Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, О дискретных операторах высших порядков, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 3, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 15:31:21

О ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В. А. Юрко

При фиксированных $p, q \geq 1$ рассмотрим уравнение

$$(1) \quad (Ly)_\nu \equiv \sum_{j=-q}^p a_{\nu,j} y_{\nu+j} = \lambda y_\nu, \quad \nu \geq q, \quad a_{\nu,-q} = 1, \quad a_{\nu,p} \neq 0,$$

где $y = [y_\nu]_{\nu \geq 0}$, $a_{\nu,j}$ – комплексные числа. В статье строится матрица Вейля для (1), исследуются ее свойства и рассматривается обратная задача восстановления несамосопряженного оператора L по матрице Вейля. Получен алгоритм решения обратной задачи, необходимые и достаточные условия ее разрешимости, приведена теорема единственности. Аналогичные результаты справедливы для (1) в абстрактном пространстве. Отметим, что обратная задача для L имеет приложения в теории интегрирования нелинейных эволюционных уравнений (см., например, [1], [2]). Случай $p = q = 1$ исследовался в [3]–[6] и других работах. Для дифференциальных операторов высших порядков обратная задача по матрице Вейля изучалась в [7].

Пусть Λ – множество многочленов вида

$$F(\lambda) = \sum_{k=-j_1}^{j_2} F_k \lambda^k$$

($j_1, j_2 \geq 0$ – свои для каждого многочлена). Обозначим $\mathcal{F}$ множество линейных функционалов на Λ . Элементы $\mathcal{F}$ будем называть обобщенными функциями (ОФ). Если $P \in \mathcal{F}$, то числа $P_{k+1} = (\lambda^k, P)$ называются моментами P . Здесь $(\cdot, P)$ обозначает действие P . Ясно, что ОФ $P \in \mathcal{F}$ своими моментами определяется однозначно по формуле $(F(\lambda), P) = \sum_k F_k P_{k+1}$, $F(\lambda) \in \Lambda$. ОФ $P \in \mathcal{F}$ удобно записывать в виде формального ряда

$$(2) \quad P(\lambda) = \sum_k P_k / \lambda^k.$$

ОФ $P \in \mathcal{F}$ можно умножать на элементы Λ по формуле $(F(\lambda), G(\lambda)P) = (F(\lambda)G(\lambda), P)$, $F(\lambda), G(\lambda) \in \Lambda$. Это соответствует формальному умножению ряда (2) на $G(\lambda)$. Через $\mathcal{F}^+$ обозначим множество ОФ $P \in \mathcal{F}$, для которых $P_k = 0$ при $k < 0$, а через $\mathcal{F}_0^+$ – множество ОФ $P \in \mathcal{F}^+$, для которых $P_0 = 0$.

Пусть $\Phi_\nu = [\Phi_\nu^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^T$, $\nu \geq 0$, – решение уравнения (1) при условиях

$$\Phi_\nu^i(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \Phi_{k\nu}^i \in \mathcal{F}^+, \quad \Phi_\nu^i(\lambda) = \delta_{i,\nu+1} \quad (\nu = \overline{0, q-1}).$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, а T – знак транспонирования (т.е. $[a_i]$ – столбец, $[a_i]^T$ – строка). Введем матрицу $\mathfrak{M}(\lambda) = [\mathfrak{M}_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1,p}; i=\overline{1,q}}$ по формуле $\mathfrak{M}_j^i(\lambda) = \Phi_{j+q-1}^i(\lambda)$. Матрицу $\mathfrak{M}(\lambda)$ будем называть матрицей Вейля оператора L .

Обратная задача ставится следующим образом: по заданной матрице Вейля $\mathfrak{M}(\lambda)$ построить оператор L .

Справедлива следующая теорема единственности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{M}(\lambda), \mathfrak{M}^0(\lambda)$ – матрицы Вейля для операторов L и L^0 , соответственно. Тогда, если $\mathfrak{M}(\lambda) = \mathfrak{M}^0(\lambda)$, то $L = L^0$.

Обозначим $R_k(\lambda) = [R_k^j(\lambda)]_{j=\overline{1,p}}^T$, $R_{pk+i-1}^j(\lambda) = \delta_{ij} \lambda^k$, $i = \overline{1,p}$; $R_k^*(\lambda) = [R_k^{*,j}(\lambda)]_{j=\overline{1,q}}$, $R_{kq+i-1}^{*,j}(\lambda) = \delta_{ij} \cdot \lambda^k$, $i = \overline{1,q}$. Пусть $P_k(\lambda) = [P_k^j(\lambda)]_{j=\overline{1,p}}^T$, $Q_k(\lambda) = [Q_k^i(\lambda)]_{i=\overline{1,q}}^T$, $k \geq 0$,

