Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Исковских, Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори, *УМН*, 1996, том 51, выпуск 4, 3–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm994>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 10:26:33

УДК 512.6

К 60-летию Ю. И. Манина

ФАКТОРИЗАЦИЯ БИРАЦИОНАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ МОРИ

В. А. Исковских

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1 . Обсуждение проблемы, описание формализма и первоначальные результаты .	6
§ 2 . Элементарные линки и теорема о разложении	15
§ 3 . Соотношения между элементарными линками: определения и общие свойства	33
§ 4 . Соотношения в случае отображений бирационально нетривиальных над k поверхностей	42
§ 5 . Соотношения при факторизациях бирациональных отображений k -рациональных поверхностей	63
Список литературы	71

Введение

0.1. В этой статье мы передоказываем результаты о факторизации бирациональных отображений между минимальными рациональными поверхностями над совершенными полями в контексте теории Мори. В терминах образующих и соотношений в группах бирациональных автоморфизмов эти результаты были получены в ряде работ (см., например, [18], [14], [15], обзор [19] и ссылки в этих статьях), в основном, с целью решения проблемы рациональности таких поверхностей над основным полем и обобщения на трехмерный случай [7].

Проблема факторизации бирациональных отображений в классической постановке заключается в разложении кременовых преобразований, т.е. бирациональных отображений проективных пространств $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, на элементарные составляющие. При этом речь идет о существенно бирациональных отображениях, т.е. отображениях с непустыми множествами неопределенностей, и задача изучается с точностью до изоморфизма. Хотя этой проблеме было посвящено огромное количество работ, начиная с середины прошлого столетия, удовлетворительное решение было получено только в

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 93-011-1539) и Международного научного фонда (грант № M90000).

двумерном случае. Знаменитая теорема М. Нётера утверждает, что всякое бирациональное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем раскладывается в композицию квадратичных (бирациональных) и линейных отображений, или, если рассматривать вопрос с точностью до изоморфизма (т.е. линейных проективных преобразований), состоит из итераций одного “стандартного” квадратичного отображения $(x, y) \rightarrow (1/x, 1/y)$, где x, y – неоднородные (аффинные) координаты $\mathbb{P}^2$, и линейных отображений.

Техническим средством для доказательства этого результата служит классическая теория линейных систем с предписанными базисными условиями и основным инградиентом – неравенство Нётера: сумма трех максимальных кратностей базисных точек линейной системы, задающей отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, больше степени этой линейной системы (т.е. степени ее общей кривой). Эта теория легко обобщается на случай поверхностей, определенных над любыми совершенными полями (см., например, [18, гл. V]), и уже в классических работах использовалась для доказательства аналога теоремы Нётера для бирациональных отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см. [25]) и для доказательства нерациональности над основным (алгебраически незамкнутым) полем некоторых классов рациональных поверхностей (см., например, [31], [18]). Конечно, при этом проблема факторизации рассматривается более широко, т.е. для любых бирациональных отображений между рациональными многообразиями и близкими к ним.

0.2. Прямое обобщение теории в высшие размерности даже над алгебраически замкнутыми полями в классических исследованиях не привело к существенным законченным результатам (см., например, [22]–[24], [31]), хотя на этом пути удалось доказать некоторые теоремы о нерациональности (см. [13], [7], [20]), и здесь тоже основным инградиентом в доказательстве является неравенство Нётера–Фано, обобщающее неравенство Нётера.

Идея привлечения теории Мори экстремальных стягиваний к изучению проблемы факторизации бирациональных отображений была высказана впервые В. Саркисовым [27] и развита затем М. Ридом [30] и А. Корти [21]. Такой подход к проблеме М. Рид назвал программой Саркисова. Объектами изучения являются бирациональные отображения $X \dashrightarrow X'$ между $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенными пространствами $\varphi: X \rightarrow S$ и $\varphi': X' \rightarrow S'$ (не сохраняющими, вообще говоря, структуру расслоения), где X, X' – проективные многообразия с не более чем $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями и φ, φ' – экстремальные стягивания Мори расслоенного типа.

В терминах теории минимальных моделей Мори определяются элементарные бирациональные отображения, так называемые элементарные линки. Используя основные теоремы теории минимальных моделей в размерности ≤ 3 , А. Корти [21] доказывает анонсированную В. Саркисовым [27] теорему, что для 3-мерных $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенных пространств всякое бирациональное отображение раскладывается в композицию конечного числа элементарных линков.

0.3. В случае рациональных поверхностей над совершенным полем $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенные пространства $\varphi: X \rightarrow S$ – это в точности относительно минимальные модели из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$, определяемых в §1, где $S = \text{Spec } k$ – точка для поверхностей из семейства $\{\mathbb{D}\}$ и S – гладкая проективная рациональная кривая над k (т.е. либо $\mathbb{P}^1$, либо плоская коника $C \subset \mathbb{P}^2$, не имеющая k -точек) для поверхностей из семейств

ва $\{\mathbb{C}\}$. Как уже было сказано, бирациональные k -отображения между ними описаны. Здесь мы передокажем все эти результаты с единой новой точки зрения теории Мори. Хотя новый формализм и не прибавляет результатов, он дает идейно прозрачное понимание процесса факторизации, полезное для обобщения в высшие размерности. Мы будем существенно использовать также и старый формализм, особенно при конструкциях элементарных линков и описаний соотношений между ними. В комментариях даны сравнения двух языков.

0.4. В § 1 мы напоминаем основные определения и некоторые результаты из теории рациональных поверхностей над произвольным совершенным полем k , в частности, теорему об описании минимальных моделей. Приводим краткое описание классической теории линейных систем с предписанными базисными условиями, напоминаем доказательство неравенства Нётера в контексте этой теории, выписываем основные численные бирациональные инварианты: индекс самопересечения и арифметический род. В качестве первых следствий теории доказываем теорему о бирациональной жесткости некоторых классов рациональных поверхностей над основным совершенным полем.

В § 2 обсуждаются проблемы факторизации бирациональных отображений между минимальными рациональными поверхностями из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$ в терминах теории Мори. Передоказывается неравенство Нётера в новых терминах, определяются элементарные бирациональные отображения–линки и доказывается теорема (теорема 2.5) о разложении бирациональных отображений между рациональными поверхностями из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$ в композиции элементарных линков. Далее приводится классификация элементарных линков (образующих) для всех классов минимальных рациональных поверхностей (теорема 2.6).

Соотношения между элементарными линками изучаются в §§ 3–5.

В § 3 доказывается лемма о том, что всякое соотношение между элементарными линками раскладывается в произведение специальных. Затем в качестве иллюстрации дальнейших общих результатов о соотношениях между элементарными линками для бирациональных отображений между рациональными поверхностями из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$ рассматривается частный (с классической точки зрения, наиболее интересный) случай бирациональных (кремоновых) отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем $k = \bar{k}$ (теорема 3.5).

В § 4 описываются соотношения для разложений бирациональных отображений на элементарные линки для всех классов бирационально нетривиальных над k (т.е. бирационально не эквивалентных над k плоскостей $\mathbb{P}^2$) классов рациональных поверхностей.

Пятый параграф посвящен изучению соотношений для разложения кремоновых отображений $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ над произвольным совершенным полем. Ранее эти результаты в несколько ином контексте получены в [15].

0.5. Эта статья написана на основе курса лекций по бирациональным автоморфизмам рациональных поверхностей над произвольным совершенным полем, которые автор читал в Пизанском университете на семинаре Ф. Катанезе в сентябре–ноябре 1993 года. Я искренне благодарен участникам этого семинара и особенно Фабрицио Катанезе за гостеприимство, полезные критические замечания и исключительное терпение.

§ 1. Обсуждение проблемы, описание формализма и первоначальные результаты

1.1. Напомним, что гладкая проективная поверхность X над полем k называется *минимальной над k* (в классическом смысле), если любой бирациональный морфизм $f: X \rightarrow Y$ на гладкую проективную поверхность Y над k является изоморфизмом. С точностью до изоморфизма минимальные рациональные поверхности над совершенным полем k исчерпываются следующими двумя семействами (см. [6], а также [26]):

$\{\mathbb{D}\}$ поверхности Дель Пешо X с $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$; это семейство поверхностей с группой Пикара, порожденной антиканоническим классом $-K_X$ степени $\deg X := (-K_X)^2 = 1, 2, \dots, 6, 8$, и 9, а также $X = \mathbb{P}^2$, $\text{Pic } \mathbb{P}^2 = \frac{1}{3}\mathbb{Z}(-K_{\mathbb{P}^2})$, и $X = Q \subset \mathbb{P}^3$ – неособой квадрикой, $\text{Pic } Q = \frac{1}{2}\mathbb{Z}(-K_Q)$;

$\{\mathbb{C}\}$ расслоения на коники $\pi: X \rightarrow C$ над гладкой рациональной кривой C над k с $\text{Pic } X = \pi^* \text{Pic } C + \mathbb{Z}$; $K_X^2 = 8 - \sum \deg t_i$, $\{t_i\} \subset C$ – множество всех замкнутых точек вырождения морфизма π (т.е. $\sum \deg t_i$ – число геометрических вырожденных слоев морфизма π).

Отметим, что если для поверхности X из семейства $\{\mathbb{C}\}$ морфизм π имеет сечение, то $X \rightarrow C$ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением над C ; если π имеет хотя бы один вырожденный слой X_t , $t \in C$, т.е. неприводимый над полем вычетов $k(t)$, но распадающийся на две пересекающиеся (-1) -кривые над подходящим квадратичным расширением, то π не имеет сечений, и в таком случае $\text{Pic } X = \pi^* \text{Pic } C + \mathbb{Z}(-K_X)$. Если морфизм $\pi: X \rightarrow C$ гладкий (т.е. $\overline{X} = X \otimes \overline{k} \rightarrow C \otimes \overline{k} \cong \mathbb{P}^1$ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k , т.е. $\overline{X}$ – геометрически линейчатая поверхность над $\mathbb{P}_{\overline{k}}^1$), то либо $\pi: X \rightarrow C$ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением уже над k , либо $X \cong C \times C'$, где C' – кривая рода нуль (возможно, не имеющая k -точек). Действительно, если $X \not\cong C \times C'$, то $\overline{X} \cong \mathbb{F}_n$, $n \geq 1$, и исключительное сечение ввиду его единственности определено над k , стало быть, $\pi: X \rightarrow C$ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением.

В случае, когда $k = \overline{k}$ алгебраически замкнуто, семейство $\{\mathbb{D}\}$ состоит из одной единственной поверхности $\mathbb{P}^2$, и семейство $\{\mathbb{C}\}$ – из геометрически линейчатых рациональных поверхностей $\mathbb{F}_n$, $n = 0, 1, \dots$. Поскольку все эти поверхности бирационально эквивалентны $\mathbb{P}^2$, то вопрос о бирациональных отображениях между ними сводится к изучению кремоновых преобразований $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ (см. § 5).

Теперь, следуя [18], напомним основные положения классической теории линейных систем с предписанными базисными условиями на гладких проективных поверхностях над совершенными полями.

1.2. Пусть X, X' – гладкие проективные поверхности над совершенным полем k и

$\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение. Пусть

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} & X_N & \\ \sigma_{N,N-1} \downarrow & & \searrow \psi \\ & X_{N-1} & \\ \sigma_{N,N-2} \downarrow & & \\ & \vdots & \\ \sigma_{2,1} \downarrow & & \\ & X_1 & \\ \sigma_{1,0} \downarrow & & \\ & X_0 \cong X & \xrightarrow{\chi} X' \end{array}$$

есть диаграмма разрешения неопределенностей отображения χ , где $\sigma_{i+1,i}: X_{i+1} \rightarrow X_i$ – раздутие замкнутой точки $x_i \in X_i$ (точки неопределенности отображения χ), ψ – бирациональный морфизм, $E_{i+1} = \sigma_{i+1,i}^{-1}(x_i) \subset X_{i+1}$ – исключительный дивизор морфизма $\sigma_{i+1,i}$, $\sigma_{i,j} := \sigma_{j+1,j} \circ \dots \circ \sigma_{i,i-1}: X_i \rightarrow X_j$, $i > j$, $\sigma := \sigma_{1,0} \circ \dots \circ \sigma_{N,N-1}: X_N \rightarrow X_0 = X$, $i, j = 0, \dots, N$. Пусть $\mathcal{H}'$ – подвижная линейная система дивизоров на X' (т.е. $\dim \mathcal{H}' \geq 1$), не имеющая неподвижных компонент, и $\mathcal{H} = \chi^{-1}(\mathcal{H}')$ – собственный прообраз ее на X . Если $H' \in \mathcal{H}'$ – общий дивизор и H – собственный прообраз его на X , то $H \in \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ не имеет неподвижных компонент и $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}'$, линейные системы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ не обязаны быть полными, и $\mathcal{H}'$ является собственным образом $\mathcal{H}$.

Изучение бирациональных отображений в классической теории основано на бирациональных свойствах присоединенных линейных систем $\mathcal{H} + t\mathcal{K}_X$, ($\mathcal{K}_X$ – каноническая линейная система), в частности, на свойстве обрыва присоединения $\mathcal{H} + t\mathcal{K}_X = \emptyset$ при $t \gg 0$. Из бирациональной инвариантности условия обрыва присоединения выводится неравенство Нётера в следующей общей форме. В предыдущих условиях будем обозначать через $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_{X'}$, $\mathcal{H}_{X_i}$ собственные образы линейной системы $\mathcal{H}$ на соответствующих многообразиях.

В группе $\text{Pic } X_N$ имеем:

$$(1.2.2) \quad \begin{aligned} H_{X_N} &= \sigma^* H_X - \sum_{i=0}^{N-1} r(x_i) \sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1}), \\ K_{X_N} &= \sigma^* K_X + \sum \sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1}), \end{aligned}$$

где $r(x_i)$ – кратность базисных точек x_i в линейной системе $\mathcal{H}_X$.

1.3. ЛЕММА (неравенство Нётера: общая форма). (i) В обозначениях п. 1.2 пусть $\mathcal{H}_{X'} + t\mathcal{K}_{X'} = \emptyset$ для некоторого целого $t \geq 1$, тогда либо существует “максимальная особенность”, т.е. базисная точка x_i кратности $r(x_i) > t$, либо присоединенная линейная система $\mathcal{H}_X + t\mathcal{K}_X$ пуста на X .

(ii) (Численный вариант). В предыдущих условиях пусть линейная система $\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'}$ существенно численно не эффективна, т.е. существует подвижное семейство кривых $\mathcal{C}'$ на X такое, что $(\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'})\mathcal{C}' < 0$, тогда либо существует максимальная особенность, либо линейная система $\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X$ численно не эффективна, т.е. существует кривая $C \subset X$ такая, что $(\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X)C < 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В диаграмме (1.2.1), используя (1.2.2), имеем:

$$(1.2.3) \quad H_{X_N} + mK_{X_N} = \sigma^*(H_X + mK_X) + \sum (m - r(x_i))\sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1}).$$

Рассматривая это равенство в группе $\text{Pic } X_N$, применим к обеим частям ψ_* :

$$\psi_*(H_{X_N} + mK_{X_N}) = \psi_*\sigma^*(H_X + mK_X) + \psi_*\left(\sum (m - r(x_i))\sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1})\right).$$

||

$$H_{X'} + mK_{X'}$$

Так как по предположению $\mathcal{H}_{X'} + m\mathcal{K}_{X'} = \emptyset$, то правая часть последнего равенства не может быть эффективным дивизором, т.е. либо $r(x_i) > m$ по крайней мере для одного i , либо $\mathcal{H}_X + m\mathcal{K}_X = \emptyset$. Это доказывает (i).

Для доказательства (ii) заметим, что $(H_{X_N} + mK_{X_N})\psi^*\mathcal{C}' = (H_{X'} + mK_{X'})\mathcal{C}' < 0$, так как $\psi^*(H_{X'} + mK_{X'}) = (H_{X_N} + mK_{X_N}) + F$, где дивизор F составлен из исключительных дивизоров для морфизма ψ , и, значит, $F \cdot \psi^*\mathcal{C}' = 0$. Теперь, если $r(x_i) \leq m \ \forall i = 0, \dots, N-1$, то, умножая обе части равенства (1.2.3) на $\psi^*\mathcal{C}'$, получаем $\sigma^*(H_X + mK_X)\psi^*\mathcal{C}' < 0$. Отсюда $(H_X + mK_X)\sigma_*\psi^*\mathcal{C}' < 0$. Так как общая кривая из семейства $\sigma_*\psi^*\mathcal{C}'$ может быть приводима, то по крайней мере для одной из ее неприводимых компонент C имеем $(H_X + mK_X)C < 0$, что и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. В утверждении (ii) число m можно считать любым рациональным или даже вещественным положительным и равенство в (1.2.3) понимать как численную эквивалентность. Пусть, например, $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — кремоново преобразование, $\mathcal{H}' = |l|$ — полная линейная система прямых, $\mathcal{H} = |nl - \sum_{i=0}^{N-1} r(x_i)x_i|$, и $m = n/3$. Если $n > 1$, т.е. χ — не изоморфизм, то условия леммы 1.3 (ii) выполнены, линейная система $\mathcal{H} + m\mathcal{K}_{\mathbb{P}^2} \equiv 0$ численно эффективна и, стало быть, существует максимальная особенность x_i с $r(x_i) > n/3$. Поскольку любое бирациональное отображение неособых поверхностей над совершенным полем раскладывается в композицию неособых раздутий и стягиваний и для любого такого раздутия или стягивания легко вычисляется поведение индексов пересечения дивизоров, в частности, с каноническим классом, то в терминах теории пересечений и кратностей базисных точек вычисляются два основных бирациональных инварианта для линейных систем без неподвижных компонент: индекс самопересечения и арифметический род. Пусть $\sigma: X' \rightarrow X$ — раздутие замкнутой точки $x \in X$ степени $\deg x = d$, D — эффективный дивизор на X , имеющий кратность $r(x) = r$ в точке x , $D' = \sigma_{\text{соб}}^{-1}(D)$ — собственный прообраз дивизора D на X' и $E = \sigma^{-1}(x)$ — исключительный дивизор (так что $\sigma^*(D) = D' + r(x)E$), тогда

$$(D' \cdot D') = (D \cdot D) - dr^2, \quad p_a(D') = p_a(D) - d \frac{r(r-1)}{2}.$$

В условиях и обозначениях п. 1.2 отсюда мы немедленно получаем следующие численные бирациональные инварианты: предположим, что линейная система $\mathcal{H}'$ в диаграмме (1.2.1) не имеет базисных точек, $H' \in \mathcal{H}'$ — общий дивизор и $H = \chi^{-1}(H') \in \mathcal{H}$ — его собственный прообраз, тогда

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} H'^2 &= H^2 - \sum_{i=0}^{N-1} \deg x_i r(x_i)^2, \\ p_a(H') &= p_a(H) - \sum_{i=0}^{N-1} \deg x_i \frac{r(x_i)(r(x_i) - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Вычитая из удвоенного второго равенства первое, получаем равносильную систему равенств:

$$(1.3.2) \quad \begin{aligned} H'^2 &= H^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2, \\ K_X H' &= K_X H - \sum \deg x_i r(x_i). \end{aligned}$$

Бирациональная инвариантность понимается здесь в том смысле, что бирациональными образами линейных систем являются их собственные образы вместе со всеми базисными условиями (базисными точками, включая и бесконечно близкие, с соответствующими кратностями); иначе говоря, линейные системы, точнее их классы, рассматриваются как элементы так называемой предельной группы Пикара, порожденной обычной группой Пикара поверхности X , ее замкнутыми точками и всеми бесконечно близкими точками, т.е. замкнутыми точками всех поверхностей X' , обладающих бирациональным морфизмом $X' \rightarrow X$ (с естественными отождествлениями). Соответствующий строгий формализм описан в литературе и мы, следуя [18, гл. V], отметим некоторые основные его положения.

1.4. Для всякой гладкой проективной поверхности X над совершенным полем k определена предельная группа циклов $Z^*(X)$ следующим образом. Пусть $\{f: Y \rightarrow X\}$ — множество всех бирациональных k -морфизмов, где Y — гладкая проективная поверхность над k , тогда $Z^*(X) = \varinjlim \text{Pic } Y$, где предел берется по всем инъективным гомоморфизмам $f^*: \text{Pic } X \rightarrow \text{Pic } Y$. Группа $Z^*(X)$ играет роль группы Пикара поля рациональных функций $k(X)$ на X . Она обладает следующими структурами:

(а) $\exists$ симметрическое билинейное спаривание, задаваемое индексом пересечения:

$$Z^*(X) \times Z^*(X) \rightarrow \mathbb{Z};$$

(б) $\exists$ выделенный конус эффективных циклов:

$$Z_+^*(X) = \varinjlim \text{Pic}_+ Y,$$

где $\text{Pic}_+ Y$ обозначает конус эффективных классов дивизоров на Y ;

(с) $\exists$ двойственный конус численно эффективных циклов:

$$Z^{*+}(X) = \{z \in Z^*(X) \mid z - z' \geq 0 \text{ для всех } z' \in Z_+^*(X)\};$$

(d) $\exists$ выделенный гомоморфизм $K: Z^*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, задаваемый на каждом $\text{Pic } Y \subset Z^*(X)$ пересечением с каноническим классом K_Y :

$$K(z) = K_Y \cdot z \quad \forall z \in \text{Pic } Y.$$

Группа $Z^*(X)$ вместе со структурами (a)–(d) является основным бирациональным инвариантом X (см. [18, гл. V]).

