Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Тимашёв, G -многообразия сложности 1, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 213–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:56:27

G -МНОГООБРАЗИЯ СЛОЖНОСТИ 1

Д. А. ТИМАШЁВ

1. Проблема классификации алгебраических многообразий имеет эквивариантный аналог: описание многообразий, на которых действует алгебраическая группа G , с точностью до G -изоморфизма. Проблема распадается на две части: “бирациональную” (об этом см. [1]) и “регулярную” – описать все G -эквивариантные модели данного функционального поля K , на котором G действует бирациональными автоморфизмами. Примером решения этой последней задачи служит комбинаторное описание торических многообразий (здесь G – тор, K – поле функций на G). Общий подход к решению этой проблемы предложили Луна и Вюст [2]. В заметке этот подход применяется к описанию G -многообразий в данном классе бирациональной G -эквивалентности, на которых орбиты общего положения борелевской подгруппы B связной редуктивной группы G имеют коразмерность 1.

2. Итак, пусть G – связная редуктивная группа над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, B – ее борелевская подгруппа. Пусть X – алгебраическое G -многообразие с полем функций $k(X) = K$ (будем называть такое X G -моделью поля K). Сложностью действия $G : X$ называется число $c(X) = c(K) = \text{tr. deg } K^B/k$, т.е. коразмерность B -орбит общего положения на X (в силу определения сложность есть бирациональный инвариант действия) – см. [2], [3]. Многообразия сложности 0 называются *сферическими* (частный случай – торические многообразия). Имеется их комбинаторное описание (в заданном классе бирациональной G -эквивалентности), аналогичное торическому случаю, [2], [4]. В настоящей заметке мы будем рассматривать многообразия сложности 1. Для многообразий сложности ≥ 2 общее решение задачи классификации, как отмечено в [2], вряд ли возможно.

3. Зафиксируем функциональное поле K , $c(K) = 1$. Для простоты будем считать, что $K^B \cong k(\mathbb{P}^1)$. Это будет так, если поле K унирационально, в частности, если (любая) G -модель поля K содержит открытую G -орбиту. Наша задача – описать все *нормальные* G -модели поля K . Основная идея работы [2] состоит в том, что все G -модели можно рассматривать одновременно, склеив их в одну большую (ненётерову, неотделимую) схему $\mathbb{X}$. Точки $\mathbb{X}$ – это локальные кольца точек на всевозможных G -моделях K . С этой точки зрения, G -модель – не что иное, как нётерова отделимая G -инвариантная открытая подсхема $\mathbb{X}$. G -модель $X \subset \mathbb{X}$ задается набором локальных колец $\mathcal{O}_{X,Y}$ замкнутых G -инвариантных подмногообразий $Y \subseteq X$. Такие локальные кольца будем называть ростками X в окрестности Y или просто G -ростками.

4. Обозначим $\mathcal{V}$ множество G -инвариантных дискретных $\mathbb{Q}$ -значных нормирований K/k (G -нормирований), $\mathcal{D}$ – множество не G -инвариантных простых дивизоров на X (не зависит от выбора G -модели $X \subset \mathbb{X}$), $\mathcal{D}^B \subset \mathcal{D}$ – подмножество B -инвариантных (но не G -инвариантных) простых дивизоров (B -дивизоров). Пусть Γ – решетка весов B -полуинвариантных функций из K . Зафиксируем мономорфизм $e: \Gamma \rightarrow K^*$, переводящий каждый вес λ в B -полуинвариантную функцию e_λ веса λ .

G -нормирование $v \in \mathcal{V}$ однозначно определяется своим ограничением на B -полуинварианты [2], т.е. парой $(v|_{K^B}, v|_{e(\Gamma)})$ или точкой $x \in \mathbb{P}^1$ и элементом полупространства $\mathbb{Q}_+ \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q})$. Удобно считать, что $\mathcal{V}$ является подмножеством объединения $\bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{Q}_{x,+}$, полупространств $\mathcal{Q}_{x,+} \cong \mathbb{Q}_+ \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q})$, склеенных по общей граничной гиперплоскости $\mathcal{Q} = \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Q})$ (в которой лежат нормирования с $v|_{K^B} = 0$). Аналогично, имеем (вообще говоря, не инъективное) отображение $\rho: \mathcal{D}^B \rightarrow \bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{Q}_{x,+}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства РФ (грант № MQZ300), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 95-01-00783а), и программы “Соросовские аспиранты” (грант № а613-м).

