Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, А. Ю. Веснин, Н. М. Ивочкина, К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова, *УМН*, 2019, том 74, выпуск 6, 171–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm9926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 14:05:15

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К столетию со дня рождения
Алексея Васильевича Погорелова

Алексей Васильевич Погорелов родился 3 марта 1919 г. в Короче (ныне Белгородская область) в крестьянской семье. В связи с коллективизацией родители А. В. Погорелова вынуждены были в 1931 г. бежать из деревни в Харьков, где отец устроился работать на строительстве Харьковского тракторного завода. В 1935 г. А. В. Погорелов стал победителем математической олимпиады, которую проводил Харьковский университет. Окончив среднюю школу, в том же 1937 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Харьковского государственного университета, был лучшим студентом отделения.

В 1941 г. был направлен учиться на одиннадцатимесячные курсы в Военно-воздушную инженерную академию им. Н. Е. Жуковского. После победы под Москвой обучение продлили на полный срок. А во время учебы курсантов периодически на несколько месяцев посылали на

фронт в качестве техников по обслуживанию самолетов. За участие в Великой Отечественной войне А. В. Погорелов был награжден орденом Отечественной войны II степени. После окончания академии его направили на работу инженером-конструктором в ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского. Желание завершить университетское образование и серьезно заняться геометрией приводит А. В. Погорелова в Московский университет. По рекомендации декана мехмата И. Г. Петровского и известного геометра В. Ф. Кагана Алексей Васильевич знакомится с А. Д. Александровым – основателем теории нерегулярных выпуклых поверхностей. В этой теории имелось много новых задач. Одну из них Александр Данилович поставил А. В. Погорелову. За год она была решена, и А. В. Погорелов поступил в заочную аспирантуру механико-математического факультета МГУ к Н. В. Ефимову по тематике А. Д. Александрова. После защиты кандидатской диссертации в 1947 г. был демобилизован и переехал в Харьков, где работал в НИИ математики и механики при ХГУ и на кафедре геометрии. В 1948 г. защитил докторскую диссертацию, в 1951 г. был избран членом-корреспондентом АН Украины, а в 1960 г. – членом-корреспондентом АН СССР по отделению физико-математических наук. С 1961 г. А. В. Погорелов – академик АН Украины, с 1976 г. – академик АН СССР по отделению математики. С 1950 по 1960 г. он был заведующим кафедрой

геометрии ХГУ. С 1960 по 2000 г. заведовал отделом геометрии Физико-технического института низких температур АН УССР. С 2000 г. жил в Москве, работал в МИАН им. В. А. Стеклова.

За выдающиеся достижения в науке А. В. Погорелов был награжден

- Сталинской премией второй степени (1950 г.) – за исследования по теории выпуклых поверхностей, результаты которых изложены в статье “[Однозначная определенность выпуклых поверхностей](#)” и в серии статей, опубликованных в журнале “Доклады Академии наук СССР” в 1948–1949 гг.;
- Ленинской премией (1962 г.) – за исследование по геометрии “в целом”;
- премией им. Н. И. Лобачевского (1959 г.) – за работу “[Некоторые вопросы геометрии в целом в римановом пространстве](#)”;
- премией им. Н. М. Крылова АН УССР (1973 г.);
- Государственной премией УССР (1974 г.) – за решение многомерной проблемы Минковского;
- премией НАН Украины им. Н. Н. Боголюбова (1998 г.) – за работы по механике;
- Государственной премией Украины (2005 г.).

А. В. Погорелов написал три блестящих университетских учебника: по аналитической геометрии, по дифференциальной геометрии и по основаниям геометрии. Он также написал учебник по геометрии для школьников, по которому и сейчас учатся в России и который переиздается в России каждый год.

1. Научные интересы

К началу XX в. были развиты методы для решения локальных задач, относящихся к регулярным поверхностям. К 1930-м годам были развиты методы для решения задач геометрии в целом. Эти методы относились в основном к теории уравнений с частными производными. Математики оказывались бессильными, когда поверхности были нерегулярны (имели конические точки, ребристые точки) и когда внутренняя геометрия не задавалась регулярной положительно определенной квадратичной формой, а была просто метрическим пространством довольно общего вида. Прорыв в исследовании нерегулярных метрик и нерегулярных поверхностей совершил выдающийся геометр А. Д. Александров. Он построил теорию метрических пространств неотрицательной кривизны (как частный случай сюда входила и внутренняя геометрия общих выпуклых поверхностей, которые определяются как область на границе произвольного выпуклого тела). А. Д. Александров начал изучать связи между внутренней и внешней геометрией нерегулярных выпуклых поверхностей. Им было доказано, что любая метрика неотрицательной кривизны, заданная на двумерной сфере (в том числе и нерегулярная метрика, заданная как метрическое пространство с внутренней метрикой), изометрически погружается в трехмерное евклидово пространство в виде замкнутой выпуклой поверхности. Но были неизвестны ответы на следующие принципиальные вопросы.

1. Будет ли погружение единственным с точностью до движения?
2. Если метрика, заданная на сфере, есть регулярная метрика положительной гауссовой кривизны, то будет ли выпуклая поверхность, на которой реализуется эта метрика, регулярной?

3. Г. Минковский доказал теорему о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности, у которой гауссова кривизна задана как функция нормали, при естественном условии на эту функцию. Но была открытой проблема: если функция регулярна на сфере, то будет ли регулярной сама поверхность?

С решением этих проблем теория, созданная А. Д. Александровым, получила бы полное гражданство в математике и ее можно было бы применять и в классическом регулярном случае. И на все эти три вопроса положительный ответ был дан А. В. Погореловым. Он использовал синтетические геометрические методы, развил геометрические методы для получения априорных оценок для решений уравнений Монжа–Ампера. С одной стороны, он использовал эти уравнения для решения геометрических задач, с другой стороны, он строил, исходя из геометрических соображений, обобщенное решение уравнения Монжа–Ампера, а потом доказывал их регулярность при регулярной правой части. Фактически в этих пионерских работах А. В. Погорелова был заложен фундамент геометрического анализа. На этом пути он получил следующие фундаментальные результаты.

- 1) Пусть F_1 и F_2 – две замкнутые выпуклые изометрические поверхности в трехмерном евклидовом пространстве или сферическом пространстве. Тогда поверхности совпадают с точностью до движения в пространстве (1951 г.).
- 2) Замкнутая выпуклая поверхность в пространстве постоянной кривизны является жесткой вне плоских областей на поверхности. Это значит, что она допускает только тривиальные бесконечно малые изгибания (1959 г.).
- 3) Если метрика выпуклой поверхности регулярна класса C^k ($k \geq 2$) в пространстве постоянной кривизны c и гауссова кривизна поверхности K больше c , то поверхность регулярна класса $C^{k-1, \alpha}$ (1949 г.).

Для областей на выпуклых поверхностях утверждения 1), 2) неверны. Локальные и глобальные свойства поверхностей существенно отличаются. Доказательством утверждения 1) А. В. Погорелов завершил решение проблемы, которая оставалась открытой более столетия. Первый результат в этом направлении был получен Коши для замкнутых выпуклых многогранников в 1813 г. Напомним, что две поверхности называются изометричными, если существует отображение одной поверхности на другую, сохраняющее длины кривых.

Доказанные А. В. Погореловым теоремы легли в основу созданной им нелинейной теории тонких оболочек. В этой теории рассматриваются такие упругие состояния оболочки, которые различаются весьма значительными изменениями первоначальной формы. При таких деформациях срединная поверхность тонкой оболочки подвергается изгибанию с сохранением метрики. Это и дает возможность исследовать потери устойчивости и закритическое упругое состояние выпуклых оболочек под действием данной нагрузки используя теоремы, доказанные А. В. Погореловым, для выпуклых поверхностей. Такие оболочки являются наиболее распространенными элементами современных конструкций. Результаты 1), 2) были обобщены А. В. Погореловым для регулярных поверхностей в римановом пространстве. Кроме того, была решена проблема Вейля для риманова пространства, а именно, было доказано, что *регулярная метрика гауссовой кривизны больше константы на двумерной сфере изометрично погружается в полное односвязное трехмерное риманово пространство кривизны меньше константы в виде регулярной поверхности* (1957 г.). Изучая методы доказательства этой работы, лауреат премии Абеля М. Громов ввел псевдоголоморфные кривые, которые являются основным инструментом в симплектической геометрии.

Замкнутая выпуклая гиперповерхность однозначно задается не только метрикой, а и гауссовой кривизной, как функцией нормали. При этом гиперповерхность однозначно определяется с точностью до параллельного переноса. Это было доказано Г. Минковским. А будет ли гиперповерхность регулярной при условии, что гауссова кривизна $k(n)$ является регулярной функцией нормали? А. В. Погореловым доказано, что если положительная функция $k(n)$ принадлежит классу C^k ($k \geq 3$), то опорная

функция будет регулярной класса $C^{k+1,\nu}$, $0 < \nu < 1$ (для двумерных поверхностей это доказано в 1952 г., в многомерном случае – в 1971 г.).