Для того чтобы можно было фактически работать с предыдущим формальным определением, вводится так называемое пространство Римана–Зарисского $E(X)$, точками которого являются замкнутые точки X и замкнутые точки всех поверхностей Y , бирационально доминирующих X (т.е. обладающих бирациональным морфизмом $f: Y \rightarrow X$) с естественными отождествлениями (см. [18, гл. V], а также [33, Добавление к гл. 2]). Иными словами, $E(X)$ — это множество всех возможных базисных точек линейных систем на X , как точек на самой поверхности X , так и бесконечно близких к ним.

Пусть $Z^0(X)$ обозначает абелеву группу, порожденную точками пространства $E(X)$. Тогда существует изоморфизм $Z^*(X) \cong \text{Pic } X \oplus Z^0(X)$ и всякое бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$ индуцирует изоморфизмы:

$$(1.4.1) \quad \begin{array}{ccc} Z^*(X) & \xrightarrow{\chi^*} & Z^*(X') \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Pic } X \oplus Z^0(X) & & \text{Pic } X' \oplus Z^0(X') \\ \parallel & & \parallel \\ Z^*(X) & \xleftarrow{\chi_*} & Z^*(X') \end{array}$$

Эти изоморфизмы (собственный образ и собственный прообраз) не сохраняют, конечно, разложение в прямую сумму, если χ не изоморфизм. Каждый элемент $z \in Z^*(X)$ записывается в виде

$$z = D - \sum r(x_i)x_i, \quad D \in \text{Pic } X, \quad x_i \in E(X), \quad r(x_i) \in \mathbb{Z}.$$

Индекс пересечения (a) задается формулами:

$D_1 \cdot D_2$ — обычное пересечение дивизоров, если $D_1, D_2 \in \text{Pic } X$;

$D \cdot x = 0$, если $D \in \text{Pic } X, x \in E(X)$;

$x \cdot x = -\deg x$, если $x \in E(X)$;

$x \cdot y = 0$, если $x, y \in E(X), x \neq y$;

$K(D) = K_X \cdot D$, если $D \in \text{Pic } X$;

$K(x) = -\deg x$, если $x \in E(X)$.

На множестве $E(X)$ имеется отношение частичного порядка: $x_1 < x_2$, если $x_1 \neq x_2$ и точка x_1 является бесконечно близкой к точке x_2 , $x_1, x_2 \in E(X)$. Это означает, что существуют поверхности X_1, X_2 с бирациональными морфизмами $f_i: X_i \rightarrow X$ такие, что $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ и соответствующее бирациональное отображение

$f_2^{-1} \cdot f_1: X_1 \dashrightarrow X_2$ регулярно в точке x_1 и переводит x_1 в x_2 , т.е. x_1 лежит на исключительном дивизоре отображения $f_2^{-1} \cdot f_1$.

Отметим некоторые свойства численно эффективных циклов. Предположим, что $D \in \text{Pic } X$, $x_i \in E(X)$, $r(x_i) \in \mathbb{Z}$, такие, что $D - \sum r(x_i)x_i \in Z^{*+}(X)$, тогда

- (i) $D \in \text{Pic}^+ X$, т.е. D численно эффективен;
- (ii) $r(x_i) \geq 0$;
- (iii) $r(x_i) \geq r(x_j)$, если $x_i > x_j$ (в смысле частичного порядка на $E(X)$).

1.5. Примеры. (i) Пусть $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ – кременово преобразование проективной плоскости над (совершенным) полем k , $l \in \text{Pic } \mathbb{P}^2 = \mathbb{Z}$ – класс прямой. Тогда в предыдущих обозначениях отображению χ сопоставляется элемент $z = z(\chi) \in Z^*(\mathbb{P}^2)$ – собственный прообраз элемента l :

$$z = \chi^{-1}(l) = al - \sum r(x_i)x_i,$$

где $a \in \mathbb{Z}$, $a \geq 1$, $x_i \in E(\mathbb{P}^2)$, $r(x_i)$ – кратности базисных точек x_i (включая и бесконечно близкие) в линейной системе $\mathcal{H} = \chi^{-1}(|l|)$, являющейся собственным прообразом линейной системы прямых $\mathcal{L} = |l|$ на $\mathbb{P}^2$. Отображение χ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $a = 1$. Если $a > 1$, то по лемме 1.3 существует максимальная особенность $x_i \in E(\mathbb{P}^2)$ кратности $r(x_i) > a/3$. По свойству (iii) из предыдущего пункта можно считать, что точка x_i не бесконечно близкая, т.е. лежит на $\mathbb{P}^2$ (так как кратности не возрастают при разрешениях с помощью σ -процессов). Соотношения (1.3.2) принимают здесь следующий вид

$$(1.5.1) \quad \begin{aligned} l^2 = z^2 &= a^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = 1, \\ K_{\mathbb{P}^2} l &= -3a + \sum \deg x_i r(x_i) = -3. \end{aligned}$$

Пусть $\{x_j\}$ – множество всех максимальных особенностей для z , тогда из (1.5.1) немедленно получаем оценку

$$(1.5.2) \quad \sum_j \deg x_j < 9.$$

(ii) Пусть X – поверхность Дель Пеццо из семейства $\{\mathbb{D}\}$ с $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$, X' – одна из относительно минимальных поверхностей из семейств $\{\mathbb{D}\}$ или $\{\mathbb{C}\}$. $\mathcal{H}'$ – линейная система, класс которой порождает группу $\text{Pic } X'$, если X' – поверхность из семейства $\{\mathbb{D}\}$, и пучок коник, если X' – поверхность из семейства $\{\mathbb{C}\}$. Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение, $\mathcal{H} = \chi^{-1}(\mathcal{H}')$ – собственный прообраз линейной системы $\mathcal{H}'$, $z = -aK_X - \sum r(x_i)x_i$ есть ее класс в группе $Z^*(X)$, $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$. По лемме 1.3, если χ – не изоморфизм, то существует максимальная особенность $x_i \in E(X)$ кратности $r(x_i) > a$, если $a > 1$, в случае $\text{Pic } X' = \mathbb{Z}(-K_{X'})$, и $a \geq 1$ в остальных

случаях. Соотношения (1.3.2) переписываются здесь в виде

(1.5.3)

$$\begin{aligned} z^2 &= a^2 K_X^2 - \sum \deg x_i r(x_i)^2 = \begin{cases} K_{X'}^2, & \text{если } \text{Pic } X' = \mathbb{Z}(-K_{X'}); \\ 1, & \text{если } X' \cong \mathbb{P}^2; \\ 2, & \text{если } X' \cong Q \subset \mathbb{P}^3 \text{ — квадрака}; \\ 0, & \text{если } X' \in \{\mathbb{C}\}; \end{cases} \\ K(z) &= -aK_X^2 + \sum \deg x_i r(x_i) = \begin{cases} -K_{X'}^2, & \text{если } \text{Pic } X' = \mathbb{Z}(-K_{X'}); \\ -3, & \text{если } X' = \mathbb{P}^2; \\ -4, & \text{если } X' = Q \subset \mathbb{P}^3 \text{ — квадрака}; \\ -2, & \text{если } X' \in \{\mathbb{C}\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Пусть множество $\{x_j\}$ — множество всех максимальных особенностей, тогда из (1.5.3) немедленно получаем оценку

$$(1.5.4) \quad \sum_j \deg x_j < K_X^2 - \frac{1}{a^2} \mathcal{H}'^2 \leq 9.$$

(iii) Пусть теперь $X \in \{\mathbb{C}\}$, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, линейная система $\mathcal{H}'$ как в предыдущем примере, $\chi: X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение, а $\mathcal{H} = \chi^{-1}(\mathcal{H}')$ — собственный прообраз линейной системы и

$$z = -aK_X + bf - \sum r(x_i)x_i$$

есть ее класс в группе $Z^*(X)$, где f — класс геометрического слоя морфизма $\pi: X \rightarrow C$, $b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $a \geq 0$, $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, если $\pi: X \rightarrow C$ является $\mathbb{P}^1$ -расслоением, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ в противном случае. По лемме 1.3 при $a > 0$ либо существует максимальная особенность x_i с $r(x_i) > a$ (в случае $\text{Pic } X' = \mathbb{Z}(-K_{X'})$ предполагается $a > 1$), либо $b < 0$. Отметим, что в том случае, когда $a > 0$ и $b < 0$, антиканонический класс $-K_X$ необходимо должен быть обильным. Действительно, линейная система $\mathcal{H}$ подвижна и не имеет неподвижных компонент, и $\mathcal{H} \sim -aK_X + bf$, следовательно, $\mathcal{H}^2 = 4ab + a^2 K_X^2 > 0$. Отсюда $K_X^2 \geq -4b > 0$, $-K_X f = 2$ и $-K_X D = a^{-1}(-aK_X + bf)D - ba^{-1}(f \cdot D) > 0$ для любого эффективного дивизора $D \neq f$. Следовательно, по численному критерию $-K_X$ обилен.

Пусть $\{x_j\}$ — множество всех максимальных особенностей (т.е. $r(x_j) > a$), тогда из соотношений (1.3.2) получаем оценку

$$(1.5.5) \quad \sum_j \deg x_j < K_X^2 + 2\frac{b}{a} + \frac{1}{a} K_{X'} \mathcal{H}'.$$

Ясно, что неравенства (1.5.2), (1.5.4) и (1.5.5) не зависят от выбора подвижной без неподвижных компонент линейной системы $\mathcal{H}'$ на X' во всех трех примерах, а правые части формул (1.5.3) — это $\mathcal{H}'^2$ и $K_{X'} \mathcal{H}'$, соответственно. Оценки для сумм степеней максимальных особенностей будут неоднократно использоваться в дальнейшем, особенно при изучении соотношений. Более того, очевидно, эти неравенства со знаком “ $\leq$ ” дают оценку сумм степеней всех особенностей с кратностями $r(x_j) \geq a$.

Вот первые выводы из предыдущих рассуждений.

1.6. ТЕОРЕМА. (i) Пусть X – поверхность из семейства $\{\mathbb{D}\}$ степени $d = K_X^2 = 1$ и $\chi: X' \dashrightarrow X$ – бирациональное отображение на любую поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда X' так же, как и X , – поверхность Дель Пеццо степени 1 и χ – изоморфизм.

(ii) Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение, где $X \in \{\mathbb{D}\}$ и $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Предположим, что X не имеет замкнутых точек x степени $\deg x < d = K_X^2$. Тогда χ – изоморфизм.

(iii) Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение, где $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Предположим, что $d = K_X^2 \leq 0$, тогда $X' \in \{\mathbb{C}\}$, $K_{X'}^2 = K_X^2$ и χ переводит пучок коник на X в пучок коник на X' , т.е. следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ C & \xrightarrow{\varphi} & C' \end{array}$$

где φ – некоторый изоморфизм над k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) следуют из рассуждений примера 1.5 (ii), в частности, из неравенства (1.5.4). В дополнительном рассмотрении нуждается только случай, когда $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $\text{Pic } X' = \mathbb{Z}(-K_{X'})$ и $a = 1$, т.е. $\mathcal{H} \subset |-K_X|$ (в обозначениях 1.5 (ii)). Так как по теореме Римана–Роха $\dim |-K_X| = K_X^2$ и $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}' = \dim |-K_{X'}| = K_{X'}^2 = d'$. Соотношения (1.3.2) здесь принимают вид

$$\begin{aligned} d - \sum \deg x_i r(x_i)^2 &= d', \\ d - \sum \deg x_i r(x_i) &= d'. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Отсюда, $r(x_i) = 0$ или $1 \ \forall i$ и в случае $d = 1$ имеем $r(x_i) = 0 \ \forall i$, $d' = 1$, т.е. χ переводит обильную линейную систему $|-K_X|$ в обильную $|-K_{X'}|$. Следовательно, χ индуцирует изоморфизм антиканонических колец и, стало быть, χ – изоморфизм. Это доказывает утверждение (i). Аналогично, по условию утверждения (ii), $\deg x_i \geq d \ \forall i$, так что опять $r(x_i) = 0 \ \forall i$ и, следовательно, χ – изоморфизм.

Для доказательства утверждения (iii) воспользуемся рассуждениями из примера 1.5 (iii). В обозначениях этого примера равенства (1.3.2) принимают здесь следующий вид

$$\begin{aligned} a^2 K_X^2 + 4ab - \sum \deg x_i r(x_i)^2 &= H'^2, \\ -aK_X^2 - 2b + \sum \deg x_i r(x_i) &= K_{X'} H'. \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Так как $H \cdot f = (-aK_X + bf)f = 2a$, то $r(x_i) \leq 2a \ \forall i$. Поэтому из первого равенства (1.6.2) получаем

$$a^2 K_X^2 + 4ab - 2a \sum \deg x_i r(x_i) \leq H'^2.$$

Из второго равенства $\sum \deg x_i r(x_i) = aK_X^2 + 2b + K_{X'}H'$, следовательно,

$$a^2 K_X^2 + 4ab - 2a(aK_X^2 + 2b + K_{X'}H') \leq H'^2.$$

Отсюда при $a > 0$ находим

$$(1.6.3) \quad K_X^2 \geq \begin{cases} \frac{2a-1}{a^2} K_{X'}^2, & \text{если } \text{Pic } X' = \mathbb{Z}(-K_{X'}); \\ \frac{ba-1}{a^2}, & \text{если } X' = \mathbb{P}^2; \\ \frac{2(4a-1)}{a^2}, & \text{если } X' = Q \subset \mathbb{P}^3; \\ \frac{4}{a}, & \text{если } X' \in \{\mathbb{C}\}. \end{cases}$$

По предположению $K_X^2 \leq 0$, следовательно, морфизм $\pi: X \rightarrow C$ имеет $8 - K_X^2 \geq 8$ геометрических вырожденных слоев и, стало быть, не имеет сечения, так что a – целое число. В таком случае при $a \neq 0$ предыдущие неравенства приводят к противоречию. Если же $a = 0$, то из равенств (1.6.2) немедленно следует, что $r(x_i) = 0 \ \forall i$, $\mathcal{H}' = |f'|$ – пучок коник на X' , $b = 1$ и $\mathcal{H} = |f|$ – пучок коник на X . Следовательно, $X' \in \{\mathbb{C}\}$, отображение χ переводит пучок $\mathcal{H} = |f|$ в пучок $\mathcal{H}' = |f'|$. Равенство $K_X^2 = K_{X'}^2$ можно доказать, например, следующим образом.

Отображение χ , переводящее пучок коник $|f|$ на X в пучок коник $|f'|$ на X' , является изоморфизмом в окрестности каждого вырожденного слоя морфизма $\pi: X \rightarrow C$. Действительно, так как вырожденный слой X_t , $t \in C$, неприводим над полем вычетов $k(t)$ замкнутой точки t , но распадается на две пересекающиеся (-1) -кривые над квадратичным расширением поля $k(t)$, то ни одна из этих компонент не может быть стянута в (неособую) точку на X' при бирациональном отображении. Если χ имеет точку неопределенности на слое X_t , то, поскольку она определена над k и слой X_t неприводим над k , на каждой из двух (-1) -кривых слоя X_t над квадратичным расширением также есть точка неопределенности χ . Следовательно, при разрешении индекс самопересечения каждой из компонент уменьшается и, стало быть, ни одна из них не может быть стянута в неособую точку при отображении χ .

Аналогично, обратное отображение χ^{-1} также является изоморфизмом в окрестности вырожденных слоев. Следовательно, число геометрических вырожденных слоев для $\pi: X \rightarrow C$ и $\pi': X' \rightarrow C'$ одинаково и равно $8 - K_X^2 = 8 - K_{X'}^2$. Отсюда $K_X^2 = K_{X'}^2$. Теорема доказана.

Эта теорема подсказывает следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\}$ называется (бirationально) *жесткой*, если любое бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$ на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ является изоморфизмом. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ называется (бirationально) *полужесткой*, если для всякого бирационального отображения $\chi: X \dashrightarrow X'$, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, существует бирациональный автоморфизм $\psi: X \dashrightarrow X$ такой, что композиция $\chi \circ \psi: X \dashrightarrow X'$ является изоморфизмом. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ называется (бirationально) *d-устойчивой*, если K_X^2 – бирациональный инвариант.

Будем говорить, что $X \in \{\mathbb{C}\}$ обладает (бirationально) *единственной структурой расслоения на коники*, если всякое бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$ сохраняет структуру расслоения на коники, т.е. $X' \in \{\mathbb{C}\}$ и χ переводит пучок коник $|f|$ на X в пучок коник $|f'|$ на X' .

Утверждения (i) и (ii) теоремы 1.6 доставляют примеры жестких поверхностей, а утверждение (iii) – это результат о бирациональной стабильности поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 \leq 0$: такие поверхности обладают единственной структурой расслоения на коники и, в частности, d -устойчивы.

§ 2. Элементарные линки и теорема о разложении

2.1. Начнем с изложения некоторых элементов теории минимальных моделей Мори для алгебраических поверхностей над совершенным полем k (см. [26]). Пусть X – гладкая проективная поверхность над k с K_X , численно не эффективным (т.е. существует кривая $C \subset X$ с $K_X C < 0$). Тогда на X существует экстремальный луч R . Пусть $\varphi_R: X \rightarrow Y$ – стягивание экстремального луча R (экстремальное стягивание). Тогда φ_R является одним из следующих (см. [26]):

(i) $\varphi_R: X \rightarrow Y$ – дивизориальное стягивание, т.е. бирациональный морфизм, стягивающий k -неприводимый дивизор E в неособую замкнутую точку $y \in Y$; E является (-1) -кривой над полем вычетов $k(y)$ точки y , и $\overline{E} = E \otimes \overline{k} = \sum_{i=1}^{\deg y} \overline{E}_i$, где $\overline{E}_i$ – попарно непересекающиеся (-1) -кривые над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k ;

(ii) $\varphi_R: X \rightarrow Y$ – расслоение на коники над гладкой проективной кривой Y ; здесь $\text{Pic } X = \pi^* \text{Pic } Y \oplus \mathbb{Z}$, следовательно, все слои k -неприводимы, а вырожденные слои X_y , если они существуют, над алгебраическим замыканием $\overline{k}$ поля k распадаются на непересекающиеся пары пересекающихся в одной точке (-1) -кривых:

$$X_y \otimes \overline{k} = \overline{X}_y = \sum_{i=1}^{\deg y} (X_{\overline{y}_i} \vee X'_{\overline{y}_i});$$

(iii) $\varphi_R: X \rightarrow Y = \text{Spec } k$ – стягивание в точку; здесь X – поверхность Дель Пешо с $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$, как в семействе $\{\mathbb{D}\}$ из § 1.

Отметим, что если X – минимальная над k рациональная поверхность, то K_X численно не эффективен и, следовательно, на ней существует экстремальный луч R , который имеет в силу минимальности тип (ii) или (iii). В случае (ii) кривая Y необходимо рациональная, так что X принадлежит одному из семейств $\{\mathbb{D}\}$ или $\{\mathbb{C}\}$ из § 1. Обратно, каждая из поверхностей из этих семейств обладает экстремальным лучом типа (iii) или (ii), соответственно. Отметим также, что экстремальные стягивания не выводят из категории гладких поверхностей.

Объектами изучения в этой статье являются бирациональные отображения

$$(2.1.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & & S' \end{array}$$

где $X, X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ – минимальные рациональные поверхности из семейств $\{\mathbb{D}\}$ и $\{\mathbb{C}\}$, φ, φ' – экстремальные стягивания Мори, т.е. $S = \text{Spec } k$, и $\varphi: X \rightarrow \text{Spec } k$ –

стягивание в точку, если $X \in \{\mathbb{D}\}$ и $S = C$ – рациональная кривая, $F = \pi: X \rightarrow C$ – расслоение на коники, если $X \in \{\mathbb{C}\}$. Аналогично для S' и φ' . Бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$ никак не согласовано, вообще говоря, с морфизмами φ и φ' .

Основная задача – разложить отображение χ на элементарные составляющие – линки – и изучить вопрос об однозначности таких разложений. Для этого, прежде всего, надо определить и классифицировать элементарные линки.

2.2. Определение и примеры элементарных линков (см. [21]).

Линки типа I. Это коммутативные диаграммы вида

$$(2.2.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\sigma} & Z = X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & \xleftarrow{\psi} & S' \end{array}$$

где $\sigma: Z \rightarrow X'$ – дивизориальное элементарное стягивание Мори, как в 2.1 (i), $\psi: S' \rightarrow S$ – морфизм. Здесь $X \in \{\mathbb{D}\}$, $\varphi: X \rightarrow S = \text{Spec } k$ – стягивание в точку, $Z = X' \in \{\mathbb{C}\}$, $\varphi': X' \rightarrow S' = C'$ – расслоение на коники.

Простейший пример: $X = \mathbb{P}^2$, $\sigma: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – раздутие точки, $\varphi': \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ – естественное $\mathbb{P}^1$ -расслоение, $\psi: S' = \mathbb{P}^1 \rightarrow S = \text{Spec } k$ – морфизм в точку.

Линки типа II. Это коммутативные диаграммы вида

$$(2.2.2) \quad \begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\sigma} & Z & \xrightarrow{\tau} & X' \\ \varphi \downarrow & & & & \downarrow \varphi' \\ S & & \text{---} & & S' \end{array}$$

где $\sigma: Z \rightarrow X$, $\tau: Z \rightarrow X'$ – экстремальные дивизориальные стягивания Мори, как в 2.1 (i).

