Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Б. Кожухов, О полугруппах с условиями на односторонние конгруэнции,
УМН, 1998, том 53, выпуск 6, 251–252

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm99>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 13:01:46

О ПОЛУГРУППАХ С УСЛОВИЯМИ НА ОДНОСТОРОННИЕ КОНГРУЭНЦИИ

И. Б. Кожухов

Полугруппы, удовлетворяющие условию максимальности для правых (или левых) конгруэнций, изучались в работах [1]–[5]. В [5] было доказано, что коммутативная полугруппа удовлетворяет условию максимальности в том и только том случае, если она конечно порождена. Группы с условием максимальности на правые (левые) конгруэнции – это в точности группы с условием максимальности для подгрупп. Строение этих групп может быть довольно сложным (см. примеры из гл. 9 в [6]), но все они, очевидно, являются конечно-порожденными. В [1] Хотцель поставил вопрос: *является ли всякая полугруппа S с условием максимальности для правых конгруэнций конечно порожденной?* Им был дан положительный ответ в следующих случаях: а) когда S слабо периодическая, т.е. $\forall a \in S \exists n ((S^1 a^n S^1)^2 = S^1 a^n S^1)$, б) когда в S всякий J -класс является классом некоторой конгруэнции (в частности, когда S коммутативна). Примеры не конечно порожденных полугрупп с условием максимальности неизвестны, но если они существуют, их можно найти среди счетных полугрупп:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если существует полугруппа с условием максимальности для правых конгруэнций, не имеющая конечного множества образующих, то существует счетная полугруппа с тем же свойством.*

Еще один результат о конечной порожденности дает следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если полугруппа удовлетворяет условию максимальности для правых и левых конгруэнций, то она конечно порождена.*

Известно, что в конечной полугруппе (более общо, в эпигруппе, т.е. в полугруппе, в которой некоторая степень каждого элемента принадлежит какой-нибудь подгруппе) отношения Грина D и J совпадают (см. [7]), а значит, каждый J -класс является объединением попарно несравнимых R -классов. Для полугрупп с условием максимальности имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Каждый J -класс полугруппы с условием максимальности для правых конгруэнций является объединением конечного числа попарно несравнимых R -классов.*

Следующее утверждение показывает, что в полугруппе с условием максимальности возможно выполнение неравенства $D \neq J$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть*

$$S = \langle a, s, t, u, 0 \mid au = s^2 a, atu = a, tu = ut, a^2 = as = ta = ua = ts = st = us = su = 0 \rangle.$$

Тогда для любого поля F полугрупповая алгебра FS^1 нётерова справа, а значит, S удовлетворяет условию максимальности для правых конгруэнций. В полугруппе S $J_a = R_a \cup R_{sa}$, причем R_a и R_{sa} – различные D -классы.

Одно достаточное условие конечной порожденности дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если S – полугруппа с условием максимальности для правых конгруэнций и существует конечное подмножество X такое, что подполугруппа $\langle X \rangle$ имеет непустое пересечение с каждым L -классом полугруппы S , то S конечно порождена.*

Полугруппа S называется *левой дуополугруппой*, если в ней каждый левый идеал является двусторонним, т.е. $aS \subseteq S^1 a$ для всех $a \in S$. Аналогично определяются *правые дуополугруппы*. Положительный ответ на упоминавшийся ранее вопрос Хотцеля в случае дуополугрупп дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Если S – правая или левая дуополугруппа, удовлетворяющая условию максимальности для правых конгруэнций, то S конечно порождена.

Пусть σ – отношение эквивалентности на множестве X . Индексом отношения σ называется мощность множества X/σ . (Если ρ – правая на полугруппе S , то S/ρ – правый S -полигон, но необязательно полугруппа.) Пусть $\Delta = \{(a, a) \mid a \in S\}$ – отношение равенства на полугруппе S . Для $a \in S$ положим

$$\rho(a) = \{(x, y) \in S \times S \mid a^i x = a^j y \text{ для некоторых } i, j\}.$$

Условие максимальности для правых конгруэнций полугруппы S будет обеспечено, если мы потребуем выполнения условия

(*) всякая правая конгруэнция $\rho \neq \Delta$ имеет конечный индекс.

Класс полугрупп S , удовлетворяющих условию (*), довольно узок: в [8] доказано, что всякая полугруппа с этим условием либо конечна, либо изоморфна подполугруппе аддитивной полугруппы $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Более широкий класс составляют полугруппы S , удовлетворяющие следующему условию:

(**) $\forall a \in S (\rho(a) \neq \Delta \Rightarrow |S/\rho(a)| < \infty)$.

Этому классу принадлежат: а) конечные полугруппы, б) нильполугруппы, в) полугруппы левых (правых) нулей, г) полурешетки с конечным нижним конусом (т.е. $|aS| < \infty$ для всех $a \in S$). Полугруппы с условием (**), конечно, могут не удовлетворять условию максимальности для правых конгруэнций. Однако, (**) является сильным ограничением на полугруппу, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть S – полугруппа с условием (**). Тогда:

- (1) подполугруппа и гомоморфный образ полугруппы S также удовлетворяют (**);
- (2) всякая бесконечная подгруппа полугруппы S является циклической;
- (3) $|eS| < \infty$ для любого идемпотента e , не являющегося левой единицей;
- (4) всякий (0-)простой главный фактор полугруппы S вполне (0-)прост;
- (5) если $M^0(G, I, \Lambda, P)$ – вполне 0-простой главный фактор полугруппы S , то либо $|G|, |\Lambda| < \infty$, либо $|I|, |\Lambda| < \infty$ и $G \cong \mathbb{Z}$, либо $|G| = |I| = 1$; аналогичное утверждение верно для вполне простого главного фактора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hotzel E. // Semigroup Forum. 1975–1976. V. 11. P. 337–362. [2] Hotzel E. // J. Algebra. 1979. V. 60. P. 352–370. [3] Kozhukhov I. B. // Semigroup Forum. 1980. V. 21. P. 337–350. [4] Zhang Liang, Gu Chang Kang. // World Sci. Words, Languages and Combinatorics, II (Kyoto, 1992). River Edge, NJ: World Scientific, 1994. P. 465–476. [5] Budach L. // Monatsberichte Deutschen Akad. Wiss. 1964. V. 6. P. 85–88. [6] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. [7] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1, 2. М.: Мир, 1972. [8] Кожухов И. Б. // Фундам. и прикл. матем. 1997. Т. 3. С. 869–878.