Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Дистрибутивно разложимые кольца, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 215–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm991>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:58:12

ДИСТРИБУТИВНО РАЗЛОЖИМЫЕ КОЛЬЦА

А. А. ТУГАНБАЕВ

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Модуль называется *дистрибутивным*, если дистрибутивна решетка всех его подмодулей. Слова типа “дистрибутивное кольцо” означают, что соответствующие условия выполнены справа. Через $P(A)$ обозначается первичный радикал кольца A . Основной результат –

ТЕОРЕМА. Пусть единица кольца A является суммой таких ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что все кольца $e_i A e_i$ дистрибутивны. Тогда

- (1) $P(A)$ содержит все правые или левые нильидеалы кольца A ;
- (2) если A обладает правой размерностью Крулля, то факторкольцо $A/P(A)$ является конечным прямым произведением первичных колец.

Для доказательства теоремы потребуются ряд утверждений и определений. Собственный идеал F кольца A называется *вполне первичным*, если A/F – область. Элемент a кольца A называется *строго нильпотентным* в A , если все члены любой такой последовательности $\{a_n\}$, что $a_1 = a$, $a_{n+1} \in a_n A a_n$, равны нулю, начиная с некоторого номера; $P(A)$ совпадает со множеством всех строго нильпотентных в A элементов. *Полудистрибутивным* модулем называется прямая сумма дистрибутивных модулей. Кольцо A назовем *дистрибутивно разложимым*, если его единица является суммой таких ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что все $e_i A e_i$ – дистрибутивные кольца. Модуль M_A называется *несингулярным*, если аннуляторы всех его ненулевых элементов не являются существенными правыми идеалами кольца A . Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным* кольцом.

ЛЕММА 1. Пусть e – идемпотент кольца A . Тогда

- (1) если M_A – правый A -модуль, то правилом $\varphi(N) = Ne$ задается сюръективный решеточный гомоморфизм $\varphi: \text{Lat}(M) \rightarrow \text{Lat}((Me)_{eAe})$;
- (2) если F – идеал кольца A , $h: A \rightarrow A/F$ – естественный эпиморфизм, то существует естественный кольцевой изоморфизм $h(e)h(A)h(e) \rightarrow eAe/eFe$;
- (3) если N – идеал кольца eAe , то $N = e(ANA)e$;
- (4) если модуль eA_A дистрибутивен (обладает размерностью Крулля), то кольцо eAe дистрибутивно (обладает правой размерностью Крулля);
- (5) $eP(A)e = P(eAe)$;
- (6) если F – первичный идеал кольца A , не содержащий e , то eFe – собственный первичный идеал кольца eAe ;
- (7) если A – полупервичное (первичное) кольцо, то eAe – полупервичное (первичное) кольцо;
- (8) если F, G – не сравнимые по включению первичные идеалы кольца A и идемпотент e не лежит в $F + G$, то eFe, eGe – не сравнимые по включению первичные идеалы кольца eAe и $eFe + eGe \neq eAe$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2) и (3) проверяются непосредственно. (4) следует из (1). Докажем (5). Пусть $P \equiv P(A)$. Все элементы из ePe строго нильпотентны в A , поскольку $ePe \subseteq P$. Остается доказать, что если $a \in A$ и элемент eae строго нильпотентен в eAe , то элемент ae строго нильпотентен в A . Это вытекает из того, что если $a_1 = eae$, $a_{n+1} \in a_n A a_n$, то все элементы a_n лежат в eAe . Докажем (6). Пусть F – первичный идеал. Так как $e \in A \setminus F \subseteq A \setminus eFe$, то $eFe \neq eAe$. Допустим, что eFe не является первичным идеалом в eAe . Тогда из (3) вытекает существование таких идеалов M, N кольца A , что $eMeNe \subseteq eFe \subseteq F$. Тогда идеал $(AeA)M(AeA)N(AeA)$ лежит в первичном идеале F . Поэтому либо $M \subseteq F$, либо $N \subseteq F$. Тогда либо $eMe \subseteq eFe$, либо $eNe \subseteq eFe$. (7) следует из (3), (5) и (6). Докажем (8). Так как $e \in A \setminus (F + G)$, то $eFe + eGe \neq eAe$. По (6) eFe и eGe – первичные идеалы кольца eAe . Допустим, что $eFe \subseteq eGe$. Тогда идеал $(AeA)F(AeA)$ лежит в первичном идеале G и получаем противоречие. Аналогично, невозможно включение $eFe \supseteq eGe$.