Вот наиболее употребительный пример: $\varphi: X \rightarrow S = C$ – расслоение на коники, $\varphi': X' \rightarrow S' = C$ – тоже расслоение на коники, $\sigma: Z \rightarrow X$ – раздутие замкнутой точки $x \in X$, не лежащей на вырожденном слое и такой, что в каждом геометрическом слое $\overline{X_{\bar{k}}}$ лежит не более одной из геометрических точек $\{\bar{x}_i\} = x \otimes \bar{k}$, $j = 1, \dots, \deg x$, $\tau: Z \rightarrow X'$ – стягивание собственного прообраза на Z слоя $X_{\varphi(x)}$ морфизма φ в неособую точку $x' \in X'$. Это преобразование над $C = S = S'$. Такой линк называется элементарным преобразованием ε_x расслоения на коники с центром в точке x .

Другой пример: $X = \mathbb{P}^2$, $S = \text{Spec } k$, $x \in \mathbb{P}^2$ – замкнутая точка степени $\deg x = 2$, L_x – единственная прямая на $\mathbb{P}^2$, содержащая точку x , $\sigma: Z \rightarrow X$ – раздутие x , $\tau: Z \rightarrow X'$ – стягивание собственного прообраза прямой L_x в неособую точку $x' \in X'$, $\deg x' = 1$. Здесь $X' \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ – квадра $\text{Pic } Q \simeq \mathbb{Z}$, $S' = \text{Spec } k$.

Линки типа III. Это коммутативные диаграммы вида

$$(2.2.3) \quad \begin{array}{ccc} X = Z & \xrightarrow{\sigma} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & \xrightarrow{\psi} & S' \end{array}$$

где $\sigma: Z \rightarrow X'$ – экстремальное дивизориальное стягивание Мори, как в 2.1 (i), $\psi: S \rightarrow S'$ – морфизм. Здесь $X \in \{\mathbb{C}\}$, $S = C$ – кривая, $\varphi: X \rightarrow S$ – расслоение на коники, $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $S' = \text{Spec } k$.

Эти линки являются обратными к линкам типа I. Рассмотрим один из примеров: $X \subset \mathbb{P}^3$ – гладкая кубическая поверхность с одной единственной прямой $E \subset X$, определенной над k , пучок плоскостей в $\mathbb{P}^3$, проходящих через E , отсекает на X пучок коник $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, морфизм $\sigma: X = Z \rightarrow X'$ является стягиванием (-1) -кривой E в неособую точку $x' \in X'$ степени 1, $X' \in \{\mathbb{D}\}$ является поверхностью Дель Пеццо степени 4, $\psi: S = \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{Spec } k = S'$ – стягивание в точку.

Линки типа IV. Это диаграммы вида

$$(2.2.4) \quad \begin{array}{ccc} X & \xlongequal{\quad} & X' \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ S & & S' \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Spec } k & \end{array}$$

где $X, X' \in \{\mathbb{C}\}$, φ, φ' – различные расслоения на коники на X над кривыми рода нуль $S = C, S' = C'$, соответственно. Таким образом, каждый линк типа IV предполагает существование на X двух экстремальных лучей.

Простейший пример: $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, φ, φ' – проекции на первый и второй множитель. Другой пример: $X \subset \mathbb{P}^4$ – гладкая поверхность Дель Пеццо степени 4, обладающая структурой расслоения на коники $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\text{Pic } X \simeq \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$; на X существует другой пучок коник $\varphi': X \rightarrow \mathbb{P}^1$, класс слоя f' которого эквивалентен $-K_X - f$, где f – класс слоя φ . Если в первом примере существует автоморфизм $\tau: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, переставляющий множители и, стало быть, экстремальные стягивания φ и φ' , то во втором примере такого автоморфизма, вообще говоря, не существует. Соответствующий пример см. в [4].

2.3. Разложение бирационального отображения (2.1.1) на элементарные линки основано на изучении поведения линейных систем без неподвижных компонент при бирациональных отображениях и свойствах численных характеристик присоединенных линейных систем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ – линейная система без неподвижных компонент на поверхности X и $b \in \mathbb{Q}, b > 0$. Говорят, что пара $(X, b\mathcal{H})$ имеет *терминальные* (соответственно, *канонические*) *особенности*, если для всякого бирационального морфизма $g: Y \rightarrow X$ с неособым Y и g – исключительными дивизорами F_i , имеет место равенство

$$(2.3.1) \quad K_Y + b\mathcal{H}_Y = g^*(K_X + b\mathcal{H}_X) + \sum_{i=1}^N s_i F_i$$

с $s_i > 0, s_i \in \mathbb{Q}$ (соответственно, $s_i \geq 0$), где $\mathcal{H}_Y$ – собственный прообраз на Y линейной системы $\mathcal{H}$. Числа s_i называются *дискрепантностями*.

Каноническим порогом пары $(X, \mathcal{H})$ называется максимальное положительное рациональное число $c = c(X, \mathcal{H})$ такое, что $(X, c\mathcal{H}_X)$ имеет канонические особенности.

КОММЕНТАРИЙ 1. Прежде всего, выясним, как связаны дискрепантности s_i в (2.3.1) с кратностями $r(x_j)$ в (1.2.2), где $Y = X_N \rightarrow X_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_0 = X$ – разложение морфизма g на экстремальные дивизориальные стягивания, как в (1.2.1). Для этого перепишем (2.3.1) в обозначениях (1.2.1)

$$K_Y + b\mathcal{H}_Y = g^*(K_X + b\mathcal{H}_X) + \sum_{i=1}^N (1 - br(x_{i-1}))\sigma_{N,i}^*(E_i),$$

поскольку для неособых поверхностей X, Y имеем $K_Y = g^*K_X + \sum \sigma_{N,i}^*(E_i)$. Так как F_i являются неприводимыми над k исключительными дивизорами, а $\sigma_{N,i+1}^*(E_{i+1})$ – их полные прообразы на $Y = X_N$, то существуют целые $\delta_{ij} \geq 0$ с $\delta_{ii} = 1$ такие, что $\sigma_{N,i}^*(E_i) = \sum_{j \geq i} \delta_{ij} F_j$ и

$$(2.3.2) \quad s_j = \sum_{i \leq j} \delta_{ij} (1 - br(x_{i-1})).$$

Отсюда получаем, что пара $(X, \mathcal{H}_X)$ имеет только канонические особенности, если $s_j = \sum_{i \leq j} \delta_{ij} (1 - br(x_{i-1})) \geq 0$ для бирационального морфизма $g: Y \rightarrow X$ такого, что линейная система $\mathcal{H}_Y$ – собственный прообраз $\mathcal{H}_X$ – свободна. Предыдущие неравенства эквивалентны неравенствам $1 - br(x_{i-1}) \geq 0 \quad \forall i$. Действительно, в одну сторону доказательство очевидно. Обратно, если $1 - br(x_{i-1}) < 0$ для некоторого i , то $s_i = \sum_{k \leq i} \delta_{ki} (1 - br(x_{k-1})) < 0$, потому что $\delta_{ki} \geq 0$, $\delta_{ki} = 0$ для всех $k \leq i-1$, для которых $g(F_i) \not\subset F_k$, и $1 - br(x_{k-1}) < 0$ для остальных $k \leq i-1$, поскольку для них $r(x_{k-1}) \geq r(x_{i-1})$ в силу свойства (iii) пункта 1.4. В частности, если для некоторого i $g(F_i) \not\subset F_k$ для всех $k < i$, т.е. точка x_{i-1} не является бесконечно близкой ни для какой точки x_{k-1} , $k < i$, то $s_i = 1 - br(x_{i-1})$. Отсюда в силу свойства 1.4 (iii) получаем для канонического порога равенство

$$(2.3.3) \quad c = \frac{1}{r},$$

где $r = \max\{r(x_i)\}$, $r(x_i)$ – кратности базисных точек линейной системы.

Отметим, что для многообразий X размерности $n \geq 3$ соотношение (2.3.3), вообще говоря, перестает быть верным ввиду более сложного поведения канонического класса при раздутиях, чем в случае неособых поверхностей. Кроме того, на X допускаются терминальные особенности.

Для разложения χ в (2.1.1) на элементарные линки мы будем пользоваться линейными системами вида

$$(2.3.4) \quad \mathcal{H}' = \begin{cases} |-a'K_{X'}|, & a' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}, a' > 0, & \text{если } X' \in \{\mathbb{D}\}; \\ |-a'K_{X'} + b'f'|, & a', b' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, a' \geq 0, b' \geq 0, & \text{если } X' \in \{\mathbb{C}\}; \end{cases}$$

и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ – собственный прообраз на X линейной системы $\mathcal{H}'$ при бирациональном отображении χ , тогда

$$(2.3.5) \quad \mathcal{H} \sim \begin{cases} -aK_X, & a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}, a > 0, & \text{если } X \in \{\mathbb{D}\}; \\ -aK_X + bf, & a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, a \geq 0, & \text{если } X \in \{\mathbb{C}\}. \end{cases}$$

Принимая во внимание соотношение (2.3.3), введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В предыдущих обозначениях пусть c –канонический порог для пары $(X, \mathcal{H})$. Будем говорить, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ имеет *максимальную особенность*, если $1/c > a$.

Теперь сформулируем и передокажем лемму 1.3 о неравенстве Нётера в контексте этого параграфа.

2.4. ЛЕММА (неравенство Нётера, см. [21]). *В предыдущих обозначениях пусть $a' > 0$, $b' \geq 0$ такие, что линейная система $\mathcal{H}'$ очень обильна на X' , тогда*

(i) *$a \geq a'$ и равенство выполнимо только в случае, когда или χ – изоморфизм, или $X, X' \in \{\mathbb{C}\}$ и χ индуцирует изоморфизм $C \xrightarrow{\sim} C'$ такой, что диаграмма*

$$(2.4.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\chi} & X' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ C & \xrightarrow{\sim} & C' \end{array}$$

коммутативна;

(ii) *если $K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X$ имеет только канонические особенности (т.е. $r(x_i) \leq a \forall i$ в силу (2.3.3), иначе говоря, $\mathcal{H}$ не имеет максимальных особенностей) и $b \geq 0$ в случае $X \in \{\mathbb{C}\}$, тогда $a = a'$, χ – изоморфизм и индуцирует изоморфизм $S \xrightarrow{\sim} S'$ (в частности, $C \xrightarrow{\sim} C'$ в случае $X \in \{\mathbb{C}\}$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму (1.2.1) разрешения отображения χ , где $X_N = Y$; $X = X \xrightarrow{\varphi} S$, $X' = X' \xrightarrow{\varphi'} S'$, $\mathcal{H}'$ – как в условии леммы и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ – ее собственный прообраз. Для некоторого положительного числа $\alpha \in \mathbb{Q}$ запишем

$$(2.4.2) \quad K_Y + \alpha \mathcal{H}_Y = \psi^*(K_{X'} + \alpha \mathcal{H}') + \sum s'_j F'_j = \sigma^*(K_X + \alpha \mathcal{H}) + \sum s_i F_i,$$

где F_i, F'_j – исключительные дивизоры для морфизмов σ и ψ , соответственно. Дискретности s_i, s'_j зависят, естественно, от α и, поскольку линейная система $\mathcal{H}'$ по условию очень обильна, $\mathcal{H}_Y = \psi^* \mathcal{H}'$, т.е. $K_Y = \psi^* K_{X'} + \sum s'_j F'_j$, откуда $s'_j = \sum_{k \leq j} \delta_{kj}$ – целые положительные числа, как в (2.3.2), если ψ не изоморфизм.

Пусть Γ (соответственно, Γ') – общая кривая на X (соответственно, X') такая, что

$$\Gamma \sim \begin{cases} -K_X, & \text{если } X \in \{\mathbb{D}\}; \\ f, & \text{если } X \in \{\mathbb{C}\} \text{ и } f \text{ – слой } \pi: X \rightarrow C \end{cases}$$

(соответственно, для Γ').

Положим $\alpha = 1/a'$ в (2.4.2), тогда первое из равенств дает

$$(2.4.3) \quad \left(K_Y + \frac{1}{a'} \mathcal{H}_Y \right) \sigma^* \Gamma = \begin{cases} (\sum s'_j F'_j) \sigma^* \Gamma \geq 0, & \text{если } X' \in \{\mathbb{D}\}; \\ \left(\frac{b'}{a'} \psi^* f' + \sum s'_j F'_j \right) \sigma^* \Gamma \geq 0, & \text{если } X' \in \{\mathbb{C}\}. \end{cases}$$

Так как $a' > 0$, $b' \geq 0$, $s'_j \geq 0$, то равенство здесь возможно, если только либо $\{F'_j\} = \{F_i\}$, $X, X' \in \{\mathbb{D}\}$ и χ – изоморфизм, либо $\chi(\Gamma)$ содержится в слоях пучка $|f'|$ на X' , т.е. имеет место коммутативная диаграмма (2.4.1).

Из (2.4.3) и второго равенства (2.4.2) получаем

$$\left(K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}\right)\Gamma \geq 0.$$

Отсюда по (2.3.5) находим $1/a' \geq 1/a$, т.е. $a \geq a'$ и равенство имеет место только в указанных выше случаях. Это доказывает (i).

Пусть теперь $K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}$ канонично, т.е. в (2.4.2) с $\alpha = 1/a$ имеем $s_i \geq 0 \ \forall i$. Обращая предыдущие рассуждения и учитывая, что $b \geq 0$, получаем $a = a'$ и, стало быть, χ – изоморфизм, если $X \in \{\mathbb{D}\}$, и χ включается в коммутативную диаграмму (2.4.1), если $X \in \{\mathbb{C}\}$. Чтобы показать, что χ – изоморфизм, и в этом случае положим в (2.4.2) $\alpha = 1/a = 1/a'$. В результате получим

$$(2.4.4) \quad \psi^*\left(\frac{b'}{a}f'\right) + \sum s'_j F'_j = \sigma^*\left(\frac{b}{a}f\right) + \sum s_i F_i.$$

Если ψ не изоморфизм, то $s'_j > 0 \ \forall j$ и $s_i \geq 0$ по предположению. Вычисляя пересечение обеих частей равенства (2.4.4) с F'_j , получаем

$$\left(\sum s'_j F'_j\right)F'_j = \left(\sum s_i F_i\right)F'_j \geq 0,$$

что противоречит отрицательной определенности матрицы пересечений для исключительных дивизоров $\{F'_j\}$. Отсюда следует, что $\psi: Y \xrightarrow{\sim} X'$ – изоморфизм, и, сравнивая числа Пикара (т.е. ранги групп Пикара) $2 = \rho(X) = \rho(X') = \rho(Y)$, получаем, что $\{F_i\} = \emptyset$, т.е. $\sigma: Y \xrightarrow{\sim} X$ – тоже изоморфизм. Это доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно обобщить это доказательство на случай, когда система $\mathcal{H}'$ не обязательно очень обильна, а лишь свободна, чтобы получить утверждения, как в лемме 1.3.

Численные характеристики отображения χ определяются линейной системой $\mathcal{H}_X$ на X , как в лемме 2.4. А именно,

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Степенью* $(\mathcal{H}_X, \varphi: X \rightarrow S)$ называется тройка $(a, r, m) = A(X, \mathcal{H}_X)$, где a – как в лемме 2.4, $r = 1/c$ есть максимум кратностей особенностей линейной системы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ (c – канонический порог для $(X, \mathcal{H})$) и m – число особенностей $\mathcal{H}$ кратности r . Отношение порядка определяется лексикографически:

$$A_1 = (a_1, r_1, m_1) < A = (a, r, m),$$

если $a_1 < a$, или $a_1 = a$, $r_1 < r$, или $a_1 = a$, $r_1 = r$, $m_1 < m$.

Числа a , r , m в определении степени являются неотрицательными, r , m – целые, $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, т.е. множество степеней дискретно и ограничено снизу. Этот факт, теория Мори для поверхностей и неравенства Нётера позволяют доказать следующий общий результат о факторизации бирациональных отображений (2.1.1).

2.5. ТЕОРЕМА (см. [21]). *Любое бирациональное отображение, как в (2.1.1), раскладывается в композицию конечного числа элементарных линков типа I–IV.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого отображения χ , как в (2.1.1), мы найдем элементарный линк Φ_1

$$(2.5.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi_1} & X_1 \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi_1 \\ S & & S' \end{array}$$

такой, что степень $A_1 = (a_1, r_1, m_1)$ отображения $\chi \circ \Phi_1^{-1}: X_1 \dashrightarrow X'$ относительно линейной системы $\mathcal{H}_{X_1}$ – собственного образа линейной системы $\mathcal{H}$ при Φ_1 – меньше, чем $A = (a, r, m)$, если только χ не является изоморфизмом. Через конечное число шагов процесс откручивания оборвется на изоморфизме.

Рассмотрим по отдельности следующие две возможности: $\mathcal{H}_X$ имеет или не имеет максимальные особенности.

Случай 1. Линейная система $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ имеет максимальную особенность кратности $r > a$. Согласно свойству (iii) пункта 1.4 среди всех максимальных особенностей существует такая, которая лежит на X (т.е. не является бесконечно близкой). Пусть $\sigma: Y \rightarrow X$ – раздутие этой максимальной особенности, $x \in X$. По предположению $K_Y + \frac{1}{r}\mathcal{H}_Y = \sigma^*(K_X + \frac{1}{r}\mathcal{H}_X)$ канонично и не является численно эффективным над S (поскольку $r > a$). Пусть c_Y – канонический порог для $(Y, \mathcal{H}_Y)$ и $\alpha = \min\{\frac{1}{a}, c_Y\}$.

Ближайшая цель – применить теорию минимальных моделей для $K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y$ над S . Прежде всего, заметим, что $K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y$ численно не эффективен, т.е. существует кривая F в слоях $Y \rightarrow S$ такая, что $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)F < 0$. Действительно, пусть E – исключительная кривая для $\sigma: Y \rightarrow X$, тогда

$$(2.5.2) \quad K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y = \sigma^*(K_X + \alpha\mathcal{H}_X) + (1 - \alpha r)E.$$

Если $c_Y < 1/a$, то $\alpha = c_Y$, и дивизор $K_X + \alpha\mathcal{H}_X$ численно не эффективен над S , следовательно, $K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y$ тоже численно не эффективен. Если $c_Y \geq 1/a$, то $\alpha = 1/a$, и из (2.3.5) и (2.5.2) видим, что найдется кривая F в слое $Y \rightarrow S$ такая, что $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)F < 0$: F – собственный прообраз на Y слоя f_x , проходящего через раздуваемую точку x , если $X \in \{\mathbb{C}\}$, и F – любая кривая на Y , пересекающая E , поскольку $(1 - \alpha r) = (1 - r/a) < 0$, если $X \in \{\mathbb{D}\}$.

Следовательно, по программе минимальных моделей для $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)$ над S существует экстремальный луч R на Y , $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)R < 0$, представленный некоторой кривой, отличной от E (так как $(K_Y + \alpha\mathcal{H}_Y)E \geq 0$). Поскольку $\mathcal{H}_Y$ не имеет неподвижных компонент, то $\mathcal{H}_Y R \geq 0$, следовательно, $K_Y R < 0$, т.е. R является экстремальным лучом для K_Y .

Из классификации экстремальных лучей видим, что R принадлежит либо типу 2.1 (i), либо типу 2.1 (ii). Случай 2.1 (iii) невозможен, поскольку $\rho(Y) = \text{rk Pic } Y \geq 2$.

Предположим сначала, что R типа 2.1 (i), т.е. соответствующее стягивание $\varphi_R: Y \rightarrow Z$ дивизориально. Полагая, что $X_1 = Z$ и $\varphi_1: X_1 \rightarrow S_1 = S$ – структурный морфизм, получаем линк $\Phi_1: X \dashrightarrow X_1$ типа II. Пусть Γ_1 – общая кривая в

слоях $X_1 \rightarrow S$, как в доказательстве леммы 2.4. Так как $K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X$ не канонично, то $\sigma^*(K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X) = K_Y + \frac{1}{a}\mathcal{H}_Y + \lambda E$ с $\lambda > 0$. Тогда

$$(2.5.3) \quad 0 = \left(K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X\right) \sigma_* \varphi_R^* \Gamma_1 = \left(K_Y + \frac{1}{a}\mathcal{H}_Y\right) \varphi_R^* \Gamma_1 + \lambda E \varphi_R^* \Gamma_1 \\ \geq \left(K_Y + \frac{1}{a}\mathcal{H}_Y\right) \varphi_R^* \Gamma_1 = \left(K_{X_1} + \frac{1}{a}\mathcal{H}_{X_1}\right) \Gamma_1,$$

и равенство выполнено только в случае, когда $E \cap \varphi_R^* \Gamma_1 = 0$, т.е. когда $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$ и Φ_1 – элементарное преобразование расслоений на коники $X \rightarrow S$.

Следовательно, $a_1 < a$, если $X \in \{\mathbb{D}\}$, $a_1 = a$, если $X \in \{\mathbb{C}\}$. В последнем случае, так как $\alpha \geq 1/r$ и $K_{X_1} + \alpha\mathcal{H}_{X_1}$ канонично по построению, то кратность максимальной особенности линейной системы $\mathcal{H}_{X_1}$ не превосходит r , а в случае равенства $\alpha = 1/r$ число максимальных особенностей $m_1 = m(X_1, \mathcal{H}_X)$ на единицу меньше, чем $m = m(X, \mathcal{H}_X)$:

$$m_1 = m(X_1, \mathcal{H}_{X_1}) = m(Y, \mathcal{H}_Y) = m(X, \mathcal{H}_X) - 1,$$

поскольку экстремальное дивизориальное стягивание $\varphi_R: Y \rightarrow Z = X_1$ не является $(K_{X_1} + \frac{1}{a}\mathcal{H}_{X_1})$ -крепантным, а остальные максимальные особенности сохраняются при отображении Φ_1 .