Самой тяжелой частью доказательства теоремы было получение априорных оценок для производных опорной функции гиперповерхности до третьего порядка включительно. Метод Погорелова был использован С.Т. Яу для получения априорных оценок решений комплексного уравнения Монжа–Ампера. Это было главным этапом в доказательстве существования многообразий Калаби–Яу, которые играют существенную роль в теоретической физике. Уравнение Монжа–Ампера имеет вид

$$|z_{ij}| = f(x_1, \dots, x_n, z, z_1, \dots, z_n).$$

Априорные оценки в проблеме Минковского являются априорными для решения уравнения Монжа–Ампера с функцией

$$f = \frac{1}{k(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{n/2+1}}.$$

В то время не было подхода к изучению этого полностью нелинейного уравнения. А.В. Погорелов создал теорию уравнения Монжа–Ампера геометрическими методами. Сначала он, идя от многогранников, доказал существование обобщенных решений при естественных условиях на правую часть. Затем для регулярных решений нашел априорные оценки производных до третьего порядка включительно. Наконец, используя априорные оценки, доказал регулярность строго выпуклых решений, существование решений задачи Дирихле и ее регулярность. Уравнение Монжа–Ампера является существенной составляющей транспортной задачи Монжа–Канторовича, используется в конформной, аффинной, кэлеровой геометриях, в метеорологии и финансовой математике. Как-то Погорелов сказал об уравнении Монжа–Ампера: *“Это – великое уравнение, которым я имел честь заниматься”*.

Одна из самых концептуальных работ Алексея Васильевича относится к циклу работ по гладким поверхностям ограниченной внешней кривизны. А.Д. Александров создал теорию общих метрических пространств, естественно обобщающих римановы многообразия. В частности, он ввел класс двумерных многообразий ограниченной кривизны. Они исчерпывают собой класс всех метризованных двумерных многообразий, которые в окрестности каждой точки допускают равномерное приближение римановыми многообразиями, у которых абсолютные интегральные кривизны (интеграл от модуля гауссовой кривизны) ограничены в совокупности.

Естественно, возник вопрос о классе поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, несущих такую метрику с сохранением связей метрики и внешней геометрии поверхности. Частично отвечая на этот вопрос, А.В. Погорелов ввел класс C^1 -гладких поверхностей с требованием ограниченности площади сферического изображения с учетом кратности покрытия в некоторой окрестности каждой точки поверхности. Такие поверхности называются поверхностями ограниченной кривизны.

Для таких поверхностей имеется также очень тесная связь между внутренней геометрией поверхности и ее внешней формой: полная поверхность с ограниченной внешней кривизной и неотрицательной внутренней кривизной (не равной нулю) есть либо замкнутая выпуклая поверхность, либо бесконечная выпуклая поверхность; полная поверхность с нулевой внутренней кривизной и ограниченной внешней кривизной является цилиндром.

Первая работа А.В. Погорелова по поверхностям ограниченной внешней кривизны была опубликована в 1953 г. Но в 1954 г. Дж. Нэшем была опубликована работа о C^1 -изометричных погружениях, результаты которой были улучшены Н. Кейпером

в 1955 г. Из этих работ следовало, что риманова метрика, заданная на двумерном многообразии, при весьма общих предположениях допускает реализацию на гладкой класса C^1 поверхности трехмерного евклидова пространства. Более того, эта реализация осуществляется так же свободно, как топологическое погружение в пространство многообразия, на котором задана метрика. Отсюда ясно, что для поверхностей класса C^1 , даже с хорошей внутренней метрикой, сохранить связи между внутренней и внешней кривизной невозможно. Даже если поверхность класса C^1 несет регулярную метрику положительной гауссовой кривизны, то отсюда не следует локальная выпуклость поверхности. Все это подчеркивает естественность класса поверхностей ограниченной внешней кривизны, введенного А. В. Погореловым [1], [2].

2. Четвертая проблема Гильберта

А. В. Погореловым была решена IV проблема Гильберта, поставленная Д. Гильбертом в 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже.

Формулировка проблемы [3]: *Определить все, с точностью до изоморфизма, реализации систем аксиом классических геометрий (Евклида, Лобачевского и эллиптической), если в них опустить аксиомы конгруэнтности, содержащие понятия угла, и пополнить эти системы аксиомой неравенства треугольника.*

В случае плоскости, если принять и аксиому непрерывности, приходим к задаче, поставленной Дарбу: *найти на плоскости все вариационные задачи, решениями которых являются все прямые линии на плоскости* [4].

Для дезарговых пространств Г. Гамель доказал, что всякое решение проблемы Гильберта можно представить в вещественном проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ или в выпуклой области $\mathbb{R}P^n$, если определить конгруэнтность отрезков через равенство их длин в специальной метрике, для которой прямые проективного пространства являются геодезическими. Такие метрики называются *плоскими* или *проективными*. Таким образом, решение проблемы Гильберта было сведено к задаче конструктивного определения всех полных плоских метрик.

Г. Гамель решил эту задачу в предположении достаточной регулярности метрики [5]. Он доказал, что регулярная финслерова метрика $F(x, y) = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является плоской тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^2 F^2}{\partial x^j \partial y^i}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Однако, как показывают простые примеры, регулярные плоские метрики далеко не исчерпывают все плоские метрики. Из аксиом рассматриваемых геометрий следует только непрерывность метрик. Поэтому полное решение проблемы Гильберта предполагает конструктивное определение всех непрерывных плоских метрик.

Рассмотрим множество ориентированных прямых на плоскости. Прямая задается параметрами ρ, φ , где ρ – расстояние до прямой от начала координат, φ – угол, который образует прямая с осью x . Тогда множество ориентированных прямых гомеоморфно круговому цилиндру единичного радиуса с элементом площади $dS = d\rho d\varphi$. Пусть γ – спрямляемая кривая на плоскости. Тогда ее длина определяется по формуле

$$L = \frac{1}{4} \iint_{\Omega} n(\rho, \varphi) d\rho d\varphi,$$

где Ω – множество прямых, которые пересекают данную кривую, и $n(\rho, \varphi)$ – число пересечений прямой с кривой. Это показал М. Крофтон в 1870 г.

Аналогичное утверждение имеет место в проективном пространстве.

Г. Буземан ввел на множестве прямых проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ вполне аддитивную неотрицательную меру σ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\sigma(\tau P) = 0$, где τP – множество прямых, проходящих через точку P ;
- 2) $\sigma(\tau X) > 0$, где τX – множество прямых, проходящих через некоторое множество X , содержащее отрезок прямой;
- 3) $\sigma(\mathbb{R}P^n)$ конечно.

Если мы рассмотрим σ -метрику, задаваемую в произвольной выпуклой области Ω проективного пространства $\mathbb{R}P^2$, то условие 3) заменяется следующим [6]: $\sigma(\pi H) < \infty$ для любого множества H такого, что само H содержится в Ω , а замыкание H не пересекается с границей Ω .

С помощью такой меры определяется σ -метрика в $\mathbb{R}P^2$:

$$|x, y| = \sigma(\tau[x, y]), \quad (1)$$

где $\tau[x, y]$ – множество прямых, пересекающих отрезок $[x, y]$. Неравенство треугольника для этой метрики следует из теоремы Паша.

σ -метрика в $\mathbb{R}P^2$ является плоской метрикой, т.е. геодезические в этой метрике являются прямыми проективного пространства.

Но Буземан был далек от мысли, что σ -метрики исчерпывают все плоские метрики. Он писал [6]: “Свобода в выборе метрик при задании геодезических в случае неримановых метрик так велика, что можно сомневаться, существует ли в действительности убедительная характеристика всех дезарговых пространств...”.

Решением проблемы Гильберта является теорема, доказанная в 1973 г. А. В. Погореловым [7], [8].

ТЕОРЕМА 2.1. *Любая двумерная непрерывная полная плоская метрика является σ -метрикой.*

В 1976 г. Р. В. Амбарцумян [9] дал другое доказательство IV проблемы Гильберта для $n = 2$.

Для случая $n = 3$ А. В. Погорелов доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. *Любая трехмерная регулярная непрерывная полная плоская метрика является σ -метрикой.*

Однако в трехмерном случае σ -меры могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. А. В. Погорелов показал, что всякая полная непрерывная плоская метрика в трехмерном случае является пределом регулярных σ -метрик с равномерной сходимостью в любой компактной подобласти области задания этой метрики. Такие метрики он назвал обобщенными σ -метриками.

Г. Буземан в рецензии [10] на перевод книги А. В. Погорелова “Четвертая проблема Гильберта” писал: “В соответствии с духом времени Гильберт ограничивался размерностями $n = 2, 3$. А. В. Погорелов также ограничился этими размерностями. Хотя реальная разница – между $n = 2$ и $n > 2$. Метод Погорелова работает и при $n > 3$, только требует больше технических подробностей”.

Многомерный случай IV проблемы Гильберта был изучен З. И. Сабо. В 1986 г. [11] он доказал обобщенную теорему Погорелова.