5. Пусть X – нормальная G -модель. Для любого замкнутого G -инвариантного подмногообразия $Y \subseteq X$ существует открытое аффинное B -инвариантное подмножество (B -карта) $\overset{\circ}{X} \subseteq X$, пересекающее Y [4]. B -карта полностью определяется множеством B -инвариантных дивизоров в X , пересекающих $\overset{\circ}{X}$, или соответствующих им нормирований, т.е. парой $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^B$. G -росток $\mathcal{O}_{X,Y}$ полностью определяется множеством B -инвариантных дивизоров в X , содержащих Y [2], т.е. парой $(\mathcal{V}_Y, \mathcal{D}_Y^B)$, где $\mathcal{V}_Y \subseteq \mathcal{W}$, $\mathcal{D}_Y^B \subseteq \mathcal{R}$.

Сформулируем теперь результаты, описывающие “допустимые” пары множеств B -инвариантных нормирований (реально отвечающих некоторым B -картам и G -росткам).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Цветной гиперконус – это пара $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, где $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}^B$, а $\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \mathcal{C}_x$ – объединение строго выпуклых конусов $\mathcal{C}_x = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}_{x,+}$, каждый из которых порожден конечным набором элементов $\mathcal{V}$ и конечным множеством $\rho(\mathcal{R}) \cap \mathcal{Q}_{x,+}$. При этом $\rho(\mathcal{R}) \neq \emptyset$, все $\mathcal{C}_x$, кроме конечного числа, порождены $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ и $(1, 0) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathcal{Q}$, и либо

I. $\exists x \in \mathbb{P}^1$: $\mathcal{C}_x \subseteq \mathcal{Q}$, либо

II. $\sum \mathcal{P}_x \subseteq \mathcal{K} \setminus \{0\}$, где $\{1\} \times \mathcal{P}_x \subseteq \mathbb{Q}_+ \times \mathcal{Q}$ – выпуклая оболочка множества вершин многогранной области $\mathcal{C}_x \cap (\{1\} \times \mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}_{x,+}$.

Грань цветного гиперконуса – это пара $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, где $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \cap \rho^{-1}(\rho(\mathcal{R}) \cap \mathcal{C}')$, а $\mathcal{C}'$ – либо грань одного из $\mathcal{C}_x$ (причем в случае II $\mathcal{C}' \cap \sum \mathcal{P}_x = \emptyset$), внутренность которой пересекает $\mathcal{V}$, либо (в случае II) объединение граней $\mathcal{C}'_x = \mathcal{C}' \cap \mathcal{Q}_{x,+}$ конусов $\mathcal{C}_x$, причем $\mathcal{C}' \cap \sum \mathcal{P}_x \neq \emptyset$, $\mathcal{C}'_x \not\subseteq \mathcal{K}$, и внутренность $\mathcal{C}'$, т.е. $\text{int}(\mathcal{C}' \cap \mathcal{K}) \cup \bigcup_{x \in \mathbb{P}^1} \text{int } \mathcal{C}'_x$, пересекает $\mathcal{V}$.

ТЕОРЕМА 1. Пара множеств $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ задает B -карту тогда и только тогда, когда существует такой цветной гиперконус $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, что $\mathcal{W}$ – множество образующих тех ребер $\mathcal{C}_x$, которые не пересекают $\rho(\mathcal{R})$ и, в случае II, $\sum \mathcal{P}_x$.

Пара множеств $(\mathcal{V}_Y, \mathcal{D}_Y^B)$ задает G -росток, пересекающий B -карту, задаваемую гиперконусом $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$, тогда и только тогда, когда существует такая его грань $(\mathcal{C}', \mathcal{R}')$, что $\mathcal{V}_Y$ – множество образующих тех ребер $\mathcal{C}'_x$, которые не пересекают $\rho(\mathcal{R})$ и, в случае II, $\sum \mathcal{P}_x$, а $\mathcal{D}_Y^B = \mathcal{R}'$.

ТЕОРЕМА 2. Нормальная G -модель поля K задается набором всевозможных граней конечного множества цветных гиперконусов, при условии, что внутренности этих граней попарно не пересекаются внутри $\mathcal{V}$.

6. Доказательства сформулированных результатов будут опубликованы позднее. Автор благодарен своему научному руководителю Э.Б. Винбергу за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также Д.И. Панюшеву, М. Бриону, Ф. Кнопу за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фунд. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309. [2] Luna D., Vust Th. // Comment. Math. Helv. 1983. V. 58. P. 186–245. [3] Винберг Э. Б. // Функ. анализ и прил. 1986. Т. 20. № 1. С. 1–13. [4] Кноп F. The Luna–Vust theory of spherical embeddings // Proc. of the Hyderabad Conf. on Algebraic Groups. Madras: Manoj Prakashan, 1991. P. 225–249.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: timashev@sch57.mcn.msk.su

Принято редколлегией
11.03.1996