Таким образом, линк Φ_1 уменьшает степень: $A_1 = (a_1, 1/\alpha, m_1) < A = (a, r, m)$.

Пусть теперь R типа 2.1 (ii), т.е. соответствующее стягивание $\varphi_R: Y \rightarrow Z$ является расслоением на коники. Это возможно, если только $X \in \{\mathbb{D}\}$, так как $2 = \rho(Y) = \rho(X) + 1$. Полагая здесь $X_1 = Y$, $S_1 = Z$ и $\varphi_1 = \varphi_R$, мы имеем линк Φ_1 типа I. Точно так же, как и в (2.5.3), находим, что $a_1 \leq a$. В действительности, неравенство строгое: $a_1 < a$, потому что Γ_1 в этом случае является слоем f_1 расслоения на коники $X_1 \rightarrow S_1$ и $\lambda E \cdot \Gamma_1 > 0$, поскольку $\lambda > 0$ и E не содержится в слое φ_R .

Таким образом, и в этом случае $A_1 = (a_1, r_1, m_1) < A = (a, r, m)$.

Случай 2. Линейная система $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ не имеет максимальных особенностей. В случае $X = \{\mathbb{D}\}$ по лемме 2.4 это возможно только в случае, когда χ – изоморфизм. Можно предполагать, следовательно, что $X \in \{\mathbb{C}\}$, и пусть $\pi: X \rightarrow C$ – структурный морфизм со слоем f . Если χ – не изоморфизм, тогда по лемме 2.4 из каноничности $K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X$ следует, что $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$ с $b < 0$, т.е. $K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X = \frac{b}{a}f$ численно не эффективно. Стало быть, существует $(K_X + \frac{1}{a}\mathcal{H}_X)$ – экстремальный луч R на X , отличный от $\mathbb{R}_+[f]$. Так как $\mathcal{H}_X$ не имеет неподвижных компонент, то $\mathcal{H}_X R \geq 0$ и, следовательно, $K_X R < 0$, т.е. R является K_X – экстремальным лучом. Пусть $\varphi_R: X \rightarrow Z$ – стягивание R . Как и выше, возможны два случая:

1) R имеет тип 2.1 (i), т.е. $\varphi_R: X \rightarrow Z$ – дивизориальное стягивание. В этом случае положим $X_1 = Z$ и $\varphi_1: X_1 \rightarrow S_1 = \text{Spec } k$, так что $X_1 \in \{\mathbb{D}\}$ и мы имеем линк $\Phi_1: X \dashrightarrow X_1$ типа III. Здесь

$$\mathcal{H}_{X_1} \sim -a_1 K_{X_1} = \varphi_{R*}(-aK_X + bf) = -aK_{X_1} + b\varphi_{R*}(f).$$

Так как $\rho(X_1) = 1$, то $\varphi_{R*}(f) = -\mu K_{X_1}$, $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $\mu > 0$, и $a_1 = a + b\mu < 0$, поскольку $b < a$. Отсюда $A_1 = (a_1, r_1, m_1) < (a, r, m)$.

2) R имеет тип 2.1 (ii), т.е. $\varphi_R: X \rightarrow Z$ – расслоение на коники. Положим $X_1 = X$, $S_1 = Z = C_1$ и $\varphi_1 = \varphi_R: X_1 \rightarrow S_1 = C_1$, так что на $X = X_1$ существует другая структура расслоения на коники. В этом случае $\Phi_1: X = X_1$ – линк типа IV – переход к другой структуре расслоения на коники. Если $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X \sim -a_1K_X + b_1f_1$, то $2a_1 = \mathcal{H}_1f_1 = \mathcal{H}f_1 = 2a + b(f \cdot f_1) < 2a$, так как $b < 0$ и $(f \cdot f_1) > 0$. Опять имеем уменьшение степени: $A_1 = (a_1, r_1, m_1) < A = (a, r, m)$. Теорема доказана.

КОММЕНТАРИЙ 2. Из доказательства теоремы видно, что если $\mathcal{H}_X$ обладает максимальной особенностью и $\sigma: Z \rightarrow X$ – ее раздутие, то K_Z обилен, когда $X \in \{\mathbb{D}\}$, или когда $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_Z^2 > 0$. Действительно, если $X \in \{\mathbb{D}\}$, то $\rho(Z) = 2$ и, как видно из доказательства теоремы, на Z кроме $\mathbb{R}_+(E)$ существует еще один экстремальный луч. Следовательно, 2-мерный конус эффективных циклов $NE(Z)$ порожден двумя экстремальными лучами, т.е. по численному критерию Клеймана $-K_Z$ обилен. Аналогично, если $X \in \{\mathbb{C}\}$, то $\rho(Z) = 3$ и $NE(Z)$ порожден двумя экстремальными лучами и эффективен (по теореме Римана–Роха для рациональной поверхности Z с $K_Z^2 > 0$) антиканоническим дивизором $-K_Z$. Так как $(-K_Z)^2 = K_Z^2 > 0$, то опять по численному критерию Клеймана $-K_Z$ обилен.

Если $\mathcal{H}_X$ не имеет максимальных особенностей и χ – не изоморфизм, то $-K_X$ обилен. Действительно, утверждение не тривиально, только если $X \in \{\mathbb{C}\}$. Тогда по лемме 2.4 (ii) $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$ с $b < 0$. Из доказательства теоремы видим, что на X в этом случае существует другой экстремальный луч и, так как $\rho(X) = 2$, то $-K_X$ обилен, как и выше.

Результат 2.5 был получен раньше, как уже отмечалось во введении, с помощью явных вычислений линков для конкретных классов поверхностей и действий этих линков на предельных группах $Z^*(X)$. Приведенное здесь доказательство не использует явных формул, а использует лишь элементы двумерной теории Мори. В таком виде теорема 2.5 обобщается на трехмерный случай (см. [21]).

Отметим, что теорема 2.5 в такой общей форме не позволяет ответить на вопросы типа теоремы 1.6 о существовании или несуществовании бирациональных отображений над k между различными классами поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, в частности, решить вопрос о k -рациональности. Явные вычисления линков и их действий на группах $Z^*(X)$ необходимы также для описания соотношений между ними.

Приводим соответствующий классификационный результат.

2.6. ТЕОРЕМА. Пусть Φ_1 – элементарный линк типа I–IV, как в диаграмме 1.5.1. Тогда для Φ_1 имеются только следующие возможности.

(i) Линки типа I. Здесь необходимо $X \in \{\mathbb{D}\}$, $X_1 \in \{\mathbb{C}\}$, $\mathcal{H}_X \sim -aK_X$, $\sigma: Z = X_1 \rightarrow X$ – раздутие точки $x \in X$ степени $d = \deg x$ и кратности $r(x)$ в линейной системе $\mathcal{H}_X$, $\mathcal{H}_{X_1} \sim -a_1K_{X_1} + b_1f_1 = -a\sigma^*K_X - r(x)E$, где E – исключительная кривая для σ , f_1 – класс геометрического слоя структурного морфизма расслоения на коники $\varphi_1: X_1 \rightarrow C_1$ (геометрические точки $\{x_i\} = x \otimes \bar{k}$ предполагаются всегда в общем положении). Тогда возможны только следующие случаи:

$$K_X^2 = 9:$$

а) $d = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $X_1 \simeq \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ – геометрически линейчатая поверхность,

$$f_1 \sim -\frac{1}{3}\sigma^*K_X - E = -\frac{1}{3}K_{X_1} - \frac{2}{3}E;$$

$$a_1 = \frac{3a - r(x)}{2}, \quad b_1 = \frac{3(r(x) - a)}{2};$$

б) $d = 4$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $\varphi_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники, $K_{X_1}^2 = 5$, $f_1 \sim -\frac{2}{3}\sigma^*K_X - E = -\frac{2}{3}K_{X_1} - \frac{1}{3}E$;

$$a_1 = 3a - 2r(x), \quad b_1 = 3(r(x) - a);$$

$$K_X^2 = 8:$$

а) $d = 2$, $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ – квадрика с $\text{Pic } Q \simeq \mathbb{Z}$, $\varphi_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники, $K_{X_1}^2 = 6$, $f_1 \sim -\frac{1}{2}\sigma^*K_X - E = -\frac{1}{2}K_{X_1} - \frac{1}{2}E$;

$$a_1 = 2a - r(x), \quad b_1 = 2(r(x) - a);$$

б) $d = 2$, $X \not\simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, $\varphi_1: X_1 \rightarrow C$ – расслоение на коники, $C(k) = \emptyset$, если взять $f_1 = \varphi_1^{-1}(t)$, $t \in C$, $\deg t = 2$, то $f_1 \sim -\sigma^*K_X - 2E = -K_{X_1} - E$;

$$a_1 = 2a - r(x), \quad b_1 = r(x) - a,$$

здесь b_1 – коэффициент при f_1 , а не при геометрическом слое;

$K_X^2 = 4$: $d = 1$, $X \subset \mathbb{P}^4$ – полное пересечение двух квадрик $\varphi_1: X_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ – расслоение на коники, $X_1 \subset \mathbb{P}^3$ – кубическая поверхность с прямой E , определенной над k ;

$$K_{X_1}^2 = 3, \quad f_1 \sim -\sigma^*K_X - 2E = -K_{X_1} - E, \\ a_1 = 2a - r(x), \quad b_1 = r(x) - a.$$

(ii) Линки типа II. Здесь различаются два случая: $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$. Пусть $\sigma: Z \rightarrow X$ – раздутие точки $x \in X$, $\deg x = d$, $E = \sigma^{-1}(x)$ – исключительный дивизор, $r(x)$ – кратность x в $\mathcal{H}_X$; $\sigma_1: Z \rightarrow X$ – стягивание исключительного дивизора $E_1 \subset Z$ в точку $x_1 \in X_1$, $\deg x_1 = d_1$, $r(x_1)$ – кратность точки x_1 в линейной системе $\mathcal{H}_{X_1}$ (геометрические точки $\{\bar{x}_i\} = x \otimes \bar{k}$ находятся в общем положении на $\bar{X} = X \otimes \bar{k}$).

Случай $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$. Здесь $\mathcal{H}_Z \sim -a\sigma^*K_X - r(x)E = -a_1\sigma_1^*K_{X_1} - r(x_1)E$. Тогда имеются только следующие возможности для линков типа II.

$$K_X^2 = 9:$$

а) $d = d' = 8$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$. В терминах п. 1.4 линк Φ_1^{-1} действует следующим образом:

$$\begin{aligned} -K_X &\rightarrow -17K_{X_1} - 18x_1, \\ x &\rightarrow -16K_{X_1} - 17x_1, \end{aligned}$$

так что матрица преобразования в базисе $(-K_{X_1}, x_1)$ имеет вид

$$M_{9,8} = \begin{pmatrix} 17 & 16 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 17a - 16r(x), \\ r(x_1) &= 18a - 17r(x). \end{aligned}$$

Отметим, что обратное преобразование имеет тот же вид, т.е. $M_8^2 = 1$, более того, с точностью до проективного преобразования $\mathbb{P}^2$ этот линк является бирациональной инволюцией (называемой инволюцией Бертини, см. [24]).

b) $d = d_1 = 7$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$,

$$M_{9,7} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 8a - 7r(x), \\ r(x_1) &= 9a - 8r(x). \end{aligned}$$

С точностью до проективного преобразования этот линк также является бирациональной инволюцией (Гейзера), в частности, $M_7^2 = 1$.

c) $d = d_1 = 6$, $K_{X_1}^2 = K_X^2 = 9$,

$$M_{9,6} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 5a - 4r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

В общем случае это преобразование не является бирациональной инволюцией, хотя обратное преобразование имеет тот же вид, т.е. $M_6^2 = 1$.

d) $d = 5$, $d_1 = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^2$, $K_{X_1}^2 = 5$,

$$M_{9,5} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

e) $d = d_1 = 3$, $K_{X_1}^2 = K_X^2 = 9$,

$$M_{9,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

Если $X \simeq \mathbb{P}^2$ (т.е. X обладает k -точкой), то с точностью до проективного преобразования $\mathbb{P}^2$ этот линк является бирациональной инволюцией (называемой стандартным квадратичным преобразованием).

f) $d = 2$, $d_1 = 1$, $X \simeq \mathbb{P}^3$, $X_1 = Q \subset \mathbb{P}^2$ – квадратика с $\rho(Q) = 1$, $K_{X_1}^2 = 8$;

$$M_{9,2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

$K_X^2 = 8$:

a) $d = d_1 = 7$, $X_1 \simeq X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ – квадратика с $\rho(Q) = 1$,

$$M_{8,7} = \begin{pmatrix} 15 & 14 \\ -16 & -15 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 15a - 14r(x), \\ r(x_1) &= 16a - 15r(x). \end{aligned}$$

С точностью до автоморфизма, это бирациональная инволюция на X – вариант инволюции Бертини для квадратика $Q \subset \mathbb{P}^3$.

b) $d = d_1 = 6$, $X_1 \simeq X$ — *квадрика* в $\mathbb{P}^3$,

$$M_{8,6} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 7a - 6r(x), \\ r(x_1) &= 8a - 7r(x). \end{aligned}$$

Как в предыдущем случае, это бирациональная инволюция Гейзера на квадрике в $\mathbb{P}^3$.

c) $d = 5$, $d_1 = 2$, $K_{X_1}^2 = 5$;

$$M_{8,5} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 4a - 3r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

d) $d = 4$, $d_1 = 4$, $K_{X_1}^2 = 8$;

$$M_{8,4} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

e) $d = 3$, $d_1 = 1$, $K_{X_1}^2 = 6$;

$$M_{8,3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

f) $d = 1$, $d_1 = 2$, $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$;

$$M_{8,1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Этот линк является обратным к линку $M_{9,2}$ (случай $K_X^2 = 9$, f), $d = 2$).

$K_X^2 = 6$:

a) $d = d_1 = 5$, $X_1 \simeq X$,

$$M_{6,5} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -12 & -11 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 11a - 10r(x), \\ r(x_1) &= 12a - 11r(x). \end{aligned}$$

Это вариант бирациональной инволюции Бертини на поверхности Дель Пеццо степени 6.

b) $d = d_1 = 4$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{6,4} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 5a - 4r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

Это вариант бирациональной инволюции Гейзера на поверхности Дель Пеццо степени 6.

с) $d = d_1 = 3$, $K_{X_1}^2 = 6$;

$$M_{6,3} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

В общем случае этот линк не является бирациональной инволюцией.

д) $d = d_1 = 2$, $K_{X_1}^2 = 6$;

$$M_{6,2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

В общем случае этот линк также не является бирациональной инволюцией.

е) $d = 1$, $d_1 = 3$, $X_1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрака;

$$M_{6,1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Этот линк обратен линку $M_{8,3}$ (случай $K_X^2 = 8$, d), $d = 3$).

$K_X^2 = 5$:

а) $d = d_1 = 4$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{5,4} = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -10 & -9 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 9a - 8r(x), \\ r(x_1) &= 10a - 9r(x). \end{aligned}$$

Это бирациональная инволюция Бертини на поверхности Дель Пеццо степени 5.

б) $d = d_1 = 3$, $X_1 \simeq X$;

$$M_{5,3} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 4a - 3r(x), \\ r(x_1) &= 5a - 4r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Гейзера на поверхности Дель Пеццо степени 5.

с) $d = 2$, $d_1 = 5$, $X_1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрака;

$$M_{5,2} = \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{2}a - \frac{3}{2}r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

Этот линк обратен линку $M_{8,5}$ (случай $K_X^2 = 8$, с), $d = 5$).

д) $d = 1$, $d_1 = 5$, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$;

$$M_{5,1} = \begin{pmatrix} 5/3 & 2/3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{5}{3}a - \frac{2}{3}r(x), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Этот линк обратен линку $M_{9,5}$ (случай $K_X^2 = 9$, d), $d = 5$).

$$K_X^2 = 4:$$

$$\text{a) } d = d_1 = 3, X_1 \simeq X;$$

$$M_{4,3} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 7a - 6r(x), \\ r(x_1) &= 8a - 7r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Бертини, действующая на поверхности Дель Пеццо степени 4.

$$\text{b) } d = d_1 = 2, X_1 \simeq X;$$

$$M_{4,2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Гейзера, действующая на X .

$$K_X^2 = 3:$$

$$\text{a) } d = d_1 = 2; X_1 \simeq X;$$

$$M_{3,2} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 5a - 4r(x), \\ r(x_1) &= 6a - 5r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Бертини на кубической поверхности.

$$\text{b) } d = d_1 = 1, X_1 \simeq X;$$

$$M_{3,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 2a - r(x), \\ r(x_1) &= 3a - 2r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Гейзера на X .

$$K_X^2 = 2:$$

$$\text{a) } d = d_1 = 1; X_1 \simeq X;$$

$$M_{2,1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= 3a - 2r(x), \\ r(x_1) &= 4a - 3r(x). \end{aligned}$$

Это инволюция Бертини на поверхности Дель Пеццо степени 2.

Случай $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$. Здесь $\mathcal{H}_Z \sim -a\sigma^*K_X + b\sigma^*f - r(x)E = -a_1\sigma_1^*K_{X_1} + b_1f_1 - r(x_1)E_1$. Имеются только следующие возможности.

$K_X^2 \leq 8$ (это наиболее общий случай): пусть $\pi: X \rightarrow C$, $\pi_1: X_1 \rightarrow C_1$ — структурные морфизмы, $x \in X$ — замкнутая точка степени $d = \deg x$, не лежащая на вырожденных слоях морфизма π , $X_x = \pi^{-1}(\pi(x))$ — соответствующий слой. Предположим, что каждый геометрический слой $\bar{X}_i \subset X_x \otimes \bar{k}$ содержит только одну из геометрических точек $\bar{x}_i \in x \otimes \bar{k}$. Тогда линк $\Phi_1 = \sigma_{x_1} \circ \sigma_x^{-1}$ состоит из раздутия точки x и последующего стягивания собственного прообраза на Z слоя X_x . Этот линк мы называем элементарным преобразованием с центром в точке x (вдоль морфизма $\pi: X \rightarrow C$) и обозначаем через ε_x . Преобразование ε_x^{-1} действует следующим образом:

$$\begin{aligned} -K_X &\rightarrow -K_{X_1} + df_1 - 2x_1, \\ f &\rightarrow f_1, \\ x &\rightarrow df_1 - x_1, \end{aligned}$$

т.е. в базисе $(-K_X, f, x)$ задается матрицей:

$$(2.6.5) \quad E_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & d \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} a_1 &= a, \\ b_1 &= b + d(a - r(x)), \\ r(x_1) &= 2a - r(x). \end{aligned}$$

Обратное преобразование имеет тот же вид, т.е. $E_x^2 = 1$.

(iii) Линки типа III. Конструкция таких линков обратна конструкции линков типа I. Здесь $X \in \{\mathbb{C}\}$, $X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf$, $\sigma: X \rightarrow X_1$ — стягивание неприводимого исключительного дивизора E в неособую точку $x_1 \in X_1$ степени $d_1 = \deg x_1$, $\mathcal{H}_{X_1} \sim -a_1K_{X_1}$.