ТЕОРЕМА 2.3. *Любое n -мерное дезаргово пространство класса C^{n+2} , $n > 2$, порождается конструкцией Бляшке–Буземана; σ -мера, которая порождает плоскую*

метрику, обладает следующими свойствами:

- 1) σ -мера гиперплоскостей, которые проходят через фиксированную точку, равна нулю;
- 2) σ -мера множества гиперплоскостей, которые пересекают два отрезка $[x, y]$, $[y, z]$, где x, y, z не коллинеарны, положительна.

В той же статье приведен пример плоской метрики, которая не порождается конструкцией Бляшке–Буземана. Позже Р. Александер [12] показал, что плоская метрика пространства Минковского с нормой

$$\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$$

не порождается конструкцией Бляшке–Буземана.

З. И. Сабо описал все непрерывные плоские метрики на языке обобщенных функций [11].

Тематика, связанная с IV проблемой Гильберта, продолжает развиваться. Найдено соответствие между плоскими n -мерными финслеровыми метриками и специальными симплектическими формами на грассмановом многообразии $G(n+1, 2)$ в E^{n+1} [13]. Также постановка IV проблемы Гильберта обобщена на случай симметрических пространств [14].

В этой теории остались нерешенные задачи:

- 1) не решена IV проблема Гильберта для несимметричного расстояния;
- 2) не доказано обобщение IV проблемы Гильберта для случая симметрических пространств ранга 1;
- 3) не описаны метрики на $\mathbb{R}P^n$, для которых k -плоскости минимизируют k -площадь (Г. Буземан, см. [15]).

3. Задача Дирихле для уравнения Монжа–Ампера

Поставим в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$ задачу Дирихле для уравнения Монжа–Ампера:

$$T_n[u] := \det u_{xx} = f(x) > 0, \quad u|_{\partial} = \varphi, \quad (2)$$

где u_{xx} – матрица Гессе функции u . Эта задача с давних пор привлекала внимание специалистов по дифференциальным уравнениям, в частности, как модельная в теории полностью нелинейных, т. е. нелинейных по вторым производным, эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Хорошо известно, что на множестве выпуклых в Ω функций оператор T_n является эллиптическим, и одной из основных проблем было описание условий на данные задачи (2), которые гарантировали бы ее разрешимость в классическом смысле, т. е. в $C^k(\bar{\Omega})$, $k > 2$, в конусе выпуклых функций.

К 1953 г. эта проблема была исследована специалистами с достаточной полнотой в двумерном случае [16]. Однако вплоть до 1970 г. она оставалась открытой в многомерном случае $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, что подвергало сомнению ее корректность даже в $C^k(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $k > 2$, при $n > 2$.

При доказательстве существования классических решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений обычно используют метод продолжения по параметру (метод непрерывности) или теорему Лерэ–Шаудера, применение которых требует достаточно

мощного набора априорных оценок. Для задачи (2) это априорная оценка выпуклого решения в пространстве $C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, причем, в отличие от линейной теории, было необходимо

- (i) построить априорную оценку для вторых производных решения u в $C(\bar{\Omega})$;
- (ii) построить априорную оценку $\|u_{xx}\|_{C^\alpha(\bar{\Omega})}$, $\alpha > 0$.

Методы реализации программы (i), (ii) для всех $n \geq 2$ были разработаны лишь в начале 1980-х после того, как А. В. Погорелов ввел понятие регулярного решения и создал теорию разрешимости задачи (2) в регулярном смысле [17], [18].

В 1958 г. А. Д. Александров в рамках геометрической теории многомерных выпуклых поверхностей ввел понятие обобщенного решения задачи (2) и доказал существование и единственность такого решения геометрическими методами [19]. Однако чисто геометрическими методами проблему C^k -гладкости, $k \geq 2$, обобщенных решений задачи (2) решить невозможно, и она оставалась открытой до работ А. В. Погорелова 1971 г. [20], [21] (см. также [17]).

В книге А. В. Погорелова [17] приведено вполне прозрачное определение обобщенного решения уравнения (2) (§ 5, п. 2), а также доказательство разрешимости задачи (2) в обобщенном смысле (теорема 1, § 5, п. 2).

ТЕОРЕМА 3.1. *Для любой строго выпуклой области Ω , любой положительной непрерывной функции φ , заданной в этой области, и любой непрерывной функции ψ , заданной на границе области Ω , существует и притом единственное обобщенное решение задачи (2).*

Однако основной целью было доказательство регулярности обобщенного решения для достаточно гладких данных задачи. Отметим, что А. В. Погорелов называет решение u задачи (2) регулярным, если $u \in C^k(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ с каким-либо $k \geq 2$, и, в качестве первого шага, решает проблему априорной регулярности в $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ [17; § 5, п. 3].

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $u(x)$ – выпуклое регулярное решение уравнения (2) в области Ω , удовлетворяющее краевому условию $u = 0$. Тогда для вторых производных решения внутри области Ω можно указать оценку, зависящую от максимума модуля решения и его производных первого порядка, функции f и ее производных до второго порядка и расстояния от точки, в которой дается оценка, до границы области Ω .*

Для доказательства этой теоремы А. В. Погорелов ввел вспомогательную функцию

$$w = -ue^{u_\alpha^2/2}u_{\alpha\alpha}, \quad (3)$$

где α – фиксированное направление [17; § 5, п. 3, (2)]. Поскольку решение $u(x)$ принимает на границе нулевое значение, то w достигает максимума во внутренней точке области. Двукратное дифференцирование уравнения (2) и анализ результата в точке наибольшего значения w [17; § 5, п. 3] дает требуемую оценку вторых производных решения u . Итак, априорная оценка теоремы 3.2 построена классическими методами теории эллиптических уравнений второго порядка. Отметим, что в построениях А. В. Погорелова оценка из теоремы 3.2 успешно заменяет априорную оценку (i).

Центральное место в теории А. В. Погорелова занимает следующая теорема [17; теорема 3, § 2, п. 3].

ТЕОРЕМА 3.3. *В каждой внутренней точке области Ω третьи производные выпуклого решения уравнения (2) допускают оценку, зависящую только от вторых производных решения, производных функции φ до третьего порядка и расстояния от точки до границы области Ω .*

В доказательстве этой теоремы А. В. Погорелов использует дифференциально-геометрические конструкции Е. Калаби [22] для построения вспомогательной функции, рассмотрение которой в точке максимума и дает требуемую оценку [17; § 3, п. 3].

Регулярность решений задачи (2) в $C^{k+1,\alpha}$, $k \geq 3$, $0 < \alpha < 1$, для $\varphi \in C^k(\Omega)$ есть простое следствие теоремы 3.3, поскольку открыт путь применению аппарата шаудеровских априорных оценок линейной теории эллиптических уравнений. Действительно, пусть $u \in C^3(\Omega)$ – выпуклое решение уравнения (2), и пусть $\varphi \in C^k(\Omega)$, $k \geq 3$. Продифференцируем уравнение (2) в произвольном направлении l и обозначим $v = u_l$. Имеем:

$$A^{ij}[u]v_{ij} = \varphi_l, \quad A^{ij} = \frac{\partial T_n}{\partial u_{ij}}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Из теоремы 3.1 следует, что уравнение (4) равномерно эллиплично в любой внутренней подобласти Ω , а теорема 3.2 гарантирует включение

$$A[u] = (A^{ij}(u_{xx})) \in C^{0,1}(\Omega),$$

кроме того, из теории Шаудера следует, что $v \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ с любым $0 < \alpha < 1$. Поскольку l выбрано произвольно, последнее равносильно включению $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. Но тогда $A[u] \in C^{1,\alpha}(\Omega)$, а $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$ и т. д.

Теоремы 3.2 и 3.3 являются функционально-геометрической базой доказательства регулярности обобщенного решения из теоремы 3.1, удовлетворяющего линейному граничному условию [17; теорема 4, § 5, п. 4]. В итоге, в книге [17] полностью доказана опубликованная в 1971 г. [21] первая в истории многомерного уравнения Монжа–Ампера теорема существования регулярного решения задачи Дирихле [17; теорема 7, § 5, п. 6]):

ТЕОРЕМА 3.4. *Задача Дирихле для уравнения (2) с регулярной правой частью $\varphi(x)$ в строго выпуклой области Ω всегда имеет регулярное решение, если граница области Ω и функция ψ , заданная в качестве граничных значений решения, принадлежат классу C^2 . Решение принадлежит классу $C^{k+1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, если функция φ принадлежит классу C^k , $k \geq 3$. Решение аналитическое, если функция φ – аналитическая.*

Естественным продолжением теории А. В. Погорелова стало исследование разрешимости в регулярном смысле задачи (2) для более широкого класса функций φ , и в 1977 г. в статье [23] были найдены достаточные условия существования регулярного решения задачи

$$\det u_{xx} = f(x, u, u_x) > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2. \quad (5)$$

Основой доказательства является набор априорных оценок, построенных методом Погорелова–Калаби (см. [24; гл. 17, примечания]).