ЛЕММА 2. Пусть $1 = e_1 + \dots + e_n$ – разложение единицы кольца A в сумму ортогональных идемпотентов, $P \equiv P(A)$, N – правый идеал кольца A . Тогда

- (1) если N – правый нильideal кольца A , то $e_i N e_i$ – правый нильideal кольца $e_i A e_i$ для любого i ;
- (2) если $e_i N e_i = 0$ для всех i , то $N^n = 0$;
- (3) если для любого i правый идеал $e_i N e_i$ кольца $e_i A e_i$ лежит в $P(e_i A e_i)$, то N лежит в P ;
- (4) если $P(e_i A e_i)$ содержит все правые нильideалы (все левые нильideалы) кольца $e_i A e_i$ для любого i , то P содержит все правые нильideалы (все левые нильideалы) кольца A ;
- (5) если кольцо $e_i A e_i$ полупервично для любого i , то $P^n = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) проверяется непосредственно. (2). Так как $e_i N e_i = 0$ для всех i и N – правый или левый идеал, то $N e_i N \subseteq N$ и $e_j N e_i N e_j = 0$ для всех i, j . Тогда $N = \sum_{i \neq j} e_i N e_j$ и $N^n = (\sum_{i \neq j} e_i N e_j)^n = 0$. Докажем (3). Пусть $h: A \rightarrow A/P$ – естественный эпиморфизм. Из леммы 1(2), (8) и из условия следует, что $h(e_i)h(N)h(e_i) \subseteq h(P_i) = h(e_i)h(P)h(e_i) = 0$ для всех i . По (2), примененному к $h(A)$ и $h(N)$, $h(N)$ – нильпотентный правый идеал полупервичного кольца $h(A)$. Поэтому $h(N) \subseteq h(P)$, $N \subseteq P$. (4) следует из (3) и его левостороннего аналога. (5) следует из (2) и из леммы 1(5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть A – дистрибутивное кольцо. Тогда (1) если A – первичное кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то A – область [1]; (2) если F и G вполне первичные идеалы кольца A , то либо $F + G = A$, либо F и G сравнимы по включению [2]; (3) если A – несингулярное справа кольцо, то A – редуцированное кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть A – дистрибутивное кольцо, обладающее правой размерностью Крулля. Тогда (1) все первичные идеалы кольца A вполне первичны; (2) если F и G – первичные идеалы кольца A , то либо $F + G = A$, либо F и G сравнимы по включению. ((1) следует из замечания 1(1) и того, что полупервичное кольцо с правой размерностью Крулля – правое кольцо Голди. (2) следует из (1) и из замечания 1(2).)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. (1) следует из леммы 2(4) и того, что первичный радикал дистрибутивного кольца содержит все правые или левые нильideалы этого кольца [3]. Докажем (2). Можно считать, что A – полупервичное кольцо с правой размерностью Крулля. Тогда существуют такие минимальные первичные идеалы $F_1, \dots, F_n$, что $F_1 \cap \dots \cap F_n = 0$. Теперь достаточно доказать, что если F и G – несовпадающие минимальные первичные идеалы кольца A , то $F + G = A$. Допустим противное. Тогда $1 \in A \setminus (F + G)$. Поэтому найдем идемпотент $e_i \in A \setminus (F + G)$. По лемме 1(8) $e_i F e_i$ и $e_i G e_i$ – не сравнимые по включению первичные идеалы кольца $e_i A e_i$ и $e_i F e_i + e_i G e_i \neq e_i A e_i$. Так как по лемме 1(4) $e_i A e_i$ имеет правую размерность Крулля, то получено противоречие с замечанием 2(2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть A – полудистрибутивное кольцо. Тогда (1) A – дистрибутивно разложимое кольцо, причем $P(A)$ содержит все правые или левые нильideалы кольца A ; (2) если A обладает правой размерностью Крулля, то факторкольцо $A/P(A)$ является конечным прямым произведением первичных колец. (Следует из теоремы и леммы 1(4).)

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть единица кольца A является суммой таких ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что все $e_i A e_i$ – дистрибутивные кольца; $P = P(A)$. Тогда (1) если все кольца $e_i A e_i$ несингулярны, то $P^n = 0$; (2) если A – полупервичное PI-кольцо, то $P^n = 0$. ((1) следует из леммы 2(5) и замечания 1(3). Докажем (2). Зафиксируем i . По лемме 1(7) $e_i A e_i$ – полупервичное кольцо, являющееся, очевидно, PI-кольцом. Тогда кольцо $e_i A e_i$ несингулярно [4, следствие 6.1.31]. Теперь применяем (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Туганбаев А. А. // Матем. сб. 1981. Т. 115. № 4. С. 544–559. [2] Stephenson W. // Proc. London Math. Soc. 1974. V. 28. № 2. P. 291–310. [3] Mazurek R., Puczyłowski E. // Comm. Algebra. 1990. V. 18. № 2. P. 463–471. [4] Rowen L. H. Ring theory. Student edition. Boston: Academic Press, 1991.