$K_{X_1}^2 = 9$:

а) $d_1 = 1$, $X \simeq \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}^2 = X_1$ — стягивание исключительного сечения. Линк действует следующим образом:

$$\begin{aligned} -K_X &\rightarrow -K_{X_1} - x_1, & a_1 &= a + \frac{1}{3}b, \\ f &\rightarrow -\frac{1}{3}K_{X_1} - x_1, & r(x_1) &= a + b; \end{aligned}$$

б) $d_1 = 4$, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на коники, $K_X^2 = 5$, $-K_X$ обилён, $X_1 \simeq \mathbb{P}^2$, $\sigma: X \rightarrow X_1 = \mathbb{P}^2$ — стягивание четверки попарно непересекающихся (-1) -кривых $E \sim -2K_X - 3f$. Линк действует по формулам:

$$\begin{aligned} -K_X &\rightarrow -K_{X_1} - x_1, & a_1 &= a + \frac{2}{3}b, \\ f &\rightarrow -\frac{2}{3}K_{X_1} - x_1, & r(x_1) &= a + b. \end{aligned}$$

$K_{X_1}^2 = 8$:

$d_1 = 2$, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на коники, $K_X^2 = 6$, $-K_X$ обилён, $\sigma: X \rightarrow X_1 = Q \subset \mathbb{P}^3$ — стягивание пары непересекающихся сопряжённых (-1) -кривых $E \sim -K_X - 2f$. Этот линк действует по формулам:

$$\begin{aligned} -K_X &\rightarrow -K_{X_1} - x_1, & a_1 &= a + \frac{1}{2}b, \\ f &\rightarrow -\frac{1}{2}K_{X_1} - x_1, & r(x_1) &= a + b. \end{aligned}$$

$K_{X_1}^2 = 4$:

$d_1 = 1$, $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ — расслоение на коники, $-K_X^2 = 3$, $\sigma: X \rightarrow X_1$ — стягивание (-1) -кривой $E \sim -K_X - f$. Линк действует по формулам:

$$\begin{aligned} -K_X &\rightarrow -K_{X_1} - x_1, & a_1 &= a + b, \\ f &\rightarrow -K_{X_1} - 2x_1, & r(x_1) &= a + 2b. \end{aligned}$$

(iv) Линки типа IV. Здесь $X = X_1 \in \{C\}$ и линк состоит в переходе от одной структуры расслоения на коники к другой, $\mathcal{H}_X \sim -aK_X + bf = -a_1K_X + b_1f_1$, $-K_X$ обилен и имеются только следующие возможности:

$$K_X^2 = 8:$$

$X = C \times C_1 = X_1$, где C, C_1 — гладкие кривые рода нуль, $\varphi = \text{pr}_1: X \rightarrow C$, $\varphi_1: \text{pr}_2: X_1 = X \rightarrow C_1$ — проекции на соответствующие множители. Линк действует следующим образом:

$$\begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1}, & a_1 &= a + \frac{1}{2}b, \\ f &\sim -\frac{1}{2}K_{X_1} - f_1, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

Если $C \simeq C_1$, то этот линк представлен автоморфизмом (инволюцией) $\tau: C \times C_1 \rightarrow C_1 \times C$ перестановки множителей. Инволюция τ переставляет две структуры расслоения.

$$K_X^2 = 4:$$

$\varphi: X \rightarrow C, \varphi_1: X_1 = X \rightarrow C_1$ — расслоения на коники:

$$\begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1}, & a_1 &= a + b, \\ f &\sim -K_{X_1} - f, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

В некоторых случаях этот линк также представлен (бирегулярной) инволюцией, переставляющей структуры расслоений, например, над $\mathbb{R}$. В общем случае, однако, это не так (см. [3]).

$$K_X^2 = 2:$$

$X_1 = X, C_1 = C, \varphi: X \rightarrow C, \varphi_1: X_1 = X \rightarrow C_1$ — расслоения на коники. Линк представлен (бирегулярной) инволюцией Гейзера $\gamma: X \rightarrow X$, действующей по формулам:

$$\gamma: \begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1}, & a_1 &= a + 2b, \\ f &\rightarrow -2K_{X_1} - f_1, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

$$K_X^2 = 1:$$

$X_1 = X, C = C_1 = \mathbb{P}^1, \varphi: X \rightarrow C, \varphi_1: X_1 = X \rightarrow C_1$ — расслоения на коники. Линк представлен инволюцией Бертини $\beta: X \rightarrow X$, действующей по формулам:

$$\beta: \begin{aligned} -K_X &= -K_{X_1} = -K_X, & a_1 &= a + 4b, \\ f &\rightarrow -4K_{X_1} - f_1, & b_1 &= -b. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ограничимся краткими указаниями, так как все эти результаты известны и опубликованы в цикле статей [2]–[18]. Предположение об общности положения геометрических точек $\{\bar{x}_i\} = x \otimes \bar{k}$ на $\bar{X} = X \otimes \bar{k}$, $x \in X, X \in \{\mathbb{D}\}$, означает всюду, что на раздутии $\sigma: Z \rightarrow X$ точки x антиканонический класс $-K_Z$ обилен. По определению линков типа (I)–(III) в этой ситуации на Z существуют два

экстремальных луча и $\rho(Z) = 2$, так что $-K_Z$ обилён по численному критерию Клеймана. Именно такие линки используются в доказательстве теоремы 2.5 (см. комментарий 2 в конце доказательства).

(i) Каждый линк типа I определяется раздутием $\sigma: X_1 \rightarrow X$ замкнутой точки $x \in X$, $X \in \{\mathbb{D}\}$, так, чтобы $X_1 \in \{\mathbb{C}\}$, т.е. на X_1 существует структура расслоения на коники $\varphi_1: X_1 \rightarrow C_1$ со слоем f_1 . В терминах п. 1.4 собственный образ на X пучка $|f_1|$ имеет вид

$$-\lambda K_X - \mu x, \quad \mu \in \mathbb{Z}, \quad \mu > 0, \quad \lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}, \quad \lambda > 0.$$

Соотношения (1.3.2) здесь принимают вид

$$(2.6.1) \quad \begin{aligned} \lambda^2 K_X^2 - \mu^2 d &= 0, \\ \lambda K_X^2 - \mu d &= 2, \end{aligned}$$

где $d = \deg x$. Так как K_X^2 принимает только 8 значений $1, 2, \dots, 6, 8, 9$ и $\mu/\lambda = \sqrt{K_X^2/d}$ — рациональное число, то элементарные вычисления показывают, что решениями уравнений (2.6.1) являются только те, что указаны в 2.6 (i) и все они, очевидно, реализуются. Формулы преобразования численных характеристик — стандартные следствия пересечений для раздутия неособой точки на гладкой поверхности.

(ii) В случае $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$ пусть $\lambda, \lambda_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $\mu, \mu_1 \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1 > 0$, таковы, что собственный образ линейной системы $|-K_{X_1}|$ на X и собственный образ линейной системы $|-K_X|$ на X_1 имеют вид

$$\begin{aligned} -K_{X_1} &\rightarrow -\lambda K_X - \mu x, \\ -K_X &\rightarrow -\lambda_1 K_{X_1} - \mu_1 x_1. \end{aligned}$$

Из (1.3.2) получаем следующие системы равенств:

$$(2.6.2) \quad \begin{cases} K_{X_1}^2 = \lambda^2 K_X^2 - \mu^2 d, \\ K_{X_1}^2 = \lambda K_X^2 - \mu^2 d, \\ K_X^2 = \lambda_1^2 K_{X_1}^2 - \mu_1^2 d_1, \\ K_X^2 = \lambda_1 K_{X_1}^2 - \mu_1 d_1. \end{cases}$$

Так как Φ_1 не является изоморфизмом, то по лемме Нётера 2.4 имеем: $\lambda > 1$, $\lambda_1 > 1$, $\mu > \lambda$, $\mu_1 > \lambda_1$. Отсюда по (1.5.4) $d < K_X^2 - \frac{1}{\lambda^2} K_{X_1}^2$, $d_1 < K_{X_1}^2 - \frac{1}{\lambda_1^2} K_X^2$, т.е. d, d_1 могут принимать только целые значения из множества $\{1, 2, \dots, 8\}$. Поскольку $K_X^2, K_{X_1}^2$ тоже целые из множества $\{1, 2, \dots, 6, 8, 9\}$, μ, μ_1 — целые положительные, то при указанных выше ограничениях на $\lambda, \lambda_1, \mu, \mu_1$ непосредственно проверяем, что системы (2.6.2) не имеют других решений, кроме указанных в формулировке теоремы.

Для доказательства существования линков с заданными численными характеристиками — решениями систем (2.6.2) — достаточно указать на раздутии $\sigma: Z \rightarrow X$ точки $x \in X$ другой, отличный от E , экстремальный луч E_1 . Для этого используется теория пересечения на неособой поверхности Z с обильным $-K_Z$, включая теорему

Римана–Роха. Например, рассмотрим случай $K_X^2 = 9$: с) $d = 6$. Из (2.6.2) при требуемых ограничениях находим единственное решение: $K_{X_1}^2 = 9, \lambda = \lambda_1 = 5, \mu = \mu_1 = 6, d_1 = 6$. Отсюда для линка

$$\begin{array}{ccc} Z & = & Z \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ X & & X_1 \end{array}$$

находим $K_Z = \sigma^* K_X + E = \sigma_1^* K_{X_1} + E_1$. Тогда $E_1 \sim -uK_Z - vE$ для некоторых u, v с $u \geq 0$ и должна быть шестеркой попарно непересекающихся сопряженных над k (-1) -кривых. Имеем:

$$-K_Z E_1 = 6 = 3u - 6v, \quad E_1^2 = -6 = 3u^2 - 12uv - 6v^2.$$

Решая эту систему, находим $u = 4, v = 1$, т.е. $E_1 \sim -4K_Z - E, E \sim -4K_Z - E_1$. По теореме Римана–Роха

$$h^0(\mathcal{O}_Z(E_1)) \geq \frac{E_1(E_1 - K_Z)}{2} + 1 = 1,$$

т.е. требуемая кривая E_1 существует (т.е. дивизор E_1 эффективен) и неприводима над k , так как является одной из образующих группы $\text{Pic}_k Z$.

Аналогично рассматриваются случаи $K_X^2 = 9$: d)–f); $K_X^2 = 8$: с)–e); $K_X^2 = 6$: с)–e); $K_X^2 = 5$: с), d).

В остальных случаях существование другого экстремального луча E_1 на Z можно доказать, используя инволюции Бертини и Гейзера. Напомним их определения.

Инволюция Бертини действует бигулярно на поверхности Дель Пеццо Y степени $K_Y^2 = 1$. Здесь линейная система $|-2K_Y|$ задает двулистное накрытие $\varphi_{-2K_Y}: Y \rightarrow Q^* \subset \mathbb{P}^3$ квадратичного конуса Q^* в $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в дивизоре $D \subset Q^*$, высекаемом кубикой, не проходящей через вершину конуса. Тогда инволюция Бертини $\beta: Y \rightarrow Y$ — это по определению инволюция этого двойного накрытия. Если $E \subset Y$ — (-1) -кривая, то $E' = \beta(E) \sim -2K_Y - E$. Отсюда легко определить действие β на группе циклов $Z^*(X)$ для любой рациональной поверхности X с фиксированным бирациональным изоморфизмом $g: X \dashrightarrow Y$.

Аналогично, инволюция Гейзера действует бигулярно на поверхности Дель Пеццо Y степени $K_Y^2 = 2$. Здесь линейная система $|-K_Y|$ задает двулистное накрытие $\varphi_{-K_Y}: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$. Инволюция Гейзера — это инволюция $\gamma: Y \rightarrow Y$ этого двойного накрытия. Если $E \subset Y$ — (-1) -кривая, то $E' = \gamma(E) \sim -K_Y - E$. Отсюда, как и в предыдущем случае, определяется действие на $Z^*(X)$ для любой рациональной поверхности X с бирациональным отображением $X \dashrightarrow Y$.

Таким образом, во всех остальных случаях 2.6 (ii), случай $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, элементарные линки это просто бирациональные действия инволюций Бертини и Гейзера на соответствующих поверхностях.

В относительном случае $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$ линк является преобразованием над базой S

$$\begin{array}{c} X \xrightarrow{\Phi_1} X_1 \\ \searrow S \swarrow \end{array}$$

На раздутии $\sigma: Z \rightarrow X$ точки $x \in X$ антиканонический класс $-K_X$ должен быть относительно обилен, поскольку по конструкции линка на $Z \rightarrow S$ должны существовать два относительных экстремальных луча. Этим объясняются условия общности для геометрических точек $\{\bar{x}_i\} = x \otimes \bar{k}$, указанные в формулировке теоремы.

(iii) Как уже отмечалось, конструкция линков типа III обратна конструкции линков типа I. Следует отметить только, что на любой поверхности $X \in \{\mathbb{C}\}$ степени $K_X^2 = 3, 5$ и 6 антиканонический дивизор $-K_X$ обилен. Так как $\rho(X) = 2$, то достаточно показать, что на X существует другой отличный от f экстремальный луч E . Если $K_X^2 = 3$, то $E \sim -K_X - f$. Действительно, $E^2 = -1$, $-K_X E = K_X^2 - K_X f = -1$, $h^0(\mathcal{O}_X(E)) \geq 1$, E неприводимо, поскольку $(-K_X - bf)^2 = 3 - 4b$ и $p_a(-K_X - bf) = 1 - b < 0$ при $b \geq 2$. Кроме того, так как $3 = K_X^3 = 8 - \sum \deg t_i$, где $\{t_i\} \subset C$ — множество точек вырождения структурного морфизма, то дивизор $\sum \deg t_i$ на C определен над k и имеет нечетную степень. Следовательно, на C существует k -точка и $C \simeq \mathbb{P}^1$. Отсюда слой f , а вместе с ним и E , определены над k .

Аналогично рассматриваются случаи $K_X^2 = 5$ и 6 . В случае $K_X^2 = 5$ $E \sim -2K_X - 3f$ состоит из четырех сопряженных непересекающихся (-1) -кривых, а в случае $K_X^2 = 6$ $E \sim -K_X - 2f$ есть пара сопряженных непересекающихся (-1) -кривых. В последнем случае кривая C может не иметь k -точек.

(iv) Вычисления этих линков элементарны: в случаях $K_X^2 = 1$ и 2 — это инволюции Бертини и Гейзера, соответственно; в случае $K_X^2 = 4$ — вторая структура расслоения на коники высекается пучком плоскостей в $\mathbb{P}^4 \supset X$, проходящих через один из слоев f структурного морфизма $\pi: X \rightarrow C$. При этом C и C' одновременно имеют или не имеют k -точки. Доказательство теоремы 2.6 закончено.

Отметим, что из определения линков и доказательства теоремы 2.6 видно, что для каждого линка Φ_1 обратное отображение Φ_1^{-1} также является линком, при этом, если Φ_1 — линк типа I, то Φ_1^{-1} — линк типа III, и наоборот, если Φ_1 — линк типа II или IV, то и Φ_1^{-1} — линк, соответственно, типа II или IV.

§ 3. Соотношения между элементарными линками: определения и общие свойства

3.1. По теореме 2.5 любое бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$, $X, X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, над совершенным полем k раскладывается в композицию $\chi = \Phi_n \circ \dots \circ \Phi_1$ элементарных линков типа I–IV. В теореме 2.6 дана полная классификация всех таких линков. Здесь мы начинаем обсуждение вопроса о степени однозначности разложения χ на элементарные составляющие. Прежде всего отметим, что по определению каждый элементарный линк в диаграмме (2.5.1) определен с точностью до изоморфизмов X и X_1 , сохраняющих структуры, т.е. k -изоморфизмов, если $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\}$, и k -изоморфизмов, сохраняющих соответствующие пучки коник, если $X, X_1 \in \{\mathbb{C}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведение элементарных линков $R = \Phi_n \cdots \Phi_2 \Phi_1$ называется *соотношением* (между линками) на X , если R имеет смысл как композиция бирацио-

нальных отображений Φ_i и бирациональное отображение $\Phi_n \circ \dots \circ \Phi_1 = 1$.

$$(3.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \dashrightarrow & X_1 & \dashrightarrow & X_2 & \dashrightarrow & \dots \dashrightarrow X_n \xlongequal{\quad} X' \\ \varphi \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_n \downarrow & & \varphi' \downarrow \\ S & & S_1 & & S_2 & & S_n & & S' \end{array}$$

является изоморфизмом $X \xrightarrow{\sim} X'$, сохраняющим структуры, т.е. индуцирующим изоморфизм $S \xrightarrow{\sim} S'$. Соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ называется *приведённым*, если $n > 2$ и $\Phi_{i+1} \circ \Phi_i \neq 1 \ \forall i = 1, \dots, n-1$.

Большинство из линков типа II и все линки типа IV (см. 2.6) удовлетворяют простейшему соотношению $\Phi^2 = 1$, хотя и не все из них представлены бирациональными инволюциями. Ясно, что соотношения возникают там, где процесс раскручивания (т.е. разложения в произведения элементарных линков) бирационального отображения не является однозначно определенным, например, когда соответствующая линейная система имеет несколько независимых максимальных особенностей одинаковой кратности и тем самым имеется произвол в выборе линков типа I или II (см. доказательство теоремы 2.5). Разумеется, это не единственная причина для возникновения соотношений.

По аналогии с разложением бирациональных отображений на элементарные линки мы хотим получить разложение всех соотношений между линками на элементарные соотношения. Поэтому нам предстоит классифицировать все элементарные соотношения и доказать соответствующие результаты о разложении. Для этого, прежде всего, нужно ввести численные характеристики соотношений и уточнить понятие разложения соотношений на элементарные.

Пусть $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ — соотношение. Рассматривая его как композицию бирациональных отображений (3.1.1), определим последовательность линейных систем $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{X_i}$ и их численные характеристики — степени $A_i = A_i(R, \mathcal{H}_X) = (a_i, r_i, m_i)$, $i = 0, \dots, n$, следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_X \sim \begin{cases} -aK_X, & \text{если } X \in \{\mathbb{D}\}, \\ -aK_X + bf, & \text{если } X \in \{\mathbb{C}\}, \end{cases}$$

— очень обильная линейная система на X ; $A_0 = A(X, \mathcal{H}_X) = (a_0, r_0, m_0)$ — степень $(\mathcal{H}_X, \varphi: X \rightarrow S)$, как в определении п. 2.4; $\mathcal{H}_i = \mathcal{H}_{X_i}$, $i = 1, \dots, n$, — собственный образ на X_i линейной системы $\mathcal{H}_0$ при бирациональном отображении $R(i) := \Phi_i \circ \Phi_{i-1} \circ \dots \circ \Phi_1$ ($\mathcal{H}_{X_i}$ является также собственным прообразом $\mathcal{H}_0$ при бирациональном отображении $R^{-1}(i): X_i \dashrightarrow X$); $A_i = A_i(\Phi, \mathcal{H}_X) = A(\Phi_i) = A(X_i, \mathcal{H}_i) = (a_i, r_i, m_i)$ — степень $(\mathcal{H}_i, \varphi_i: X_i \rightarrow S_i)$. Ясно, что $A_n = A_0 = (a, 0, 0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Высотой* $A(R) = A(R, \mathcal{H})$ соотношения R называется $\max\{A_i, i = 1, \dots, n\}$ в смысле лексикографического порядка, как в п. 2.4.

Для любого нетривиального соотношения R $A(R) > A_0 = A_n$.

Перечислим теперь некоторые из свойств соотношений:

(i) если $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ — соотношение на X , то $R = \Phi_1^{-1} \cdots \Phi_n^{-1}$ также является соотношением на X и $A(R^{-1}) = A(R)$ так же, как $\mathcal{H}_i$ на X_i , не меняется;

- (ii) если R и R' – соотношения на X , то RR' и $R'R$ – тоже соотношения на X , называемые произведениями R и R' , и $A(RR') = A(R'R) = \max(A(R), A(R'))$;
- (iii) для любого бирационального отображения $\chi: Y \dashrightarrow X$, $X, Y \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ и его разложения в композицию элементарных линков $\chi = \psi_m \cdots \psi_1$ выражение $\chi^{-1}R\chi = \psi_1^{-1} \cdots \psi_m^{-1} \Phi_n \cdots \Phi_1 \psi_m \cdots \psi_1$ является соотношением на Y ;
- (iv) если $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ – соотношение на X и $S = \psi_{im} \cdots \psi_{i1}$ – соотношение на X_i в диаграмме (3.1.1), то $R' = \Phi_n \cdots \Phi_{i+1} \psi_{im} \cdots \psi_{i1} \Phi_i \cdots \Phi_1$ – тоже соотношение на X , называемое расширением соотношения R при помощи S ;
- (v) если $R = \Phi_n \cdots \Phi_{i+m+1} \Phi_{i+m} \cdots \Phi_{i+1} \Phi_i \cdots \Phi_1$ – соотношение на X и $S = \Phi_{i+m} \cdots \Phi_{i+1}$ – соотношение на X_i (в частности, $X_i/S_i \simeq X_{i+m}/S_{i+m}$ – изоморфизм, сохраняющий структуры), то $R' = \Phi_n \cdots \Phi_{i+m+1} \Phi_i \cdots \Phi_1$ – тоже соотношение на X , называемое сокращением (или редукцией) R при помощи S .

Два соотношения, получаемые одно из другого с помощью процедур (ii)–(v), будем называть эквивалентными (указывая, в случае необходимости, способ установления эквивалентности).

КОММЕНТАРИЙ 3. Элементарные линки и соотношения между ними имеют следующую теоретико-групповую интерпретацию. Пусть $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ – минимальная рациональная поверхность над k , $K = k(X)$ – поле рациональных функций на X и $\{X_i\}_{i \in I} \subset \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ – семейство всех минимальных рациональных поверхностей над k , бирационально эквивалентных X . Выберем k -изоморфизмы $\theta_i: K_i = k(X_i) \xrightarrow{\sim} K = k(X)$, т.е. рассмотрим $\{X_i\}_{i \in I}$ как семейство k -минимальных моделей поля K над k . Тогда любое бирациональное отображение $\chi_{ij}: X_i \rightarrow X_j$ индуцирует изоморфизм полей $\hat{\chi}_{ij}: K_j \xrightarrow{\sim} K_i$ и автоморфизм поля K над k : $\theta_i \hat{\chi}_{ij} \theta_j^{-1}: K \xrightarrow{\sim} K$. При этих отображениях образы линков между $\{X_i\}_{i \in I}$ и групп автоморфизмов $\text{Aut}_R X_i$, $i \in I$, сохраняющих структуру $X_i \rightarrow S_i$, порождают в силу теоремы 2.5 группу $\text{Aut}_k K$. Соотношения между линками в такой интерпретации – это не что иное, как соотношения в групповом смысле между порождающими (образами линков) группы $\text{Aut}_k K$ с точностью до образов группы $\text{Aut}_k X_i$.

Наша цель – определить набор простейших соотношений, с помощью которых любое соотношение между линками может быть редуцировано к тривиальному. Прежде всего, всякое соотношение раскладывается в произведение специальных в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ высоты $A(R) > A_0$ называется *специальным*, если существует индекс s , называемый *вершиной* R , $1 \leq s < n$, такой, что для степеней $A_i = (a_i, r_i, m_i)$ выполняются следующие условия:

- 1) $A_{i-1} < A_i$, $1 \leq i \leq s-1$;
- 2) $A_{s-1} \leq A_s$;
- 3) $A_i > A_{i+1}$, $s < i < n$.

Если, кроме того, $A_{s-1} < A_s$, то R называется *очень специальным* (ср. [15], [14]).