В 1982 г. в заметке [25] задача (5) была квалифицирована как задача в весовых пространствах, что позволило наряду с теоремой 3.4 использовать принцип Лерэ–Шаудера для доказательства разрешимости задачи (5). Исследования такого рода продолжаются до сих пор.

Доказательство теоремы 3.2 (см. [17; § 5, п. 4]) следует классической процедуре построения априорных оценок в теории эллиптических уравнений второго порядка, и выбор функции (3) в качестве вспомогательной функции позволяет распространить результат этой теоремы на широкий класс полностью нелинейных уравнений второго порядка.

Не так обстоит дело с теоремой 3.3. Для ее доказательства использовался дифференциально-геометрический аппарат, созданный А. В. Погореловым для построения регулярного решения проблемы Минковского, и доказанная теорема явилась вызовом

специалистам в области эллиптических дифференциальных уравнений. В самом деле, в отсутствие аналитического доказательства разрешимости в регулярном смысле задачи (2), невозможно перенести этот результат на более широкий класс полностью нелинейных уравнений. Однако представлялось невероятным, что в многомерном случае, среди всех полностью нелинейных уравнений, задача Дирихле может иметь регулярные решения только для уравнения Монжа–Ампера (см. теорему 3.4).

Новые аналитические методы локального исследования гладкости вторых производных решений для широкого класса полностью нелинейных эллиптических уравнений второго порядка были найдены в начале 1980-х годов Л. К. Эвансом [26] и Н. В. Крыловым [27]. Наиболее компактная формулировка и доказательство этого замечательного результата имеются в книге [24]. Для применения в геометрических задачах приведем одну из версий этой теоремы в иных терминах.

Обозначим $\text{Sym}(n)$ пространство симметричных $(n \times n)$ -матриц, и пусть $D \subset \text{Sym}(n)$ – связная область, $F \in C^2(D)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Множество $D_F \subset D$ назовем F -центром, если D_F выпукло в $\text{Sym}(n)$, функция F вогнута в D_F и для любого $S \in D_F$ выполнены неравенства

$$0 < \lambda(S) \leq F^{ij}(S) \xi_i \xi_j \leq \Lambda(S), \quad |\xi| = 1, \quad F^{ij}(S) = \frac{\partial F(S)}{\partial s_{ij}}. \quad (6)$$

Назовем D_F максимальным F -центром, если для любого $S \notin \overline{D_F}$ не выполнено хотя бы одно из перечисленных условий.

Тривиальным примером является линейная функция $F(S; A) = (A, S)$, где A – постоянная симметричная матрица. Если $A > 0$, то $D_F = \text{Sym}(n)$ является максимальным центром. В противном случае $D_F = \emptyset$, т. е. функция $F(S; A)$ не имеет центра. Хорошо известно также, что для функции $F_n(S) = \det^{1/n} S$ максимальным F_n -центром является конус положительно определенных матриц, который мы обозначаем символом K_n .

Функции F и $(n \times n)$ -матрице $\tau(p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\det \tau \neq 0$, поставим в соответствие оператор $F[u] = F(S[u])$, $u \in C^2(\Omega)$, где

$$S[u] = u_{(xx)}, \quad u_{(xx)} = \tau^T(u_x) u_{xx} \tau(u_x), \quad u_{(ij)} = (\tau_i^k u_{kl} \tau_j^l), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть F, τ, f – гладкие класса C^2 параметры уравнения

$$F(u_{(xx)}) = f(x, u, u_x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

и функция $u \in C^4(\Omega)$ – его решение. Предположим, что для любого $x \in \Omega' \subset \Omega$ имеет место включение $u_{(xx)}(x) \in D_F$. Тогда, каково бы ни было $\beta \in (0; 1)$, справедливо неравенство

$$\|u_{xx}\|_{C^{1,\beta}(\Omega')} \leq C(\beta, \|u\|_{C^2(\Omega')}, \|F, f\|_{C^2}, \text{dist}(\Omega'; \partial\Omega)). \quad (9)$$

Обратимся к уравнению (2). Следствием теоремы 3.6 является

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \Omega$, $\varphi(x) \geq \nu > 0$, $\varphi \in C^2(\Omega)$. Предположим, что $u \in C^4(\Omega)$ – выпуклое решение уравнения (2). Тогда для любого $\beta \in (0; 1)$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{C^{3,\beta}(\Omega')} \leq c(\nu, \beta, \|u\|_{C^2(\Omega')}, \|\varphi\|_{C^2(\Omega)}, \text{dist}(\Omega'; \partial\Omega)). \quad (10)$$

Действительно, в конусе выпуклых функций уравнение (2) эквивалентно уравнению $F_n[u] = \varphi^{1/n}$, которое обслуживается теоремой 3.6 с $F = F_n$, $\tau = \text{Id}$, $f = \varphi^{1/n}(x)$, и неравенство (10) есть частный случай неравенства (9).

Формально теорема 3.3 является следствием теоремы 3.7, но опубликована она была более чем на десять лет раньше статей [26], [27]. Несомненно, что именно этот результат А. В. Погорелова инициировал исследования Крылова–Эванса, которые являются базой современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

В гёльдеровских пространствах удобно применять метод непрерывности для доказательства теорем существования классических решений. Однако этот метод требует построения априорных оценок решений в замкнутой области, и для задачи (2) необходима оценка в $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ с каким-либо $\alpha > 0$. Близкие к необходимым достаточные условия априорной ограниченности решений задачи (2) в $C^2(\bar{\Omega})$ были найдены в 1980 г. в заметке [28]. Что касается локальных оценок Крылова–Эванса, то в 1983 г. М. В. Сафонов разработал метод продолжения их на замкнутые области с границей и условием Дирихле класса не менее C^4 [29]. Все это привело к теоремам существования классических решений задачи Дирихле для широкого класса полностью нелинейных эллиптических уравнений второго порядка (см., например, [30]).

Для того чтобы сформулировать одну из современных версий теоремы существования для задачи (2), обозначим символом $\mathbf{k}_N[\Gamma]$ гауссову кривизну гиперповерхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $k \geq 2$, $0 < \alpha \leq 1$. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (i) $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$, $\mathbf{k}_{n-1}[\partial\Omega] > 0$, $\psi \in C^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$;
- (ii) $\varphi \in C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\varphi(x) > 0$, $x \in \bar{\Omega}$.

Тогда существует единственное в конусе выпуклых функций решение и задачи (2), и это решение принадлежит пространству $C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Если же $\psi = 0$, то решение и единственно в $C^2(\bar{\Omega})$.

Сравним условия теорем 3.4 и 3.8. С одной стороны, неравенство (10) успешно заменяет теорему 3.3 в доказательстве теоремы 3.4, и поэтому требование гладкости φ можно заменить на более слабое условие $\varphi \in C^{k-1,\alpha}$ с каким-либо $0 < \alpha \leq 1$.

С другой стороны, теорема 3.6 не работает, если $\partial\Omega$, $\psi \in C^2$ (см. (i)), в то время как в теореме 3.4 C^2 -гладкость границы гарантирует существование решения, регулярного в зависимости от регулярности функции $\varphi(x)$.

Итак, теоремы 3.4 и 3.8 качественно различны, но имеют непустое пересечение. Например, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.9. Предположим, что $\partial\Omega \in C^{4,\alpha}$, $\mathbf{k}_{n-1}[\partial\Omega] > 0$, $\psi \in C^{4,\alpha}(\partial\Omega)$ с каким-либо $0 < \alpha \leq 1$. Тогда для любой функции $\varphi(x) > 0$ в $\bar{\Omega}$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \geq 2$, существует единственное в конусе выпуклых функций решение и задачи (2), причем $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega) \cap C^{4,\alpha}(\bar{\Omega})$. Если же $\psi = 0$, то решение и единственно в $C^2(\bar{\Omega})$.

4. Об обобщении проблемы Минковского

Основным результатом цикла работ А. В. Погорелова первой половины 1970-х годов является регулярное решение многомерной проблемы Минковского [17; теорема 1, § 3].

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть заданная на единичной гиперсфере Ω положительная регулярная класса C^m , $m \geq 3$, функция $K(\xi)$ удовлетворяет условию

$$\int_{\Omega} \frac{\xi d\omega}{K(\xi)} = 0. \quad (11)$$

Тогда существует и притом единственная с точностью до параллельного переноса регулярная класса $C^{m+1,\alpha}$ ($\alpha > 0$) выпуклая гиперповерхность с гауссовой кривизной $K(\xi)$. Если функция $K(\xi)$ аналитическая, то гиперповерхность – также аналитическая.

