\text{cov}(\theta, \theta) = T_*$, $\text{cov}(\rho, \rho) = R_*$ и $\text{cov}(\rho, \theta) = -AD_*$.

ТЕОРЕМА 4. Проектор P_* имеет вид $P_* = Q^{-1}PQ$, где матрица Q удовлетворяет условиям $Q \geq I_m$, $QCD_*C^T = CD_*C^T = P_*D_1 + (I_m - P_*)D_0 \geq 0$, а P – ортогональный проектор на положительное собственное пространство матрицы $Q(D_0 - D_1)Q^T$.

При $Q = I_m$ получаем ортогональный проектор $P_* = P$, если матрица (12) неотрицательно определена. Интересно, что в этом случае апостериорная точность $E_P|\hat{l} - l|^2$ будет одной и той же для всех распределений $P(y)$ с фиксированными $\text{cov}(\theta, \theta)$, $\text{cov}(\rho, \rho)$ и произвольной $\text{cov}(\rho, \theta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Soloviov V. // Stochastics Stochastics Rep. 1993. V. 42. P. 209–223. [2] Soloviov V. // Anal. Math. 1993. V. 19. № 4. P. 297–315.