3.2. ЛЕММА. Любое нетривиальное приведенное соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_i$ эквивалентно произведению специальных, высоты $\leq A(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть s_1 — наибольший индекс, $1 < s_1 < n$, для которых выполняются условия: $A_{i-1} < A_i$ для $1 < i < s_1$ и $A_{s_1-1} \leq A_{s_1}$. Рассмотрим бирациональное отображение $R(s_1) = \Phi_{s_1} \Phi_{s_1-1} \cdots \Phi_1$. Для отображения $R(s_1)^{-1}: X_{s_1} \dashrightarrow X$ пусть $\psi = \psi_m \cdots \psi_n$ — композиция линков, раскручивающих отображение $R(s_1)^{-1}$, как в теореме 2.5, т.е. $\psi_m \cdots \psi_1 \Phi_{s_1} \cdots \Phi_1$ — изоморфизм (обратный к $R(s_1)^{-1} \psi^{-1}$), сохраняющий структуру над S . Стало быть, это — некоторое соотношение между линками, причем приведенное и специальное, высоты $\leq A(R)$. Действительно, часть $\Phi_{s_1} \cdots \Phi_1$ является приведенной как часть приведенного соотношения R , а часть $\psi_m \cdots \psi_1$ приведена, поскольку раскручивание по теореме 2.5 понижает степень на каждом шаге. Осталось проверить, что $\psi_1 \neq \Phi_{s_1-1}^{-1}$. Так как ψ_1 уменьшает степень, то в случае $A_{s_1} = A_{s_1-1}$, очевидно, линк $\Phi_{s_1-1}^{-1}$ не равен ψ_1 , так как сохраняет степень, и в случае $A_{s_1} > A_{s_1-1}$ по выбору индекса s_1 должно быть $A_{s_1+1} < A_{s_1}$. Тогда в процессе раскручивания отображения $R(s_1)^{-1}$ в качестве ψ_1 можно взять Φ_{s_1+1} и, поскольку по условию оно приведено, то $\psi_1 \neq \Phi_{s_1-1}^{-1}$. Расширим соотношение R при помощи $\psi_1^{-1} \cdots \psi_m^{-1} \psi_m \cdots \psi_1 = 1$ и положим $R_1 = \psi_m \cdots \psi_1 \Phi_{s_1} \cdots \Phi_1$, тогда от соотношения $\Phi_n \cdots \Phi_{s_1+1} \psi_1^{-1} \cdots \psi_m^{-1} R_1$, эквивалентного R , отщепляется множитель R_1 , являющийся специальным соотношением высоты $\leq A(R)$. Если оставшаяся часть соотношения $\Phi_n \cdots \Phi_{s_1+1} \psi_1^{-1} \cdots \psi_m^{-1}$ не является приведенной (это случается тогда и только тогда, когда $\Phi_{s_1+1} = \psi_1$), то после сокращения рядом стоящих взаимно обратных линков мы получим либо тривиальное, либо приведенное соотношение

$$(3.2.1) \quad \Phi_n \cdots \Phi_{s_1+r} \psi_r^{-1} \cdots \psi_m^{-1} = 1$$

для некоторого целого r , $0 \leq r \leq m$. В соотношении (3.2.1), если оно не тривиально, степень A_i обладает свойствами: $A(\psi_j^{-1}) = A(\psi_{j-1})$, $A(\psi_{j-1}^{-1}) > A(\psi_j^{-1})$, $j = r, \dots, m$, и можно считать, что $A(\Phi_{s_1+r}) \geq A(\psi_r^{-1}) = A(\psi_{r-1})$, в противном случае можно считать $\psi_r = \Phi_{s_1+r}$ и слово (3.2.1) не будет приведенным.

Теперь, как и выше, от соотношения можно отщепить множителем специальное соотношение R_2 высоты $\leq A(R)$, причем по предыдущим свойствам степени $s_2 > s_1 + r + 1$. Таким образом, продолжая этот процесс отщепления, через конечное число мы получим требуемое разложение в произведение специальных $R = R_m \cdots R_1$.

Далее для удобства вычислений мы несколько изменим определение степени $A(X, \mathcal{H}_X)$, данное в п. 4.2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. В обозначениях (2.3.5) *модифицированной степенью* $\hat{A}(X, \mathcal{H}_X)$, где

$$\mathcal{H}_X \sim \begin{cases} -aK_X, & \text{если } X \in \{\mathbb{D}\}, \\ -aK_X + bf, & \text{если } X \in \{\mathbb{C}\}, \end{cases}$$

есть собственный прообраз очень обильной линейной системы $\mathcal{H}'$ на X' , как в (2.3.4) при некотором бирациональном отображении $\chi: X \dashrightarrow X'$, будем называть пару чисел $(a, b) = \hat{A}(X, \mathcal{H}_X)$, где $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \cup \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $a > 0$, и по определению $b = 0$, если $X \in \{\mathbb{D}\}$. Отношение порядка определяется, как и для степени $A(X, \mathcal{H}_X)$, в п. 4.2 лексикографически.

Отметим, что b может принимать и отрицательные значения, но при фиксированном a ограничено снизу. Действительно, из (1.6.2) имеем неравенство $a^2 K_X^2 + 4ab > 0$. Отсюда $b > -\frac{1}{4}aK_X^2 \geq -2a$, так как $K_X^2 < 8$ и $a > 0$.

Связь между $A(X, \mathcal{H}_X)$ и $\hat{A}(X, \mathcal{H}_X)$ объясняет следующая

3.3. ЛЕММА. *Степени $A(X, \mathcal{H}_X)$ и $\hat{A}(X, \mathcal{H}_X)$ эквивалентны в том смысле, что для любого бирационального отображения $\Phi_1: X \dashrightarrow X_1$, $X, X_1 \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$,*

$$(3.3.1) \quad A(X_1, \mathcal{H}_{X_1}) \leq A(X, \mathcal{H}_X) \iff \hat{A}(X_1, \mathcal{H}_{X_1}) \leq \hat{A}(X, \mathcal{H}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2.5 достаточно установить (3.3.1) для любого элементарного линка Φ_1 типа I–IV. Это немедленно проверяется, исходя из определений и явных формул теоремы 2.6 действия линков на коэффициенты (a, b) . Проверим это, например, для линков типа I. В этом случае $X \in \{\mathbb{D}\}$, $X_1 \in \{\mathbb{C}\}$. Из формул 2.6 (i) имеем: $a_1 \leq a \iff r(x) \geq a \iff b_1 \geq 0$. Поэтому, если $\sigma: Z \rightarrow X$ – раздутие точки x кратности $r(x)$ в $\mathcal{H}_X$, то степени $A(X, \mathcal{H}_X)$ и $\hat{A}(X, \mathcal{H}_X)$ одновременно уменьшаются, равны или увеличиваются, если $r(x) > a$, $r(x) = a$ или $r(x) < a$, соответственно. Действительно, если $a_1 = a$, то $r(x) = a$, $b_1 = 0$ и $A(X, \mathcal{H}_X) = A(X_1, \mathcal{H}_{X_1})$, поскольку раздувается не максимальная особенность и, следовательно, число и кратности максимальных особенностей не меняются, что соответствует $\hat{A}(X, \mathcal{H}_X) = (a, 0) = (a_1, 0) = \hat{A}(X_1, \mathcal{H}_{X_1})$. Аналогично для линков типа II–IV. Доказательство леммы закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ввиду этого результата мы всюду можем заменить степень A на модифицированную степень $\hat{A}$, в частности, и в доказательстве теоремы 2.5, используя, правда, теорему о классификации линков 2.6.

Прежде чем перейти к описанию соотношений между линками, сформулируем еще одно общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\Phi_n \cdots \Phi_1$ – произведение линков, являющееся разложением некоторого бирационального отображения (т.е. имеет смысл как композиция отображений). Для $n \geq i > j \geq 1$ будем говорить, что линк Φ_i *сцеплен* с линком Φ_j и писать $\Phi_i[j]$, если Φ_i – линк типа I или II, Φ_j – линк типа III или II, образ $y_j \in X_j$ стягиваемого дивизора для линка Φ_i является раздуваемой точкой $x_{i-1} \in X_{i-1}$ для линка Φ_i , и все промежуточные линки $\Phi_{j+1}, \dots, \Phi_{i-1}$ и их последовательные произведения являются изоморфизмами в окрестностях точек y_i, x_{i-1} (ср. [14], [15]). Так что вместо $\Phi_n \cdots \Phi_i$ мы будем использовать запись $\Phi_n \cdots \Phi_{i+1} \Phi_i[j] \Phi_{i-1} \cdots \Phi_1$, если Φ_i сцеплено с Φ_j .

Теперь в качестве иллюстрации результатов о соотношениях между линками, излагаемых в следующих двух параграфах §§ 4, 5, рассмотрим частный классический случай кремоновых преобразований плоскости $\mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем.

Согласно теоремам 2.5 и 2.6 образующими в этом случае являются следующие линки.

Тип I. Это только $\sigma_x^{-1}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ – раздутие точки x .

Тип II. Это элементарные преобразования $\varepsilon_x: \mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n \pm 1}$ – раздутие точки x и стягивание собственного образа слоя, проходящего через x .

Тип III. Это стягивание исключительного сечения $\sigma_x: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ в точку $x \in \mathbb{P}^2$.

Тип IV. Это $\tau: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – инволюция перестановки множителей.

По теореме 2.5 любое кремоново преобразование $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ с точностью до линейного проективного преобразования раскладывается в композицию указанных линков. Выясним, насколько такое разложение неоднозначно.

3.4. ЛЕММА. *Следующие произведения линков являются соотношениями:*

- (i) $\Phi[1]\Phi$, $\Phi = \varepsilon_x$ или τ , $\Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1$, где $\Phi_1 = \varepsilon_x$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$, $x \in \mathbb{F}_n$, $y \in \mathbb{F}_{n \pm 1}$ – замкнутые точки линейчатых поверхностей, лежащие на разных слоях;
- (ii) $\Phi_5\Phi_4[2]\Phi_3\Phi_2\Phi_1$, где $\Phi_1 = \sigma_x^{-1}$, $x \in \mathbb{P}^2$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$, $y \in \mathbb{F}_1 \setminus E$, $E = \sigma_x^{-1}(x)$ – исключительный дивизор, $\Phi_3 = \tau$, $\Phi_4[2] = \varepsilon_{y'}$ – элементарное преобразование, где точка y' определяется по указанному правилу сцепления, $\Phi_5 = \sigma_x: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – стягивание исключительного сечения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (a, b) выбраны так, что линейная система $\mathcal{H}_X = |-aK_X + bf|$ на $X = \mathbb{F}_n$ очень обильна. Для доказательства (i) достаточно показать, используя формулы леммы 2.6, что указанные композиции линков переводят очень обильную линейную систему в себя. Проверка сводится к интегрированию формул преобразований степеней и кратностей с учетом правил сцепления. Пусть $(a, b; r_{d_1}, r_{d_2}, \dots)$ обозначает характеристику линейной системы $\mathcal{H}_X$ на X , где $(a, b) = \widehat{A}(\mathcal{H}_X)$ – модифицированная степень, $r_{d_i} = r(x_i)$ – кратности базисных точек x_i , $\deg x_i = d_i$, в $\mathcal{H}_X$. Пусть $\mathcal{H}_X = |-aK_X + bf|$ на X очень обильна. Проверим соотношение (i). Ясно, что $\Phi[1]\Phi = 1$. Далее,

$$\begin{aligned} (a, b; 0, 0, \dots) &\xrightarrow{\varepsilon_x} (a, a+b; r_1 = 2a, 0, \dots) \xrightarrow{\varepsilon_y} (a, 2a+b; r_1 = 2a, r_2 = 2a, 0, \dots) \\ &\xrightarrow{\Phi_3[1]} (a, a+b; 0, r_2 = 2a, 0, \dots) \xrightarrow{\Phi_4[2]} (a, b; 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Композиции указанных линков как бирациональных отображений определена, поскольку точки x и y лежат в разных слоях.

Аналогично в случае (ii). Композиция линков определена, поскольку точка y не лежит на исключительном сечении $E \subset \mathbb{F}_1$, и, следовательно, $\varepsilon_y: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Имеем:

$$\begin{aligned} (a, 0; 0, 0, \dots) &\xrightarrow{\sigma_x^{-1}} \left(\frac{3a}{2}, -\frac{3a}{2}; 0, 0\right) \xrightarrow{\varepsilon_y} \left(\frac{3a}{2}, 0; r_1 = 3a, 0, \dots\right) \\ &\xrightarrow{\tau} \left(\frac{3a}{2}, 0; 3a, 0, \dots\right) \xrightarrow{\varepsilon_{y'}} \left(\frac{3a}{2}, -\frac{3a}{2}; 0, 0, \dots\right) \xrightarrow{\sigma_x} (a, 0; 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Отметим, что соотношение (ii) является специальным, а соотношение (i) – очень специальным.

3.5. ТЕОРЕМА. *Любое соотношение $R = \Phi_n \cdots \Phi_1$ между элементарными линками в случае алгебраически замкнутого поля k с помощью соотношений (i) и (ii) из 3.4 редуцируется к тривиальному.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.2 можно предполагать, что соотношение R специальное и приведенное.

Пусть $\hat{A} = \hat{A}(R)$ – (модифицированная) высота соотношения R и s – его вершина. Доказательство будем проводить индукцией по высоте. По определению специального соотношения имеем:

$$(3.5.1) \quad (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s) = \hat{A}(R); \quad (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s).$$

Перебирая все возможные значения линков Φ_s, Φ_{s+1} и пользуясь подходящими соотношениями из леммы 3.4, мы редуцируем соотношение R либо к соотношению R' с $\hat{A}(R') < \hat{A}(R)$, либо к произведению $R' = R_2 R_1$, для которого выполняются следующие условия:

$$(3.5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A}(R') < \hat{A}(R), \\ \hat{A}(R_2) < \hat{A}(R), \\ \hat{A}(R_1) \leq A(R), \\ R_1 - \text{очень специально,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{если } R \text{ очень специально,} \\ \text{если } R \text{ специально, но не очень специально.} \end{array}$$

Отсюда по индукции немедленно будет следовать утверждение теоремы.

Эти соображения будут часто использоваться в дальнейшем при изучении соотношений.

Итак, предстоит рассмотреть несколько случаев для возможных значений Φ_s, Φ_{s+1} . При этом достаточно перебрать только примерно половину всевозможных значений, поскольку другая половина сводится к рассмотренной путем обращения R^{-1} соотношения R .

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0, \Phi_{s+1} = \tau$. Пользуясь соотношением 3.4 (ii) и первым из соотношений 3.4 (i), заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \sigma_{y'_s}: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ – стягивание исключительного сечения в точку $y'_s \in X'_s \simeq \mathbb{P}^2$, $\Phi'_{s+1} = \sigma_{x'_s}^{-1}: X'_s \rightarrow X'_{s+1} \simeq \mathbb{F}_1$ – раздутие точки $x'_s = \sigma_{y_s}(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $\Phi'_{s+2} = \varepsilon_{x'_{s+1}}: X'_{s+1} \dashrightarrow X'_{s+2} \simeq \mathbb{F}_0$ – элементарное преобразование с центром в точке $x'_{s+1} = \sigma_{x'_s}^{-1}(y'_s)$, $r(x'_{s+1}) = r(y'_s)$. В результате получим соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi'_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi'_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Оценим степень $\hat{A}(R')$. Для этого вычислим $\hat{A}(\Phi'_{s+i})$, $i = 0, 1, 2$. Из второго неравенства (3.5.1) имеем $b_s < 0$, так как $(a_{s+1}, b_{s+1}) = (a_s + \frac{1}{2}b_s, -b_s) < (a_s, b_s)$. Далее, первое неравенство (3.5.1) дает $0 > b_s \geq b_{s-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \hat{A}(\Phi'_s) &:= (a'_s, b'_s) = (a'_s, 0) = (a_{s-1} + \frac{1}{3}b_{s-1}, 0) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s) = \hat{A}(R), \\ r(y'_s) &= a_{s-1} + b_{s-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}(\Phi'_{s+1}) &:= (a'_{s+1}, b'_{s+1}) = \left(\frac{3a_s - r(x_{s-1})}{2}, \frac{3(r(x_{s-1}) - a'_s)}{2} \right) \\ &= \left(a_{s-1} + \frac{a_{s-1} + b_{s-1} - r(x_{s-1})}{2}, \frac{3(r(x_{s-1}) - a'_s)}{2} \right) \\ &< (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s) = \hat{A}(R), \end{aligned}$$

так как $b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_{s-1}) = b_s < 0$;

$$\begin{aligned}\widehat{A}(\Phi'_{s+2}) &:= (a'_{s+2}, b'_{s+2}) = (a'_{s+1}, b'_{s+1} + a'_{s+1} - r(y'_s)) \\ &= \left(a_{s-1} + \frac{b_s}{2}, -(b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_{s-1}))\right) \\ &= \left(a_s + \frac{b_s}{2}, -b_s\right) = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \\ &\leq (a_s, b_s) = \widehat{A}(R),\end{aligned}$$

так как $a_{s+1} = a_{s-1} + b_s/2 < a_{s-1}$.

Отметим, что $\widehat{A}(\Phi'_{s+2})$ можно было не вычислять, поскольку заранее ясно, что $\widehat{A}(\Phi'_{s+2}) = \widehat{A}_{s+1}$, ввиду равенства отображений $\Phi_{s+1}\Phi_s = \Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s$.

Из предыдущих вычислений получаем $\widehat{A}(R') = \widehat{A}_{s-1} \leq \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$. Если $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$, т.е. если соотношение R очень специально, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$ и шаг индукции по высоте осуществлен. Если $\widehat{A}_{s-1} = \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$, т.е. если R не очень специально, то, как и в доказательстве леммы 3.2, мы можем отщепить от R' в качестве множителя очень специальное соотношение R_1 с вершиной $s_1 = s - 1$ и представить R' в виде произведения $R_2 R_1$, как в (3.5.2), где $\widehat{A}(R_2) < \widehat{A}(R)$, а $\widehat{A}(R_1) = \widehat{A}(R)$, но R_1 уже очень специально и следующий шаг индукции уменьшает его высоту.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Имеем:

$$\begin{aligned}(a_s, b_s) &= (a_{s-1}, b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_{s-1})), \\ (a_{s+1}, b_{s+1}) &= (a_s, b_s + a_s - r(x_s)) = (a_{s-1}, b_{s-1} + 2a_{s-1} - r(x_{s-1}) - r(x_s)).\end{aligned}$$

Так как по условию $(a_s, b_s) \geq (a_{s-1}, b_{s-1})$, то $r(x_{s-1}) \leq a_{s-1}$, и

$$(a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s) \Rightarrow r(x_s) > a_s = a_{s-1} \geq r(x_{s-1}).$$

Отсюда точка x_s не может быть бесконечно близкой к точке x_{s-1} и по свойству п. 1.4 (iii) точки x_{s-1} , x_s лежат в слоях над различными точками базы $\mathbb{P}^1$ соответствующих линейчатых поверхностей X_{s-1} , X_s . Следовательно, мы можем воспользоваться соотношением (i) из 3.4, так что

$$R \sim \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi_{s+2}'^{-1} \Phi_{s+3}'^{-1} \Phi_{s+3}' [s+1] \Phi_{s+2}' [s] \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1,$$

где $\Phi_{s+3}' [s+1] \Phi_{s+2}' [s] \Phi_{s+1} \Phi_s$ на 1. В результате R эквивалентно

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi_{s+2}'^{-1} \Phi_{s+3}'^{-1} \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Оценим степень $\widehat{A}(R')$. Имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{A}(\Phi_{s+2}'^{-1}) &= \widehat{A}(\Phi_{s+1}) < \widehat{A}(\Phi_s) = \widehat{A}(R), \\ \widehat{A}(\Phi_{s+3}'^{-1}) &= \widehat{A}(\Phi_{s+2}') = (a_{s+1}, b_{s+1} + a_{s+1} - r(y_s)) = (a_s, b_s + r(x_{s-1}) - r(x_s)),\end{aligned}$$

где y_s — точка, в которую Φ_s стягивает исключительный дивизор, так что $r(y_s) = 2a_{s-1} - r(x_{s-1}) = 2a_s - r(x_{s-1})$. Так как $r(x_s) > r(x_{s-1})$, то

$\widehat{A}(\Phi'_{s+3}) = (a_s, b_s + r(x_{s-1}) - r(x_s)) < (a_s, b_s) = \widehat{A}(R)$. Отсюда $\widehat{A}(R') = \max(\widehat{A}(\Phi_{s+1}), \widehat{A}(\Phi'_{s+3}), \widehat{A}(\Phi_{s-1}))$. Если $\widehat{A}(\Phi_{s-1}) < \widehat{A}(\Phi_s) = \widehat{A}(R)$, т.е. соотношение R очень специально, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$ и шаг индукции по высоте осуществлен.

Далее как в предыдущем случае.