Обозначим через $\varkappa_i[\Gamma](M)$, $i = 1, \dots, n$, главные кривизны гиперповерхности $\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1}$ в точке M , а через $\mathbf{n}[\Gamma](M)$ – ее нормаль, направленную в область Ω , $|\Omega| < \infty$, $\partial\Omega = \Gamma$. В теореме 4.1 утверждается, что условие (11) гарантирует существование и единственность регулярного выпуклого решения $\Gamma \in \mathbb{R}^{n+1}$ уравнения

$$\mathbf{k}_n[\Gamma] = \prod_{i=1}^n \varkappa_i = K(\mathbf{n}[\Gamma]), \quad M \in \Gamma, \quad (12)$$

если функция $K(\xi)$ достаточно регулярна на сфере $|\xi| = 1$. В теории дифференциальных уравнений второго порядка разработана методика доказательства теорем существования классических решений, основным звеном которой является построение набора априорных оценок. Однако применить ее для уравнений в форме (12) невозможно.

А. В. Погорелов нашел эквивалентную формулировку уравнения (12), которая допускает аналитическое исследование многомерной проблемы Минковского, и разработал новые методы построения априорных оценок, достаточных для применения теорем функционального анализа. Именно, задача переформулирована в терминах опорной функции выпуклой гиперповерхности, для которой уравнение (12) становится уравнением типа Монжа–Ампера. Геометрический эквивалент последнего имеет вид

$$\prod_{i=1}^n R^i[\Gamma] = \varphi(\xi), \quad R^i = \frac{1}{\varkappa_i}, \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{K(\xi)}, \quad |\xi| = 1. \quad (13)$$

Обозначим $S_m(R)$, $1 \leq m \leq n$, элементарную симметрическую функцию порядка m радиусов кривизны $R^1, \dots, R^n$ гиперповерхности Γ . В сообщении [31] А. В. Погорелов назвал $S_m(R)$ функцией кривизны порядка m гиперповерхности Γ и рассмотрел как обобщение проблемы Минковского задачу

$$S_k(R[\Gamma]) = \varphi_k(\xi), \quad \int_{\Omega} \xi \varphi_k(\xi) d\omega = 0, \quad |\xi| = 1. \quad (14)$$

В § 4 (п. 4) книги [17] доказано существование регулярного решения задачи (14) при дополнительном условии на функцию φ_k , с помощью которого в § 2 установлена априорная ограниченность постоянных Гёльдера для вторых производных опорной функции гиперповерхности; также отмечено, что при $k < n$ положительность функции кривизны не гарантирует положительность главных радиусов кривизны. С тех пор прошло более сорока пяти лет, и стало ясно, что эти препятствия несущественны. Проблему с постоянной Гёльдера решает теорема 3.6 без каких-либо дополнительных условий на φ_k . Для того чтобы разобраться со вторым замечанием, сделаем сначала небольшой алгебраический экскурс.

В конце 1950-х годов выдающийся шведский математик Л. Гординг, ровесник А. В. Погорелова, создал теорию a -гиперболических многочленов, называя так однородные многочлены $P_m(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, $0 < m \leq N$, для которых все корни многочлена $p_m(t; a) = P_m(x + at)$, $t \in \mathbb{R}^1$, вещественны. Центральным в теории Гординга является понятие конуса $C(P_m; a) \subset \mathbb{R}^N$. По определению x принадлежит $C(P_m; a)$, если все корни многочлена $p_m(t; a)$ отрицательны, т. е. $P_m(x + at) \neq 0$ для $t \geq 0$ [32; с. 960]. Одним из основных результатов теории Гординга является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.2. *Конусы $C(P_m; a)$ выпуклы, и если $b \in C(P_m; a)$, то многочлен P_m является b -гиперболическим, причем*

$$C(P_m; b) = C(P_m; a).$$

Полагая $\mathbb{R}^N = \text{Sym}(n)$, $N = n(n+1)/2$, $a = \text{Id}$, пополним число примеров к определению 3.5. Назовем m -следом матрицы S сумму всех главных миноров порядка m определителя S и обозначим m -след символом $T_m(S)$, $T_0(S) \equiv 1$. Все многочлены T_m , $m = 1, \dots, n$, являются Id -гиперболическими; пусть K_m , $m = 1, \dots, n$, – соответствующие конусы Гординга. Из теоремы 4.2 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Конус K_m есть связная компонента положительности функции T_m , содержащая единичную матрицу.*

В заметке [33] дано конструктивное определение K_m :

$$K_m = \{S \in \text{Sym}(n), T_i(S) > 0, i = 1, \dots, m\}, \quad (15)$$

из которого следует строгое включение $K_j \subset K_i$, $0 \leq i < j \leq n$. Положим

$$F_m = T_m^{1/m}(S), \quad S \in K_m.$$

Известно, что функции F_m вогнуты в K_m , $m = 1, \dots, n$, и удовлетворяют неравенству (6) (см., например, [34]). Поэтому K_m является F_m -центром. Более того, можно показать, что K_m – максимальный F_m -центр.

Большинство исследователей предпочитают формулировать вышесказанное для диагональных матриц, т.е. в терминах элементарных симметрических функций $S_m(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$. В частности, А. В. Погорелов ввел функцию кривизны порядка m для выпуклых гиперповерхностей как элементарную симметрическую функцию радиусов кривизны [17; §4]. Однако включение $K^n \subset K^m$ при $0 \leq m < n$ не гарантирует положительность всех R^i , $i = 1, \dots, n$, и для того, чтобы оправдать априорное предположение строгой выпуклости гиперповерхности, необходимо подкрепить его априорной оценкой радиусов кривизны снизу, а не сверху, как это сделано в [17]. Тем не менее для регулярных замкнутых гиперповерхностей положительность функции кривизны любого порядка все же является неформальным гарантом ее строгой выпуклости. Для того чтобы предъявить формальное обоснование этого утверждения, приведем еще одну серию примеров к определению 3.5.

В 1990 г. Н. С. Трудингер в статье [35] ввел в рассмотрение симметрические дроби

$$\sigma_{m,l}(\lambda) = \frac{\sigma_m}{\sigma_l}(\lambda), \quad 0 \leq l < m \leq n, \quad (16)$$

отметив, что для них конус K_m играет ту же роль, что и для элементарной симметрической функции $S_m(\lambda)$ (см. [35; с. 157]). В частности, если $m = n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – связная компонента положительности функции $S_{n,l}$ и имеется хотя бы один элемент $\lambda \in D$ с положительными координатами, то $D = K_n$, а также выполнено неравенство

$$\sigma_{m,l}(\lambda) < \sigma_m^{(m-l)/m}(\lambda), \quad \lambda \in K_m. \quad (17)$$

Обозначим отношение (16) с $\lambda = \varkappa[\Gamma](M)$, $\varkappa = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_n)$, символом $\mathbf{k}_{m,l}[\Gamma](M)$ и назовем эту дробь (m, l) -кривизной гиперповерхности Γ в точке M . Отметим, что геометрический инвариант $\mathbf{k}_m[\Gamma] := \mathbf{k}_{m,0}[\Gamma]$ впервые был введен в статье [30].

Из следствия 4.3 и неравенства (17) с $m = n$ вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 4.4. Пусть Ω – ограниченная связная область в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $\Gamma = \partial\Omega$ – регулярная гиперповерхность. Предположим, что найдутся числа $\mu > \nu > 0$ такие, что выполнено неравенство

$$\nu \leq \mathbf{k}_{n,l}[\Gamma](M) \leq \mu, \quad M \in \Gamma. \quad (18)$$

Тогда гиперповерхность Γ строго выпукла и ее гауссова кривизна положительна в любой точке.

Перепишем задачу (14) в эквивалентной форме:

$$\mathbf{k}_{n,n-k}[\Gamma] = K_{n,n-k}(\mathbf{n}[\Gamma]), \quad \int_{|\xi|=1} \frac{\xi d\omega}{K_{n,n-k}(\xi)} = 0, \quad (19)$$

где $K_{n,n-k}$ – известная регулярная функция. Предположим, что правая часть уравнения (14) удовлетворяет неравенствам $0 < \nu^k \leq \varphi_k(\xi) \leq \mu^k$. Тогда для всех регулярных решений задачи (19) выполнено неравенство (18) с $l = n - k$, $\nu = 1/\mu^k$, $\mu = 1/\nu^k$ и главные кривизны гиперповерхности Γ положительны вследствие леммы 4.4. В этом смысле положительность функций кривизны Погорелова $S_k(R)[\Gamma]$ гарантирует, что, каково бы ни было $1 \leq k \leq n$, справедливы неравенства

$$R^i[\Gamma] > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Однако, в отличие от пары (12), (13), при замене (19) на (14) происходит потеря информации.

Именно, для решений уравнения (14) при $k < n$ нет аналога леммы 4.4, и поэтому оценить снизу радиусы кривизны гиперповерхности Γ , используя уравнение (14), невозможно.

Обратимся к уравнению (19). Чтобы реализовать новаторскую идею А. В. Погорелова об использовании принципа максимума теории эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка для построения априорных оценок, необходимо представить оператор $\mathbf{k}_{n,n-k}[\Gamma]$ в форме, наследующей регулярность гиперповерхности Γ . Ключом к решению этой проблемы является матрица кривизны $\mathcal{K}[\Gamma]$, введенная в [36], [34], [37]. Дадим ее описание, следуя терминологии препринта [37].