– решения уравнения (1) при начальных условиях $P_k(\lambda) = 0$ ($k = \overline{0, q-1}$), $P_{k+q}(\lambda) = R_k(\lambda)$ ($k = \overline{0, p-1}$); $Q_k^i(\lambda) = \delta_{k+1, i}$ ($k = \overline{0, q-1}$); $Q_{k+q}(\lambda) = 0$ ($k = \overline{0, p-1}$). Тогда

$$(3) \quad P_{k+q}(\lambda) = \sum_{i=0}^k c_{ik} R_i(\lambda), \quad k \geq 0, \quad c_{kk} \neq 0.$$

Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при $R_i(\lambda)$, находим

$$\sum_{j=-q}^p a_{kj} c_{i, k+j-q} = c_{i-p, k-q}, \quad i = \overline{0, k+p-q}.$$

Отсюда получаем рекуррентные формулы для определения коэффициентов $a_{k\nu}$ через c_{ik} :

$$(4) \quad a_{k\nu} = (c_{k+\nu-q, k+\nu-q})^{-1} \left(c_{k+\nu-q, k-q} - \sum_{j=\nu+1}^p a_{kj} c_{k+\nu-q, k+j-q} \right), \quad \nu = \overline{p, -q+1}.$$

Здесь $k \geq q$ при $\nu \geq 0$; $k \geq q - \nu$ при $\nu < 0$ и доопределено $c_{ik} = 0$ при $i < 0$. В частности, $a_{kp} = (c_{k+p-q, k+p-q})^{-1} \cdot c_{k-q, k-q}$.

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие соотношения:* $\Phi_k(\lambda) = Q_k(\lambda) + P_k(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)$, $k \geq 0$,

$$(5) \quad (1, P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_\nu^*(\lambda)) = a_{q+k, \nu-q-k}, \quad 0 \leq k < \nu \leq q-1,$$

$$(6) \quad (1, P_{k+q}(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_\nu^*(\lambda)) = \delta_{\nu k}, \quad 0 \leq \nu \leq k.$$

Обозначим $\mu_{i\nu} = (1, R_i(\lambda)\mathfrak{M}(\lambda)R_\nu^*(\lambda))$, $i, \nu \geq 0$; $\Delta_k = \det[\mu_{i\nu}]_{i, \nu = \overline{0, k-1}}$, $k \geq 0$. Так как $P_{k+q}(\lambda) = R_k(\lambda)$ при $k = \overline{0, p-1}$, то $\mu_{i\nu} = \delta_{i\nu}$ при $0 \leq \nu \leq i \leq p-1$. Подставляя (3) в (6), получим

$$(7) \quad \sum_{i=0}^k c_{ik} \mu_{i\nu} = \delta_{\nu k}, \quad 0 \leq \nu \leq k.$$

При фиксированном $k \geq 0$ (7) – линейная алгебраическая система с определителем Δ_k .

ЛЕММА 2. *При всех $k \geq 0$ $\Delta_k \neq 0$.*

Решая системы (7), находим

$$(8) \quad c_{ik} = (-1)^{k-i} \cdot \Delta_k^{-1} \cdot \det[\mu_{j\nu}]_{j=\overline{0, k-1}; \nu=\overline{0, k-1}}, \quad c_{kk} = \Delta_{k-1} \cdot \Delta_k^{-1}.$$

Пусть M – множество матриц $\mathfrak{M}(\lambda) = [\mathfrak{M}_j^i(\lambda)]_{j=\overline{1, p}, i=\overline{1, q}}$, $\mathfrak{M}_j^i(\lambda) \in \mathcal{F}_0^+$, таких, что $\mu_{i\nu} = \delta_{i\nu}$ при $0 \leq \nu \leq i \leq p-1$. Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи и алгоритм ее решения.

ТЕОРЕМА 2. *Для того, чтобы матрица $\mathfrak{M}(\lambda) \in M$ была матрицей Вейля для некоторого оператора вида (1), необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_k \neq 0$ при всех $k \geq 0$. При этом оператор L находится по следующему алгоритму.*

АЛГОРИТМ 1. (1) Строим c_{ik} ($0 \leq i \leq k$) и $P_{k+q}(\lambda)$ при $k \geq 0$ по формулам (8) и (3) и полагаем $P_k(\lambda) = 0$ при $k = \overline{0, q-1}$. (2) Вычисляем $a_{k\nu}$ по формулам (4), (5).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для того, чтобы матрица $\mathfrak{M}(\lambda) \in M$ была матрицей Вейля для некоторого оператора L с вещественными коэффициентами $a_{\nu j}$ и $a_{\nu p} > 0$, необходимо и достаточно, чтобы числа $\mu_{i\nu}$ были вещественными и $\Delta_k > 0$ при всех $k \geq 0$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Березанский Ю. М. // ДАН СССР. 1985. Т. 281. №1. С. 16–19. [2] Богоявленский О. И. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №6. С. 1123–1141. [3] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. [4] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, 1965. [5] Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961. [6] Гусейнов Г. Ш. // Матем. заметки. 1978. Т. 23. №2. С. 237–248. [7] Юрко В. А. // Матем. сб. 1991. Т. 182. №3. С. 431–456.