Случай $\Phi_s = \tau$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Здесь $X_{s-1} = X_s = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\Phi_{s-1} = \varepsilon_{x_{s-2}}: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_0$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}: \mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$. Этот случай аналогичен первому из рассмотренных выше, здесь также используется соотношение (ii) из 3.4. Соотношение R эквивалентно следующему:

$$\Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+2} \Phi'_{s+2} \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi'_{s-1} \Phi'_{s-2} \Phi'_{s-2} \Phi'_{s-1} \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1,$$

где $\Phi'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — стягивание исключительного сечения в точку $y'_{s+2} \in \mathbb{P}^2$, а $\Phi'_{s-1} \Phi'_{s-2}$ подобраны так, чтобы выполнялось соотношение

$$\Phi'_{s+2} \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi'_{s-1} \Phi'_{s-2} = 1.$$

Подставляя это в предыдущее соотношение, получаем

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+2} \Phi'_{s+2} \Phi'_{s-2} \Phi'_{s-1} \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Оценим $\widehat{A}(R')$. Имеем:

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\Phi'_{s+2}) &= \widehat{A}(\Phi_{s+1}) < \widehat{A}(R); \\ \widehat{A}(\Phi'_{s+2}) &= \widehat{A}(\Phi'_{s+2}) = (a_{s+1} + \tfrac{1}{3}b_{s+1}, 0) = (a_s + \tfrac{1}{3}(b_s + a_s - r(x_s))) < \widehat{A}(R), \end{aligned}$$

так как $a_s = r(x_s) < 0$, ввиду (3.5.1), $(a_s, b_s) > (a_{s+1}, b_{s+1}) = (a_s, b_s + a_s - r(x_s))$, и $b_s < 0$ ввиду (3.5.1), $(a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s) = (a_{s-1} + \tfrac{1}{2}b_{s-1}, -b_{s-1})$;

$$\widehat{A}(\Phi'_{s-1}) = \widehat{A}(\Phi'_{s-2}) = (a_{s-1}, b_{s-1} + a_{s-1} - r(x_s)) < \widehat{A}(\Phi_{s-1}).$$

Отсюда $\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}(\Phi_{s+1}), \widehat{A}(\Phi'_{s+2}), \widehat{A}(\Phi_{s-1})\}$. Если $\widehat{A}(\Phi_{s-1}) < \widehat{A}(\Phi_s) = \widehat{A}(R)$, из предыдущих вычислений $\widehat{A}(R') < \widehat{A}(R)$. Если же $\widehat{A}(\Phi_{s-1}) = \widehat{A}(\Phi_s)$, т.е. R не очень специально, то, поскольку $\widehat{A}(\Phi'_{s-1}) < \widehat{A}(\Phi_{s-1})$, соотношение R' можно представить в виде произведения $R_2 R_1$, как в предыдущих случаях со свойствами (3.5.2). Доказательство теоремы закончено.

КОММЕНТАРИЙ 4. Как отмечалось в комментарии 3, факторизацию бирациональных отображений в композиции линков и соотношения между линками можно трактовать в теоретико-групповых терминах образующих и соотношений в группе $\text{Bir } X$ бирациональных автоморфизмов на любой модели X поля рациональных функций $k(X)$. Так, например, рассмотренный выше случай алгебраически замкнутого поля $k = \bar{k}$ эквивалентен описанию двумерной группы Кремоны $\text{Cr}_2(\bar{k})$ в терминах образующих и соотношений. При этом, если в качестве исходной модели взять $X = \mathbb{P}^2$, то образующие линки типа I–IV можно представить в виде линейных и квадратичных преобразований $\mathbb{P}^2$ и преобразований Жонкьера (т.е. бирациональных преобразований $\mathbb{P}^2$, сохраняющих некоторый пучок прямых), которые также раскладываются в композицию

квадратичных. Это дает доказательство теоремы М. Нётера об образующих группы $\mathrm{Cr}_2(\bar{k})$ в варианте Кастельнуово (см., например, [7]). Теорема 3.5 о соотношениях в таком случае эквивалентна теореме Гизатулина [1] о соотношениях между квадратичными образующими (см. также [10]). Теорема 3.5 для $X = \mathbb{P}^2$ является частным случаем общего результата о соотношении в двумерной группе Крémonы $\mathrm{Cr}_2(k)$ над произвольным совершенным полем k (см. [15], а также § 5).

Если в качестве исходной модели взять $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то из теоремы о разложении на элементарные линки получаем в этом случае следующее описание группы $\mathrm{Bir} X$. Пусть $A = \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, тогда A представляется в виде полупрямого произведения

$$1 \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \bar{k}) \times \mathrm{PGL}(2, \bar{k}) \longrightarrow A \longrightarrow \{1, \tau\} \longrightarrow 1,$$

где $\tau: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ — инволюция перестановки множителей. Обозначим через B группу бирациональных преобразований $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, переводящих в себя один из пучков прямолинейных образующих. Тогда B представляется в виде расширения

$$1 \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \bar{k}(\mathbb{P}^1)) \longrightarrow B \longrightarrow \mathrm{PGL}(2, \bar{k}) \longrightarrow 1.$$

Группа B порождается подгруппой $\mathrm{PGL}(2, k) \times \mathrm{PGL}(2, k)$ и бирациональной инволюцией $\beta = \varepsilon_\infty \varepsilon_0$, являющейся композицией двух элементарных преобразований с центром в точках $0 = (0, 1) \times (0, 1)$ и $\infty = (1, 0) \times (1, 0)$ в биоднородных координатах $(u_0, u_1) \times (v_0, v_1)$ на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ с фиксированной проекцией $\mathbb{F}_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ на первый множитель. В этих координатах бирациональная инволюция β задается формулой

$$(u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \rightarrow (u_0, u_1) \times (u_0 v_1, u_1 v_0).$$

Если в качестве инволюции перестановки множителей выбрать $\tau: (u_0, u_1) \times (v_0, v_1) \rightarrow (v_1, v_0) \times (u_1, u_0)$, то элементарная проверка показывает, что выполняется следующее соотношение (эквивалентное 3.4 (ii)):

$$(3.5.3) \quad \beta \tau \beta \tau \beta \tau = 1.$$

Обозначим $A_0 = \mathrm{PGL}(2, \bar{k}) \times \mathrm{PGL}(2, \bar{k})$, тогда $A_0 \subset A$ и $A_0 \subset B$. Пусть $B \underset{A_0}{*} A$ — амальгомированное произведение групп A и B , объединенных по подгруппе A_0 . Тогда группа $\mathrm{Bir} X = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ в виде факторгруппы $B \underset{A_0}{*} A / \langle (\beta \tau)^3 \rangle$ по нормальной подгруппе, порожденной соотношением (3.5.3) (см. [9]).

Такая реализация двумерной группы Крémonы $\mathrm{Cr}_2(\bar{k})$ кажется наиболее подходящей для дальнейшего изучения ее структуры (например, вопроса о простоте) алгебраическими методами.

§ 4. Соотношения в случае отображений бirationально нетривиальных над k поверхностей

4.1. Результаты теоремы 1.6 показывают, что над произвольными достаточно общими совершенными полями k (например, $k = \mathbb{Q}$) могут существовать бирационально

жесткие классы k -минимальных поверхностей X , для которых всякое бирациональное отображение над k является изоморфизмом, в частности, $\text{Bir } X = \text{Aut } X$. Для отображений таких поверхностей нет никаких разложений на линки и, следовательно, нет и соотношений. Далее в этом параграфе мы увидим, что для всех классов поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, кроме указанных в теореме 1.6 (i) и (ii), существуют нетривиальные бирациональные отображения, т.е. такие поверхности уже не являются жесткими. Большинство из них (в смысле неограниченное число семейств) — это поверхности $X \in \{\mathbb{C}\}$, обладающие единственной структурой расслоения на коники. Согласно 1.6 (iii) к ним относятся все $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 \leq 0$, но в зависимости от основного поля k возможно существование таких $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$. Соответствующий пример был построен Скоробогатовым над полем из трех элементов с $K_X^2 = 4$. Для таких поверхностей разложения в композиции линков и соотношения очень просты.

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X обладает (бирационально) единственной структурой расслоения на коники в смысле определения § 1 (в частности, если $K_X^2 \leq 0$, как в 1.6 (iii)). Тогда любое бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$ раскладывается в композицию линков типа II, (т.е. элементарных преобразований), и все соотношения между этими линками порождаются соотношениями вида (как в 3.4 (i)):

$$(4.2.1) \quad \Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1,$$

где $\Phi_1 = \varepsilon_x$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$ — элементарные преобразования с центрами в замкнутых точках x, y , принадлежащих различным слоям структурных морфизмов $\pi: X \rightarrow C$; эти соотношения есть не что иное, как коммутатирование элементарных преобразований с независимыми центрами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.5 о разложении отображения χ в композицию элементарных линков и каждый из этих линков, являясь бирациональным отображением, сохраняет структуру расслоения на коники, т.е. согласно классификации линков 2.6 является элементарным преобразованием.

Утверждение о соотношении доказывается точно так же, как во втором случае доказательства теоремы 3.5. Доказательство закончено.

Теперь изучим отображения бирационально нетривиальных над k поверхностей из семейства $\{\mathbb{D}\}$. Напомним, что для таких поверхностей X имеем $K_X^2 = 1, 2, \dots, 6, 8, 9$. Поскольку жесткие поверхности нас уже не интересуют, то мы будем предполагать, что на X существует точка x с $\deg x < K_X^2$. Выясним, какие из поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$ бирационально тривиальны. Это, прежде всего, любая поверхность с $K_X^2 = 5$ над любым полем k . Для рациональности над k такой поверхности достаточно показать, что на ней существует k -точка, и тогда проекция из касательного пространства к этой точке является бирациональным изоморфизмом с $\mathbb{P}^2$. Существование точки было установлено геометрическими методами (общая проекция в $\mathbb{P}^3$) еще Энриквесом в конце прошлого века. Современные доказательства даны в [28], [29]. На такой поверхности $K_X^2 = 5$, а второй класс Чжэня $c_2 = 7$. Интересно, можно ли извлечь из этого наличие k -точки?

Далее, рациональной над k является всякая поверхность $X \in \{\mathbb{D}\}$ с $K_X^2 \leq 6$, обладающая точкой $x \in X$ степени $\deg x < K_X^2$ и взаимно простой с K_X^2 . Действительно,

в этом случае на X существует точка степени 1 и бирациональная k -тривиальность устанавливается элементарно [19]. Существование точки степени 1 в такой ситуации доказывается следующим образом. Через точку $x \in X$ можно провести гиперплоское сечение (X предполагается вложенной в $\mathbb{P}^d$), которое является кривой E рода 1. На E имеются точки взаимно простых степеней, значит, есть класс дивизоров над k степени 1. Теперь по теореме Римана–Роха в этом классе есть эффективный дивизор, т.е. k -точка.

4.3. Таким образом, остается рассмотреть только следующие случаи:

$K_X^2 = 2$, X обладает точкой степени 1;

$K_X^2 = 3$, X обладает точкой степени 1 или 2 (отметим, что если X имеет точку степени 2, то имеет также точку степени 1 и наоборот);

$K_X^2 = 4$, X обладает точкой $x \in X$ степени $\deg x < 4$;

$K_X^2 = 6$, X обладает точкой степени 2, 3 или 4 (отметим, что если X имеет точку степени 4, то имеет также точку степени 2 по соображениям, описанным выше);

$K_X^2 = 8$, X обладает точкой степени 2, 4 или 6 (опять, если X имеет точку степени 6, то имеет и точку степени 2);

$K_X^2 = 9$, X обладает точкой степени 3 или 6 (здесь опять из существования точки степени 6 следует существование точки степени 3).

Кроме того, в каждом случае, если на X существует одна точка $x \in X$ заданной степени $\deg x = d$, то существует полное по Зарисскому подмножество точек такой степени. Это следует из унирациональности, а в случае $K_X^2 \geq 6$ рациональности, таких поверхностей над полем вычетов $k(x) \supset k$ точки x (см., например, [19]).

Изучение бирациональных отображений перечисленных классов поверхностей начнем с наиболее простой ситуации.

4.4. ТЕОРЕМА [17], [4], [14]. Пусть X – поверхность из перечисленных выше одного из следующих типов:

$K_X^2 = 2$, X обладает точкой степени 1;

$K_X^2 = 4$, X обладает точкой степени 2, но не имеет точек степени 1 или 3;

$K_X^2 = 6$, X обладает точкой степени 3, но не имеет точек меньшей степени;

$K_X^2 = 8$, X обладает точкой степени 4, но не имеет точек меньшей степени.

Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда $X' \simeq X$ в случае $K_X^2 = 2$ и 4, $X' \in \{\mathbb{D}\}$ и $K_X^2 = 8$ в случае $K_X^2 = 8$. Отображение χ раскладывается в произведение следующих линков типа II:

$K_X^2 = 2$ – линки типа $M_{2,1}$, т.е. инволюции Бертини, связанные с точками степени 1, не лежащими на (-1) -кривых $\overline{X}$, см. теорему 2.6 (ii), случай $K_X^2 = 2$: а);

$K_X^2 = 4$ – линки типа $M_{4,2}$, см. 2.6 (ii), случай $K_X^2 = 4$: б);

$K_X^2 = 6$ – линки типа $M_{6,3}$, см. 2.6 (ii), случай $K_X^2 = 6$: в);

$K_X^2 = 8$ – линки типа $M_{8,4}$, см. 2.6 (ii), случай $K_X^2 = 8$: д).

Более того, во всех этих случаях такое разложение однозначно с точностью до изоморфизма, т.е. нет никаких соотношений между указанными линками, кроме, конечно, $\Phi^2 = 1$ в случае $K_X^2 = 2$ и 4, $\Phi[1]\Phi = 1$ в случае $K_X^2 = 6$ и 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если χ – не изоморфизм, то в обозначениях примера 1.5 (ii) из неравенства Нётера следует существование максимальной особенности $x \in X$ кратности $r(x) > a$ (точку x можно считать лежащей на X , а не бесконечно близкой, в силу невозрастания кратностей при разрешении неопределенностей свойства 1.4 (iii)). Мы знаем, что геометрические точки максимальной кратности находятся в общем положении в том смысле, что раздутие максимальной особенности снова приводит к поверхности Дель Пеццо, см. комментарий 2.

Из неравенства (1.5.4) получаем, что $\deg x < K_X^2$. Теперь по предположению теоремы во всех случаях такая точка может быть только одна. По алгоритму доказательства теоремы 2.5 с этой точкой связан некоторый элементарный линк типа I или II. Из теоремы 2.6 о классификации линков и предположения теоремы о степенях замкнутых точек на X находим, что возможны только указанные линки. Теорема 2.5 о разложении доказывает первое утверждение теоремы.

Предположим, что разложение не однозначно, тогда между указанными линками должно существовать нетривиальное соотношение. Пусть

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_2 \Phi_1$$

есть такое соотношение, которое можно предполагать специально. Пусть $\hat{A}(R)$ – его высота и s – вершина. Так как из процесса разложения видно, что каждое $X_i \in \{\mathbb{D}\}$, то $\hat{A}_i = a_i$. По определению имеем $\hat{A}_{s+1} = a_{s+1} < a_s = \hat{A}_s$ и $\hat{A}_{s-1} = a_{s-1} \leq a_s = \hat{A}_s$. Если $x_s \in X_s$ – максимальная особенность, а $y_s \in X_s$ – точка, в которую линк Φ_s стягивает исключительный дивизор, то предыдущие неравенства означают, что $r(x_s) > a_s$ и $r(y_s) \geq a_s$ (см. формулы 2.6). Если $x_s = y_s$, то линк Φ_{s+1} обратен линку Φ_s , что невозможно, поскольку соотношение R приведено. Значит, $x_s \neq y_s$, но тогда

$$\deg x_s r(x_s)^2 + \deg y_s r(y_s)^2 > a_s^2 K_X^2,$$

что противоречит (1.5.3). Это противоречие показывает, что не существует нетривиального соотношения и теорема доказана.

Изучим теперь бирациональные отображения поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$, для которых разложения на элементарные линки не однозначно, но соотношения между ними еще довольно просты.

4.5. ТЕОРЕМА. Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$ – бирациональное отображение, где $X \in \{\mathbb{D}\}$, $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, $K_X^2 = 3, 6$ или 9 , причем X обладает точкой $x \in X$ степени $\deg x < K_X^2$; в случаях $K_X^2 = 6$ и 9 не имеет точек степени 1 и в случае $K_X^2 = 6$ имеет точку степени 2. Тогда

(i) $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $K_{X'}^2 = 3, 6$ или 9 , соответственно, и χ раскладывается в произведение следующих линков типа II:

$K_X^2 = 3$: линки с матрицами $M_{3,1}$ и $M_{3,2}$ из 2.6 (iii), которые мы будем обозначать через τ_x , $\deg x = 1$, η_x , $\deg x = 2$, соответственно; в этом случае $X' \simeq X$;

$K_X^2 = 6$: линки с матрицами $M_{6,2}$ и $M_{6,4}$ из 2.6 (ii), которые мы будем также обозначать через τ_x , $\deg x = 2$, η_x , $\deg x = 4$, соответственно; в этом случае не обязательно $X' \simeq X$;

$K_X^2 = 9$: линки с матрицами $M_{9,3}$ и $M_{9,6}$ из 2.6 (ii), которые мы будем обозначать для удобства также через τ_x , $\deg x = 3$, η_x , $\deg x = 6$, соответственно; здесь возможны только два варианта: либо $X' \simeq X$, либо X' – форма проективной плоскости, соответствующая в группе Брауэра $\text{Br } k$ элементу, обратному к соответствующему элементу для X .

(ii) Все соотношения между линками во всех трех случаях выводятся из соотношений вида

$$(4.5.1) \quad \Phi[1]\Phi = 1, \quad \Phi_6[4]\Phi_5[3]\Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1,$$

где $\Phi = \tau_x$ или η_x , $\Phi_i = \tau_{x_i}$, $x_1 \neq x_2$, далее, по указанному сцеплению, $\deg x_i = 1, 2, 3$ при $K_X^2 = 3, 6, 9$, соответственно. В случае $K_X^2 = 3$ τ_x и η_x являются бирациональными инволюциями, т.е. $\tau_x^2 = 1$, $\eta_x^2 = 1$, в случае $K_X^2 = 6$ бирациональной инволюцией является η_x (ср. [18], в случае $K_X^2 = 3$, [14], в случаях $K_X^2 = 6$ и 9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что поскольку предполагается, что X , $K_X^2 \neq 3$, не имеет точек степени 1, то в случае $K_X^2 = 6$ X не имеет точек степени 3, так как по предположению имеет точку степени 2, а в случае $K_X^2 = 9$ X не имеет точек x степени $\deg x < 9$, взаимно простой с 9, по соображениям, уже использованным выше. Утверждение о разложении χ на элементарные линки – это частный случай теоремы 2.5. Из явного описания линков в 2.6 следуют все утверждения пункта (i), кроме последнего, которое вытекает из теории многообразий Севери–Брауэра форм проективных пространств (см., например, [32]).

Утверждения (ii) о соотношениях одинаковы во всех 3 случаях, поскольку, как видно из классификации линков 2.6 (ii), все соответствующие матрицы имеют одинаковый вид. Чтобы проверить справедливость соотношений (4.5.1), достаточно показать, что указанные композиции линков переводят антиканоническую (очень обильную) линейную систему $|-K_X|$ в $|-K_{X'}|$. Это проверяется явно посредством итерации соответствующих формул из 2.6 (ii) с учетом указанных правил сцепления.

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого бирационального отображения $\psi: X \dashrightarrow X'$, где X – одна из поверхностей, указанных в формулировке теоремы, не являющегося изоморфизмом, и любой линейной системы $\mathcal{H} \sim -aK_X$, являющейся собственным прообразом какой-нибудь очень обильной линейной системы $\mathcal{H}'$ на X' , $\mathcal{H}$ не может иметь базисную точку $y \in X$ кратности $r(y) = a$.

Действительно, предположим противное, и пусть X , ψ и $\mathcal{H}$, обладающие этим свойством, выбраны с наименьшим коэффициентом a . Мы построим другое бирациональное отображение с меньшим коэффициентом $a_1 < a$, что приведет к противоречию.

По неравенству Нётера $\mathcal{H}$ имеет базисную точку $x \in X$ кратности $r(x) > a$ и $\deg r(x) + \deg r(y) < K_X^2$ по неравенству (1.5.4). Принимая во внимание ограничения на степени точек на X , указанные в теореме, получаем, что $r(x) = r(y) = 1$ в случае $K_X^2 = 3$, $r(x) = r(y) = 2$ в случае $K_X^2 = 6$, и $r(x) = r(y) = 3$ в случае $K_X^2 = 9$. После применения линка $\Phi_1 = \tau_x$ коэффициент a уменьшается. Образ y_1 точки y

будет иметь ту же кратность $r(y_1) = r(y) = a$ и, стало быть, окажется максимальной особенностью $r(y_i) = a > a_1$. Значит, y_1 находится в общем положении и можно применить линк $\Phi_2 = \tau_{y_1}$, $y_1 = \tau_x(y)$. По 2.6 (ii) находим:

$$a_1 = 2a - r(x_1), \quad r(x_1) = 3a - 2r(x), \quad a_2 = 2a_1 - r(y_1) = 3a - 2r(x),$$

где $x_1 \in X_1$ — точка, являющаяся образом стягиваемого дивизора линком Φ_1 , т.е. x_1 — фундаментальная точка для $\Phi_1^{-1} = \tau_x^{-1}$. В итоге мы получаем многообразие X_2 , бирациональное X (в случае $K_X^2 = 3$, изоморфное X) и бирациональное отображение $X_2 \dashrightarrow X'$ с линейной системой $\mathcal{H}_2$, обладающей базисной точкой $x_2 = \tau_{y_1}(x_1)$ кратности $r(x_2) = r(x_1) = 3a - 2r(x) = a_2 < a$, где a_2 — коэффициент при $-K_{X_2}$ линейной системы $\mathcal{H}_2$. Противоречие.

Из этого утверждения следует, что всякое специальное соотношение в рассматриваемой ситуации является очень специальным. В самом деле, если

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$$

— специальное соотношение и $a_s = a_{s-1}$, то Φ_s^{-1} может быть только τ_{y_s} с $y_s \in X_s$, $r(y_s) = a_s$, что невозможно по утверждению, значит, $a_s > a_{s-1}$.