Рассмотрим регулярную гиперповерхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, выберем точку $M \in \Gamma$, и пусть $X[\Gamma] = (x^1(\theta), \dots, x^n(\theta))$ – какая-либо параметризация Γ в окрестности M , $\theta \in \Theta$, Θ – связная область в $\mathbb{R}^n$. При этом предполагается, что $X \in C^k(\Theta)$, $k > 2$. Введем следующие обозначения:

$$(\cdot)_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \quad (\cdot)_{(i)} = (\cdot)_k \tau_i^k, \quad (\cdot)_{(\theta)} = ((\cdot)_{(1)}, \dots, (\cdot)_{(n)}). \quad (20)$$

Здесь $(n \times n)$ -матрицы $\tau = \tau[\Gamma]$ определены с точностью до равенства

$$g^{-1}[\Gamma] = \tau \tau^T,$$

где $g[\Gamma] = ((X_i, X_j))_{i,j=1}^n(\theta)$ – метрический тензор гиперповерхности Γ . Именно, допустима любая матрица вида

$$\tau = \tau_0 B, \quad \tau_0 = \sqrt{g^{-1}}, \quad B \in O(n).$$

Производные $(\cdot)_{(i)}$ в (20) не зависят от параметризации и поэтому названы инвариантными [34].

Обозначим $\mathbf{n}[\Gamma](M)$ нормаль к Γ в точке M . Если Γ является границей связной области, то $\mathbf{n}[\Gamma]$ всегда направлена в эту область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Матрицу

$$\mathcal{K}[\Gamma] = (X_{(\theta)(\theta)}, \mathbf{n})(M) = (X_{(\theta\theta)}, \mathbf{n})(M), \quad M \in \Gamma, \quad (21)$$

назовем матрицей кривизны гиперповерхности Γ , а функции

$$\mathbf{k}_p[\Gamma] = T_p(\mathcal{K})[\Gamma], \quad \mathbf{k}_{p,q}[\Gamma] = \frac{\mathbf{k}_p}{\mathbf{k}_q}, \quad p = 1, \dots, n, \quad q \geq 0, \quad (22)$$

назовем p - и (p, q) -кривизнами гиперповерхности Γ соответственно.

Характеристики (21), (22) являются абсолютными геометрическими инвариантами; они C^{k-2} -гладкие, если регулярная гиперповерхность Γ принадлежит классу C^k , $k > 2$. Именно, соотношение (21) определяет семейство симметричных матриц $\{B^T \mathcal{K}_0 B\}$, $B \in O(n)$, где $\mathcal{K}_0$ соответствует, например, $\tau_0 = \sqrt{g}^{-1}$. При этом собственные значения всех матриц кривизны с точностью до порядка совпадают с главными кривизнами гиперповерхности.

С другой стороны, свобода в выборе матриц τ позволяет привести матрицу кривизны в фиксированной точке $M \in \Gamma$ к диагональной и поэтому, в силу ортогональной инвариантности следов симметричных матриц, кривизны (22) заданы однозначно и зависят только от гиперповерхности Γ .

Из сказанного следует, что каждое из уравнений (12), (14), (19) эквивалентно полностью нелинейному эллиптическому дифференциальному уравнению второго порядка

$$T_{m,l}(\mathcal{K}[\Gamma]) = f(M) > 0, \quad M \in \Gamma, \quad 0 \leq l, \quad (23)$$

с соответствующим выбором индексов и $f(M) = f(\mathbf{n}[\Gamma](M))$. Особенность геометрических задач (23) состоит в том, что они могут быть исследованы в рамках современной теории эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Итак, обобщение А. В. Погорелова многомерной проблемы Минковского и теория однородных гиперболических многочленов Л. Гординга привели к новому направлению как в дифференциальной геометрии, так и в теории дифференциальных операторов в частных производных второго порядка. Примеры развития этого направления содержатся в публикациях [38], [39].

Методы А. В. Погорелова получения априорных оценок были использованы в теории оптимальной транспортной задачи и в геометрической оптике [40], [41].

5. Прямоугольные многогранники в пространстве Лобачевского

Статья А. В. Погорелова “О правильном разбиении пространства Лобачевского” [42] была опубликована в первом номере журнала “Математические заметки”. Автор начинает статью со следующего соображения, которое мы здесь приведем дословно: “Пусть P – замкнутый выпуклый многогранник с прямыми двугранными углами в пространстве Лобачевского. Отразим многогранник P зеркально в каждой из его граней. Полученные при этом многогранники отразим в гранях, не примыкающих к P , и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, мы заполним все пространство многогранниками, равными P . Построенное разбиение пространства Лобачевского на равные многогранники осуществляется системой плоскостей. Каждые две плоскости этой системы либо не пересекаются, либо пересекаются под прямым углом. $\langle \dots \rangle$ На плоскости Лобачевского можно построить правильный пятиугольник с любыми внутренними углами, меньшими $3\pi/5$. В частности, существует правильный

пятиугольник с прямыми внутренними углами. Из таких плоских пятиугольников, очевидно, составляется правильный додекаэдр в пространстве Лобачевского. Все его двугранные углы прямые, и, следовательно, такими додекаэдрами покрывается все пространство Лобачевского указанным способом" [42; с. 3].

Целью статьи являлось установление необходимых и достаточных условий, при которых в пространстве Лобачевского существует замкнутый выпуклый многогранник заданного строения с прямыми двугранными углами. При этом автор говорит, что многогранники P и P' имеют *одинаковое строение*, или *аналогичны*, если между гранями, ребрами и вершинами первого многогранника и гранями, ребрами и вершинами второго можно установить соответствие, сохраняющее отношение принадлежности. Доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.1 [42]. *Для того чтобы в пространстве Лобачевского существовал замкнутый выпуклый многогранник с прямыми двугранными углами, аналогичный данному многограннику P , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

- 1) *в каждой вершине многогранника P сводятся ровно три ребра;*
- 2) *каждая грань многогранника P имеет по крайней мере пять сторон;*
- 3) *каждый простой замкнутый контур на поверхности многогранника P , разделяющий какие-нибудь две его грани, пересекает по крайней мере пять ребер;*
- 4) *в пространстве Лобачевского существует многогранник P' , аналогичный P , с острыми двугранными углами.*

Многогранник P , аналогичный P' , с прямыми двугранными углами определяется однозначно с точностью до движения и зеркального отражения.

Условия 1) и 2) теоремы 5.1 носят комбинаторный характер и легко проверяемы по одномерному скелету многогранника (графу, состоящему из его вершин и ребер).

На рис. 1 приведена диаграмма Шлегеля многогранника, который удовлетворяет условиям 1) и 2), но не удовлетворяет условию 3). Указанная пунктиром замкнутая кривая является простым замкнутым контуром на поверхности многогранника, разделяющим две его грани (например, центральную шестиугольную грань и внешнюю шестиугольную грань), но пересекающим четыре его ребра.

Рис. 1. Диаграмма Шлегеля многогранника, не удовлетворяющего условию 3)

Отметим, что проверка условия 4) в случае многогранника сложной комбинаторной структуры представляет значительную трудность. Эта трудность была преодолена спустя несколько лет в работе Е. М. Андреева [43], который установил необходимые и достаточные условия существования в пространстве Лобачевского ограниченного остроугольного многогранника, комбинаторно аналогичного заданному многограннику. Ввиду значимости теоремы Андреева мы приведем ее формулировку, напомнив следующее определение. Пусть среди граней $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_s}$ некоторого трехмерного многогранника смежными являются каждая с последующей, а последняя с первой,

и только они, и пусть никакие три не пересекаются в одной точке. В этом случае будем говорить, что грани $\Gamma_{i_1}, \dots, \Gamma_{i_s}$ образуют s -угольный призматический элемент.

ТЕОРЕМА 5.2 [43]. Пусть P – выпуклый ограниченный многогранник в трехмерном пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$ с двугранными углами, не большими $\pi/2$. Тогда двугранные углы $\alpha_{ij}(M)$ удовлетворяют следующей (зависящей лишь от комбинаторного типа) системе неравенств:

$$0) \ 0 < \alpha_{ij} \leq \pi/2;$$

1) если Γ_{ijk} – вершина многогранника P , то

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{ki} > \pi;$$

2) если грани $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k$ образуют треугольный призматический элемент, то

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{ki} < \pi;$$

3) если грани $\Gamma_i, \Gamma_j, \Gamma_k, \Gamma_l$ образуют четырехугольный призматический элемент, то

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} + \alpha_{li} < 2\pi;$$

4) если Γ_s – грань со сторонами $\Gamma_{is}, \Gamma_{js}, \Gamma_{ks}, \Gamma_{ls}$, занумерованными последовательно, то

$$\alpha_{is} + \alpha_{ks} + \alpha_{ij} + \alpha_{il} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} < 3\pi,$$

$$\alpha_{js} + \alpha_{ls} + \alpha_{ij} + \alpha_{il} + \alpha_{jk} + \alpha_{kl} < 3\pi.$$

Отметим также, что Е. М. Андреевым была доказана следующая теорема единственности.

ТЕОРЕМА 5.3 [43]. Пусть P и P' – два выпуклых ограниченных многогранника в n -мерном пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^n$, $n \geq 3$. Предположим, что $P \sim P'$ и соответственные двугранные углы этих многогранников равны и не превосходят $\pi/2$. Тогда P и P' – равные многогранники.

С недавнего времени многогранники, удовлетворяющие комбинаторным условиям теоремы 5.1, стали называть *многогранниками Погорелова*. Эти многогранники естественным образом связаны с интересными конструкциями в трехмерной гиперболической геометрии и в торической топологии (см., например, обзоры [44], [45]).

Напомним, что, положительно отвечая на вопрос о существовании замкнутых ориентируемых трехмерных гиперболических многообразий [46], Ф. Лёбелль в 1931 г. [47] построил первый пример такого многообразия с использованием восьми экземпляров прямоугольного 14-гранника (см. рис. 2). В работе [48] А. Ю. Веснин предложил метод построения замкнутых ориентированных трехмерных гиперболических многообразий, использующий четырехцветные раскраски граней прямоугольных многогранников, и показал, что пример Лёбелля может быть построен таким методом. А именно, каждая четырехцветная раскраска граней многогранника Погорелова определяет эпиморфизм группы отражений многогранника в восьмиэлементную абелеву группу $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и приводит к построению трехмерного гиперболического многообразия. Фундаментальная группа такого многообразия является подгруппой индекса восемь без кручений в соответствующей прямоугольной группе Кокстера. В [48] данным методом было построено бесконечное семейство гиперболических многообразий, обобщающих пример Лёбелля, в [49] были найдены объемы этих многообразий, а в [50] было показано, что если одномерный остов многогранника Погорелова имеет гамильтонов цикл, то соответствующее многообразие может быть представлено

как двулистное разветвленное накрытие трехмерной сферы, и указан метод описания множества ветвления.

В работе [51] М. Дэвис и Т. Янушкевич предложили конструкцию многообразий с действием тора, соответствующих простым (в вершинах) многогранникам. Удивительным фактом оказалось то, что кохомологическая жесткость таких многообразий имеет место в точности в том случае, когда многогранник является многогранником Погорелова [44]. Это позволило В. М. Бухштаберу и Т. Е. Панову получить в [52] необходимые и достаточные условия того, что четырехцветные раскраски граней многогранников Погорелова задают изометричные трехмерные гиперболические многообразия.

Как видно из теоремы 5.1, комбинаторная структура многогранников Погорелова может быть весьма сложной. Простейшим примером многогранника Погорелова является додекаэдр. Следующим по сложности примером является 14-гранник с шестиугольными верхним и нижним основаниями. Диаграммы Шлегеля этих многогранников приведены на рис. 2.

Рис. 2. Диаграммы Шлегеля додекаэдра и 14-гранника

Класс многогранников Погорелова содержит такой интересный класс объектов, как фуллерены. Напомним, что *фуллеренами* называют химические соединения, структура которых представляет собой одномерный остов многогранника, у которого каждая вершина инцидентна трем ребрам, а каждая грань является пятиугольником или шестиугольником. Изучение молекул фуллеренов, с самого момента их открытия, тесно связано с математикой. Геометрия, топология, теория графов, теория чисел и другие разделы математики в значительной степени помогают классифицировать структуры фуллеренов и прогнозировать их уникальные физические и химические свойства. В качестве более подробной литературы по математической теории фуллеренов мы рекомендуем читателю сборник статей [53] и “Атлас фуллеренов” [54].

В силу теоремы 5.3 ограниченный прямоугольный гиперболический многогранник полностью определяется своей комбинаторикой. Оказывается, что, более того, некоторые его геометрические параметры можно оценить, зная лишь число вершин. А именно, К. Аткинсоном в [55] были получены следующие двусторонние оценки объема.

ТЕОРЕМА 5.4 [55]. Пусть P – ограниченный прямоугольный гиперболический многогранник с N вершинами. Тогда

$$(N - 2) \frac{v_8}{32} \leq \text{vol}(P) < (N - 10) \frac{5v_3}{8},$$

где v_8 – максимальный объем гиперболического октаэдра, а v_3 – максимальный объем гиперболического тетраэдра. Более того, существует последовательность ограниченных прямоугольных многогранников P_i с N_i вершинами такая, что $\text{vol}(P_i)/N_i$ стремится к $5v_3/8$ при $i \rightarrow \infty$.

Указанные в формулировке теоремы 5.4 константы v_3 и v_8 имеют следующие значения:

$$v_3 = 3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1.0149416064096535\dots, \quad (24)$$

$$v_8 = 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3.663862376708876\dots \quad (25)$$

Величина v_3 есть объем правильного идеального гиперболического тетраэдра с двугранными углами $\pi/3$, а величина v_8 есть объем правильного идеального гиперболического октаэдра с двугранными углами $\pi/2$. Здесь через $\Lambda(\theta)$ обозначена функция Лобачевского

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

В силу теоремы 5.3 представляется естественным перечисление многогранников Погорелова в порядке возрастания объемов их прямоугольных реализаций в пространстве Лобачевского. В работах [56] и [57] Т. Иное перечислил первые 825 ограниченных прямоугольных гиперболических многогранников и привел объемы этих многогранников. В частности, объем последнего в списке, 825-го, многогранника равен 13.4204... Также он привел диаграммы Шлегеля первых ста многогранников Погорелова.

Подчеркнем, что начатое Алексеем Васильевичем Погореловым в 1967 г. исследование условий существования ограниченных прямоугольных многогранников в пространстве Лобачевского [42] развилось в последние годы в активные исследования их геометрических свойств и привело к интересным конструкциям в топологии. Поистине удивительно, что спустя десятилетия выяснилось, что выделенный им класс комбинаторных многогранников интересен не только с математической точки зрения — он также содержит подкласс многогранников, играющих важную роль в структурной химии.

А. А. Борисенко, А. Ю. Веснин, Н. М. Ивочкина

Список литературы

- [1] А. В. Погорелов, *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*, Наука, М., 1969, 759 с.; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Transl. Math. Monogr., **35**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, vi+669 pp.
- [2] А. А. Борисенко, “Алексей Васильевич Погорелов — математик удивительной силы”, *Журн. матем. физ., анал., геом.*, **2:3** (2006), 231–267; англ. пер.: A. A. Borisenko, *Alexey Vasilyevich Pogorelov, the mathematician of an incredible power*, 2008, 21 pp., arXiv: 0810.2641.
- [3] D. Hilbert, “Mathematische Probleme”, *Gött. Nachr.*, **1900** (1900), 253–297.
- [4] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, v. III, Gauthier-Villars, Paris, 1894, xvi+501 pp.
- [5] G. Hamel, “Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind”, *Math. Ann.*, **57:2** (1903), 231–264.
- [6] Г. Буземан, *Геометрия геодезических*, Физматгиз, М., 1962, 504 с.; пер. с англ.: H. Busemann, *The geometry of geodesics*, Academic Press Inc., New York, NY, 1955, x+422 pp.
- [7] А. В. Погорелов, “Полное решение четвертой проблемы Гильберта”, *Докл. АН СССР*, **208:1** (1973), 48–51; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “A complete solution of Hilbert’s fourth problem”, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 46–49.

- [8] А. В. Погорелов, *Четвертая проблема Гильберта*, Наука, М., 1974, 79 с.; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *Hilbert's fourth problem*, Scripta Series in Mathematics, V. H. Winston & Sons, Washington, DC; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York–Toronto, ON–London, 1979, vi+97 pp.
- [9] R. V. Ambartzumian, “A note on pseudo-metrics on the plane”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, **37:2** (1976), 145–155.
- [10] H. Busemann, “Book review: Hilbert’s fourth problem”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)*, **4:1** (1981), 87–90.
- [11] Z. I. Szabó, “Hilbert’s fourth problem. I”, *Adv. Math.*, **59:3** (1986), 185–301.
- [12] R. Alexander, “Zonoid theory and Hilbert’s fourth problem”, *Geom. Dedicata*, **28:2** (1988), 199–211.
- [13] J. C. Álvarez Paiva, “Symplectic geometry and Hilbert’s fourth problem”, *J. Differential Geom.*, **69:2** (2005), 353–378.
- [14] J. C. Álvarez Pavia, J. Barbosa Gomes, *Periodic solutions of Hilbert’s fourth problem*, 2018, 20 pp., arXiv:1809.02783v1.
- [15] A. Papadopoulos, “Hilbert’s fourth problem”, *Handbook of Hilbert geometry*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **22**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, 391–431.
- [16] L. Nirenberg, “On nonlinear elliptic partial differential equations and Hölder continuity”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 103–156.
- [17] А. В. Погорелов, *Многомерная проблема Минковского*, Наука, М., 1975, 95 с.; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *The Minkowski multidimensional problem*, Scripta Series in Mathematics, V. H. Winston & Sons, Washington, DC; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York–Toronto, ON–London, 1978, 106 pp.
- [18] А. В. Погорелов, *Многомерное уравнение Монжа–Ампера* $\det \|z_{ij}\| = \phi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$, Наука, М., 1988, 94 с.; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “Monge–Ampère multidimensional equation $\det \|z_{ij}\| = \phi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$ ”, *Rev. Math. Math. Phys.*, **10:1** (1995), 1–103.
- [19] А. Д. Александров, “Задача Дирихле для уравнения $\det \|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z_1, \dots, z_n)$ ”, *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. матем., мех., астроном.*, **13:1** (1958), 5–24.
- [20] А. В. Погорелов, “О регулярности обобщенных решений уравнения $\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \dots, x^n) > 0$ ”, *Докл. АН СССР*, **200:3** (1971), 534–537; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “On the regularity of generalized solutions of the equation $\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \dots, x^n) > 0$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1436–1440.
- [21] А. В. Погорелов, “Задача Дирихле для многомерного аналога уравнения Монжа–Ампера”, *Докл. АН СССР*, **201:4** (1971), 790–793; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “The Dirichlet problem for the n -dimensional analogue of the Monge–Ampère equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 1727–1731.
- [22] E. Calabi, “Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens”, *Michigan Math. J.*, **5:2** (1958), 105–126.
- [23] Shiu Yuen Cheng, Shing Tung Yau, “On the regularity of the Monge–Ampère equation $\det(\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j) = F(x, u)$ ”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **30:1** (1977), 41–68.
- [24] Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, xiii+513 pp.

- [25] Н. М. Ивочкина, “Решение задачи Дирихле для уравнения Монжа–Ампера в весовых пространствах”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 14, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **115**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1982, 97–103; англ. пер.: N. M. Ivochkina, “Solution of the Dirichlet problem for the Monge–Ampère equation in weight spaces”, *J. Soviet Math.*, **28**:5 (1985), 684–688.
- [26] L. C. Evans, “Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**:3 (1982), 333–363.
- [27] Н. В. Крылов, “Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области”, *Изв. АН СССР*, **47**:1 (1983), 75–108; англ. пер.: N. V. Krylov, “Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain”, *Math. USSR-Izv.*, **22**:1 (1984), 67–97.
- [28] Н. М. Ивочкина, “Априорная оценка $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ выпуклых решений задачи Дирихле для уравнений Монжа–Ампера”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 12, Зап. науч. сем. ЛОМИ, **96**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1980, 69–79; англ. пер.: N. M. Ivochkina, “A priori estimate of $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ for convex solutions of the Dirichlet problem for the Monge–Ampère equations”, *J. Soviet Math.*, **21**:5 (1983), 689–697.
- [29] М. В. Сафонов, “Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 12, Зап. науч. сем. ЛОМИ, №96, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1980, 272–287; англ. пер.: N. M. Ivochkina, “Harnack’s inequality for elliptic equations and the Hölder property of their solutions”, *J. Soviet Math.*, **21**:5 (1983), 851–863.
- [30] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck, “The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian”, *Acta Math.*, **155** (1985), 261–301.
- [31] А. В. Погорелов, “Существование замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной функцией главных радиусов кривизны”, *Докл. АН СССР*, **197**:3 (1971), 526–528; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “Existence of a closed convex hypersurface with a prescribed function of the principal radii of curvature”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 494–497.
- [32] L. Gårding, “An inequality for hyperbolic polynomials”, *J. Math. Mech.*, **8**:6 (1959), 957–965.
- [33] Н. М. Ивочкина, “Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа–Ампера”, *Матем. сб.*, **122(164)**:2(10) (1983), 265–275; англ. пер.: N. M. Ivochkina, “A description of the stability cones generated by differential operators of Monge–Ampère type”, *Math. USSR-Sb.*, **50**:1 (1985), 259–268.
- [34] N. Ivochkina, N. Filimonenkova, “On the backgrounds of the theory of m -Hessian equations”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **12**:4 (2013), 1687–1703.
- [35] N. S. Trudinger, “The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **111**:2 (1990), 153–179.
- [36] Н. М. Ивочкина, “От конусов Гординга к p -выпуклым гиперповерхностям”, *Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям*, Часть 1 (Москва, 2011), СМФН, **45**, РУДН, М., 2012, 94–104; англ. пер.: N. M. Ivochkina, “From Gårding’s cones to p -convex hypersurfaces”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **201**:5 (2014), 634–644.

- [37] Н. М. Ивочкина, Н. В. Филимоненкова, *Геометрические модели в теории нелинейных дифференциальных уравнений*, Препринт С.-Петерб. матем. о-ва № 6, СПбГУ, СПб., 2016, 31 с., <http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2016/index.html>.
- [38] N. M. Ivochkina, N. V. Filimonenkova, “On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **16**:1-2 (2014), 11–25.
- [39] N. M. Ivochkina, N. V. Filimonenkova, “On two symmetries in the theory of m -Hessian operators”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **52**:1 (2018), 31–47.
- [40] Feida Jiang, N. S. Trudinger, “On Pogorelov estimates in optimal transportation and geometric optics”, *Bull. Math. Sci.*, **4**:3 (2014), 407–431.
- [41] J. Liu, N. S. Trudinger, “On Pogorelov estimates for Monge–Ampère type equations”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **28**:3 (2010), 1121–1135.
- [42] А. В. Погорелов, “О правильном разбиении пространства Лобачевского”, *Матем. заметки*, **1**:1 (1967), 3–8; англ. пер.: A. V. Pogorelov, “A regular partition of Lobachevskian space”, *Math. Notes*, **1**:1 (1967), 3–5.
- [43] Е. М. Андреев, “О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского”, *Матем. сб.*, **81(123)**:3 (1970), 445–478; англ. пер.: E. M. Andreev, “On convex polyhedra in Lobachevskii spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **10**:3 (1970), 413–440.
- [44] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, М. Масуда, Т. Е. Панов, С. Пак, “Когомологическая жесткость многообразий, задаваемых трехмерными многогранниками”, *УМН*, **72**:2(434) (2017), 3–66; англ. пер.: V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, M. Masuda, T. E. Panov, S. Park, “Cohomological rigidity of manifolds defined by 3-dimensional polytopes”, *Russian Math. Surveys*, **72**:2 (2017), 199–256.
- [45] А. Ю. Веснин, “Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия”, *УМН*, **72**:2(434) (2017), 147–190; англ. пер.: A. Yu. Vesnin, “Right-angled polyhedra and hyperbolic 3-manifolds”, *Russian Math. Surveys*, **72**:2 (2017), 335–374.
- [46] Ф. Клейн, *Неевклидова геометрия*, ОНТИ НКТП СССР, М., 1936, 356 с.; пер. с нем.: F. Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, 3. Aufl., Grundlehren Math. Wiss., **26**, J. Springer, Berlin, 1928, xii+326 pp.
- [47] F. Löbell, “Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford–Kleinischer Räume negativer Krümmung”, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Leipzig, Math.-Phys. Kl.*, **83** (1931), 168–174.
- [48] А. Ю. Веснин, “Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля”, *Сиб. матем. журн.*, **28**:5 (1987), 50–53; англ. пер.: A. Yu. Vesnin, “Three-dimensional hyperbolic manifolds of Löbell type”, *Siberian Math. J.*, **28**:5 (1987), 731–734.
- [49] А. Ю. Веснин, “Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лёбелля”, *Матем. заметки*, **64**:1 (1998), 17–23; англ. пер.: A. Yu. Vesnin, “Volumes of hyperbolic Löbell 3-manifolds”, *Math. Notes*, **64**:1 (1998), 15–19.
- [50] А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, “Трехмерные гиперэллиптические многообразия и гамильтоновы графы”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:4 (1999), 745–763; англ. пер.: A. Yu. Vesnin, A. D. Mednykh, “Three-dimensional hyperelliptic manifolds and Hamiltonian graphs”, *Siberian Math. J.*, **40**:4 (1999), 628–643.
- [51] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.
- [52] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “О многообразиях, задаваемых 4-раскрасками простых 3-многогранников”, *УМН*, **71**:6(432) (2016), 157–158; англ. пер.: V. M. Buchstaber, T. E. Panov, “On manifolds defined by 4-colourings of simple 3-polytopes”, *Russian Math. Surveys*, **71**:6 (2016), 1137–1139.

- [53] F. Cataldo, A. Graovac, O. Ori (eds.), *The mathematics and topology of fullerenes*, Carbon Mater.: Chem. Phys., **4**, Springer, Cham, 2011, xiv+289 pp.
- [54] P.W. Fowler, D.E. Manolopoulos, *An atlas of fullerenes*, Internat. Ser. Monogr. Chem., **30**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995, viii+392 pp.
- [55] C.K. Atkinson, “Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra”, *Algebr. Geom. Topol.*, **9**:2 (2009), 1225–1254.
- [56] T. Inoue, “Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra”, *Algebr. Geom. Topol.*, **8**:3 (2008), 1523–1565.
- [57] T. Inoue, “Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra”, *Exp. Math.*, 2019, Published online.