Итак, пусть R — очень специальное нетривиальное соотношение. Рассмотрим возможные варианты.

Случай $\Phi_s = \eta_{x_{s-1}}$, $\deg x_{s-1} = 2, 4, 6$, если $K_X^2 = 3, 6, 9$, соответственно. Этот случай невозможен. Действительно, пусть $y_s \in X_s$ — образ стягиваемого дивизора отображения $\eta_{x_{s-1}}$, тогда $r(y_s) > a_s$, поскольку y_s является фундаментальной точкой для $\Phi_s^{-1} = \eta_{x_{s-1}}^{-1}$, которое по первому из соотношений (4.5.1) является отображением η_{y_s} . Теперь неравенство следует из соответствующих формул 2.6 (ii), потому что $a_{s-1} < a_s$. Так как $a_{s+1} < a_s$, то на X_s существует максимальная особенность $x_s \in X$, $x_s \neq y_s$, поскольку соотношение R приведено, а по первому из соотношений (4.5.1), если $x_s = y_s$, то $\Phi_{s+1} = \eta_{x_s} = \eta_{y_s} = \Phi_s^{-1}$. Но если $x_s \neq y_s$, то $\deg x_s + \deg y_s \geq K_s^2$, что противоречит неравенству (1.5.4).

Случай $\Phi_s = \tau_{x_{s-1}}$, $\deg x_{s-1} = 1, 2, 3$, если $K_X^2 = 3, 6, 9$, соответственно. В этом случае точка $y_s \in X_s$ — образ стягиваемого дивизора отображения Φ_s , как и выше, имеет кратность $r(y_s) > a$, поскольку $a_s > a_{s-1}$. Кроме того, линейная система $\mathcal{H}_s$ имеет максимальную особенность $x_s \in X_s$, $r(x_s) > a_s$, $x_s \neq y_s$, как и выше, ввиду первого из соотношений (4.5.1). Из (1.5.4) находим, что имеется единственная возможность $\deg x_s = \deg y_s = 1, 2, 3$ в случаях $K_X^2 = 3, 6, 9$, соответственно, т.е. $\Phi_{s+1} = r_{x_s}$, как и Φ_s . Теперь воспользуемся соотношениями (4.5.1):

$$(4.5.2) \quad \tau_{x_s} = \tau_{x'_{s+4}} \tau_{x'_{s+3}} \tau_{x'_{s+2}} \tau_{x'_{s+1}} \tau_{y_s},$$

где $x'_{s+1} = \tau_{y_s}(x_s)$, $x'_{s+2} = \tau_{x'_{s+1}}(y'_{s+1})$, y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора отображением $\tau_{x'_{s+1}}$, $x'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}(y'_{s+2})$, y'_{s+2} — образ стягиваемого дивизора отображения $\tau_{x'_{s+1}}$, $x'_{s+4} = \tau_{x'_{s+2}}(y'_{s+3})$, y'_{s+3} — образ стягиваемого дивизора отображения $\tau_{x'_{s+2}}$. Это расшифровка правил сцепления в последнем соотношении (4.5.1), при этом используется, конечно, и первое соотношение в том плане, что обратное отображение к

τ_x тоже является отображением τ_y (где y — образ стягиваемого дивизора). Использование соотношений возможно потому, что точки x_s и y_s находятся в общем положении, так как $r(x_s) > a_s$ и $r(y_s) > a_s$.

Заменяем теперь в соотношении R линк Φ_{s+1} на композицию линков (4.5.2) с учетом указанных правил сплетения. В результате получим эквивалентное соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+5} \Phi'_{s+4} \Phi'_{s+3} \Phi'_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1,$$

где $\Phi'_{s+1} = \tau_{y_s} = \Phi_s^{-1}$, так что $\Phi'_{s+1} \Phi_s$ можно сократить, $\Phi'_{s+i+1} = \tau_{x'_{s+i}}$, $i = 1, \dots, 4$. Покажем, что $\hat{A}(R') < \hat{A}(R) = a_{s0}$. Вычисляя по соответствующим формулам из 2.6 (ii) (напомним, что они имеют одинаковый вид во всех трех случаях), получаем:

$$\Phi_{s+1} = \tau_{y_s} : \begin{cases} a'_{s+1} = 2a_s - r(y_s) = a_{s-1} < a_s; \\ r(y'_{s+1}) = 3a_s - 2r(y_s); \\ r(x'_{s+1}) = r(x_s); \end{cases}$$

последнее равенство следует из того, что $x_s \neq y_s$ и ввиду максимальной не лежит на исключительном дивизоре отображения τ_{y_s} , так что τ_{y_s} является изоморфизмом в окрестности x_s .

$$\begin{aligned} \Phi'_{s+2} &= \tau_{x'_{s+1}} : \begin{cases} a'_{s+2} = 2(2a_s - r(y_s)) - r(x_s) = 4a_s - 2r(y_s) - r(x_s) < a_s; \\ r(y'_{s+2}) = 6a_s - 3r(y_s) - 2r(x_s); \\ r(x'_{s+2}) = r(y'_{s+1}); \end{cases} \\ \Phi'_{s+3} &= \tau_{x'_{s+2}} : \begin{cases} a'_{s+3} = 2a'_{s+2} - r(x'_{s+2}) = 5a_s - 2r(x_s) - 2r(y_s) < a_s; \\ r(y'_{s+3}) = 3a'_{s+2} - 2r(x'_{s+2}) = 6a_s - 3r(x_s) - 2r(y_s); \\ r(x'_{s+3}) = r(y'_{s+2}); \end{cases} \\ \Phi'_{s+4} &= \tau_{x'_{s+3}} : a'_{s+4} = 2a'_{s+3} - r(x'_{s+3}) = 4a_s - 2r(x_s) - r(y_s) < a_s. \end{aligned}$$

Кроме того, $a'_{s+5} = a_{s+1} < a_s$, потому что мы заменили Φ_{s+1} равным ему выражением из (4.5.2). Следовательно,

$$\hat{A}(R') = \max\{a_{s+1}, a'_{s+4}, a'_{s+3}, a'_{s+2}, a_{s-1}\} < a_s = \hat{A}(R).$$

По лемме 3.2 соотношение R' раскладывается в произведение специальных высоты $\leq \hat{A}(R')$. Теперь индукция по высоте завершает доказательство теоремы.

Бирациональное отображение нерациональных над k поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$ из двух оставшихся классов изучаются в следующей теореме.

4.6. ТЕОРЕМА. Пусть $X \in \{\mathbb{D}\}$, $K_X^2 = 4$ или 8, причем в случае $K_X^2 = 4$ X обладает точкой степени 1, а в случае $K_X^2 = 8$ X обладает точкой степени 2, но не имеет точек степени 1 (значит, не имеет точек любой степени $\deg x < 8$, взаимно простой с 8). Пусть $\chi: X \dashrightarrow X'$ — бирациональное отображение на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда

- (i) X раскладывается в композицию следующих линков:

$K_X^2 = 4$: линки σ_x^{-1} ($\deg x = 1$) из 2.6 (i), линки ε_x из 2.6 (ii), линки σ_x ($\deg x = 1$) из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 4$ и линки с матрицами $M_{4,2}$ и $M_{4,3}$ из 2.6 (ii), которые мы будем обозначать через τ_x ($\deg x = 2$), η_x ($\deg x = 3$), соответственно; в этом случае $X' \in \{\mathbb{D}\}$ и $K_{X'}^2 = 4$, или $X' \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_X^2 = 3$;

$K_X^2 = 8$: линки σ_x^{-1} ($\deg x = 2$) из 2.6 (i), линки ε_x из 2.6 (ii), линки σ_x ($\deg x = 2$) из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 8$, а также линки с матрицами $M_{8,4}$ и $M_{8,6}$ из 2.6 (ii), которые мы будем для удобства обозначать теми же буквами τ_x ($\deg x = 4$), η_x ($\deg x = 6$), соответственно; в этом случае $X' \in \{\mathbb{D}\}$, $K_{X'}^2 = 8$, или $X' \in \{\mathbb{C}\}$, $K_{X'}^2 = 6$.

(ii) Все соотношения между указанными линками выводятся из соотношений вида

$$(4.6.1) \quad \Phi[1]\Phi = 1$$

для всех линков, кроме σ_x, σ_x^{-1} (которые, как мы знаем, взаимно обратны);

соотношения коммутирования для элементарных преобразований с независимыми центрами

$$(4.6.2) \quad \Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1,$$

где $\Phi_1 = \varepsilon_{x_1}$, $\Phi_2 = \varepsilon_{x_2}$ — элементарные преобразования расслоений на коники $X' \in \{\mathbb{C}\}$, x_1, x_2 лежат в слоях над различными точками базы расслоения $\pi': X' \rightarrow C$;

соотношения вида

$$(4.6.3) \quad \Phi_6\Phi_5[3]\Phi_4[2]\Phi_3\Phi_2\Phi_1 = 1,$$

где $\Phi_1 = \sigma_x^{-1}$, $\Phi_2 = \varepsilon_y$, $\deg x = 1$ при $K_X^2 = 4$ и $\deg x = 2$ при $K_X^2 = 8$, аналогично, $\deg y = 1$ при $K_X^2 = 4$ и $\deg y = 2$ при $K_X^2 = 8$, $\Phi_3 = \sigma_{x'}$, $\Phi_4 = \sigma_{y'}^{-1}$, $\Phi_5 = \varepsilon_{x''}$, $\Phi_6 = \sigma_{y''}$; точка x' однозначно определяется линком Φ_1 , Φ_2 , а точки y' , x'' , y'' выбираются по указанным правилам сцепления; в этих обозначениях (4.6.3) может быть переписано в явном виде

$$(4.6.3') \quad \sigma_{y''}\varepsilon_{x''}[3]\sigma_{y'}^{-1}[2]\sigma_{x'}\varepsilon_y\sigma_x^{-1} = 1,$$

все точки находятся в общем положении; и, наконец, соотношений длины 8:

$$(4.6.4) \quad \tau_{y'''}[6]\sigma_{x'''}\varepsilon_{y''}[4]\sigma_{x''}^{-1}[3]\tau_{y'}[2]\sigma_{x'}\varepsilon_y\sigma_x^{-1} = 1,$$

где $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, в случае $K_X^2 = 4$, и $\deg x = 2$, $\deg y = 4$, в случае $K_X^2 = 8$, точка x' однозначно определяется первыми двумя линками (или, что эквивалентно, выбором точек x и y), точки y' , x'' , y'' , y''' определяются указанными правилами сцепления, точка x''' однозначно определяется предыдущими линками и из правилами сцепления (как обычно, все точки находятся в общем положении).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) о разложении χ в композицию элементарных линков – это частный случай теоремы 2.5. Теорема 2.6 дает явное описание линков, участвующих в разложении. Из этого явного описания видно, какие из поверхностей $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ могут быть образами бирациональных отображений $\chi: X \dashrightarrow X'$. Отметим, что в случае $K_X^2 = 8$ существуют два типа поверхностей X :

1) $-K_X$ делится на 2 в $\text{Pic } X$, в этом случае $X \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, где Q – гладкая квадратика с $\text{Pic } Q \simeq \mathbb{Z}$. Раздутие точки $x \in X$ в общем положении, $\deg x = 2$, приводит к расслоению на коники $\pi: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$, $K_{X'}^2 = 6$. Обратно, если $\pi: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ – стандартное расслоение на коники $\pi: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ с $K_{X'}^2 = 6$, то $K_{X'}$ всегда очень обилен (см., например, [15]) и существует исключительный дивизор $E \sim -K_{X'} - 2f'$ такой, что $\overline{E} = E \otimes \overline{k} = \overline{E}_1 + \overline{E}_2$, $\overline{E}_i - (-1)$ -кривые на X' , $(\overline{E}_1 \cdot \overline{E}_2) = 0$. Стыгивание E линейной системой $|-K_{X'} - f'|$ отображает X' на квадрат $Q \subset \mathbb{P}^3$.

2) $\text{Pic } X = \mathbb{Z}(-K_X)$, в этом случае раздутие точки $x \in X$ степени 2, находящейся в общем положении, приводят к стандартному расслоению на коники $\pi: X' \rightarrow C$, с $K_{X'}^2 = 6$, где $C \subset \mathbb{P}^2$ – коника, не имеющая k -точек, $-K_{X'}$ обилен. Обратно, если $\pi: X' \rightarrow C$ – стандартное расслоение на коники над C , $C(k) = \emptyset$, то $-K_{X'}$, как и в предыдущем случае, очень обилен (см. [15]) и на X' существует исключительный дивизор $E \sim -K_{X'} - 2\overline{f}'$, состоящий из двух непересекающихся сопряженных (относительно действия группы Галуа $\text{Gal}(\overline{k}/k)$) (-1) -кривых, где $\overline{f}'$ – класс геометрического слоя морфизма $\pi: X' \rightarrow C$. Здесь удобнее, однако, вместо $\overline{f}'$ использовать класс слоя $f' = \pi^{-1}(t)$, где $t \in C$ – точка степени 2. Тогда $-K_{X'}$ и f' порождают $\text{Pic } X'$, и формулы для действий элементарных линков имеют точно такой же вид, как и в случае $K_X^2 = 4$ (см. 2.6, случай $K_X^2 = 4$ и 8). Стыгивание E линейной системой $|-2K_{X'} - f'|$ отображает X' в $\mathbb{P}^8$ на поверхность степени 8 и $\rho = 1$.

В случае $K_X^2 = 4$ раздутие точки $x \in X$, $\deg x = 1$, в общем положении приводит к кубической поверхности $X' \subset \mathbb{P}^3$ с одной инвариантной (относительно действия $\text{Gal}(\overline{k}/k)$) прямой $E \sim -K_{X'} - f'$, где f' – класс слоя расслоения на коники $\pi: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$. Обратно, если $\pi: X' \rightarrow \mathbb{P}^1$ – любое стандартное расслоение на коники с $K_{X'}^2 = 3$, то $-K_{X'}$ очень обилен и отображает изоморфно $X' \hookrightarrow \mathbb{P}^3$. На X' существует единственная инвариантная прямая (т.е. (-1) -кривая) $E \sim -K_{X'} - f'$, стыгивание которой приводит к поверхности Дель Пеццо степени 4 с $\rho = 1$.

Соотношения в (ii) проверяются, как обычно, непосредственно по формулам действий линков из 2.6 с учетом правил сплетения. Достаточно показать по 2.4, что указанные композиции линков приводят к равенству в $-K_X$ степеней $\widehat{A}(X) = (a, 0) = \widehat{A}(X') = (a', 0)$, где X' – образ при отображении композиции линков соответствующего соотношения. Проверим, например, соотношение (4.6.4). Мы рассматриваем оба случая $K_X^2 = 4$ и 8 одновременно, поскольку, как уже отмечалось, формулы действия линков одинаковы при условии, что $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, f – класс слоя – в случае $K_X^2 = 4$, $\deg x = 2$, $\deg y = 4$, f – класс удвоенного геометрического слоя – в случае $K_X^2 = 8$:

$$\begin{aligned} (a, 0) &\xrightarrow{\sigma^{-1}} (2a, -b) \xrightarrow{\varepsilon} (2a, 3b) \xrightarrow{\sigma} (5a, 0) \xrightarrow{\tau} (7a, 0) \\ &\xrightarrow{\sigma^{-1}} (6a, b) \xrightarrow{\varepsilon} (6a, 3b) \xrightarrow{\sigma} (3a, 0) \xrightarrow{\tau} (a, 0), \end{aligned}$$

отсюда получаем, что $X \simeq X' = X_8$.

Теперь доказательство утверждения (ii) о соотношениях аналогично доказательству теоремы 3.5 о соотношениях в случае кремоновых отображений плоскости $\mathbb{P}^2$ над алгебраически замкнутым полем. Пусть

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$$

есть нетривиальное специальное соотношение высоты $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$ между линками, указанными в формулировке теоремы. По замечанию выше, приводимое ниже доказательство пригодно для каждого из двух случаев $K_X^2 = 4$ и 8 (поэтому не случайно линки τ_x, η_x , относящиеся к разным классам поверхностей, мы обозначим одними и теми же символами). Как и в 3.5, надо рассмотреть возможные случаи для пары Φ_s, Φ_{s+1} , при этом, как и там, достаточно рассмотреть примерно половину всех возможных случаев, другая половина сводится к первой переходом к обратному соотношению R^{-1} .

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}, \Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$ Так как соотношение R специально, то

$$\widehat{A}_s = (a_s, b_s) \geq (a_{s-1}, b_{s-1}) = \widehat{A}_{s-1} \Rightarrow r(x_{s-1}) \leq a_{s-1},$$

поскольку $a_s = a_{s-1}$ и $b_s = b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))$ по формулам (2.6.5). Аналогично, $r(x_s) > a_s$, так как $(a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s)$. Следовательно, $r(x_s) > r(x_{s-1})$ и точка x_s не может быть бесконечно близкой к точке x_{s-1} , значит, они независимы, т.е. лежат в слоях над различными точками базы. Пользуясь соотношением коммутирования независимых элементарных преобразований (4.6.2), поменяем местами Φ_s и Φ_{s+1} . В результате получим эквивалентное соотношение

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi'_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1,$$

где $\Phi'_s = \varepsilon_{x'_{s-1}}, x'_{s-1} = \Phi_s^{-1}(x_s), r(x'_{s-1}) = r(x_s), \Phi'_{s+1} = \varepsilon'_{x'_s}, x'_s = \Phi'_s(x_{s-1}), r(x'_s) = r(x_{s-1})$. Вычислим степени:

$$\begin{aligned} \widehat{A}(\Phi'_s) &= (a'_s, b'_s) = (a_{s-1}, b_{s-1} + \deg x_s(a_{s-1} - r(x_s))) < (a_{s-1}, b_{s-1}), \\ \widehat{A}(\Phi'_{s+1}) &= (a'_{s+1}, b'_{s+1}) = (a_s, b'_s + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))) < (a_s, b_s), \end{aligned}$$

так как $a_s = a_{s-1}$ и $b_s = b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1}))$, но $b'_s < b_{s-1}$. Следовательно, высота соотношения R' равна

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}'_{s+1}, \widehat{A}_{s-1}\},$$

где $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s, \widehat{A}'_{s+1} < \widehat{A}_s$ и $\widehat{A}_{s-1} \leq \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$.

Если R очень специально, то $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s$, тогда $\widehat{A}(R) < \widehat{A}(R)$, и мы можем воспользоваться индукцией по высоте с применением леммы 3.2.

Если R не очень специально, т.е. $\widehat{A}_{s-1} = \widehat{A}_s$, то представим соотношение R' в виде произведения $R' = R_2 R_1$, где $R_1 = \Psi \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$, Ψ — композиция линков, раскручивающих отображение $\Phi_{s-1} \circ \cdots \circ \Phi_1$ по алгоритму теоремы 2.5, а $R_2 = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+1} \Phi'_s \Psi^{-1}$. Тогда $\widehat{A}(R_2) < \widehat{A}(R)$ и работает индукция по высоте;

$\widehat{A}(R_1) = \widehat{A}(R)$, но соотношение R_1 уже очень специально, т.е. для $R' = R_2 R_1$, выполняются условия (3.5.2) и доказательство такое же, как в 3.5.

Случай $\Phi_s = \sigma_{x_{s-1}}^{-1}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Здесь $\deg x_{s-1} = 1$ в случае $K_X^2 = 4$ и $\deg x_{s-1} = 2$ в случае $K_X^2 = 8$. По соответствующим формулам из 2.6 (i) $r(x_{s-1}) \leq a_{s-1}$, так как $\widehat{A}_s = (a_s, b_s) \geq (a_{s-1}, 0) = \widehat{A}_{s-1}$, так что $a_s \geq a_{s-1}$ и $b_s \leq 0$. Так как $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, то $r(x_s) > a_s$. Отсюда и из неравенства (1.5.5) получаем, принимая во внимание, что в случае $K_X^2 = 8$ X не имеет k -точек, $\deg x_s = 1$ или 2 в случае $K_{X_5}^2 = 3$, $\deg x_s = 2$ или 4 в случае $K_{X_5}^2 = 6$. Возникают две возможности:

а) $K_{X_s}^2 = 3$, $\deg x_s = 1$, или $K_{X_s}^2 = 6$, $\deg x_s = 2$. Здесь мы воспользуемся соотношениями (4.6.3), (4.6.1) и заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+3}\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \sigma_{x'_{s-1}}^{-1}$, $x'_{s-1} = \sigma_{x_{s-1}}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$, $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$, $x'_s = \sigma_{x'_{s-1}}^{-1}(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $\Phi'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}: X'_{s+1} \rightarrow X'_{s+2}$ — стягивание исключительного дивизора (который однозначно определен, как отмечено в начале доказательства), $\Phi'_{s+3} = \varepsilon_{x'_{s+2}}$, $x'_{s+2} = \sigma'(y'_{s+1})$, где y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора отображением $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$. В результате мы получим эквивалентное соотношение

$$R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+3}\Phi'_{s+2}\Phi'_{s+1}\Phi'_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Как обычно, надо вычислить степени $\widehat{A}_i$ и оценить высоту $\widehat{A}(R')$. По соответствующим формулам имеем:

$$\begin{aligned} (a'_s, b'_s) &= (2a_{s-1} - r(x_s), r(x_s) - a_{s-1}) < (a_{s-1}, 0) \leq (a_s, b_s); \\ (a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (a'_s, b'_s + (a'_s - r(x_{s-1}))) \\ &= (a'_s, a_{s-1} - r(x_{s-1}) < (a_{s-1}, 0) \quad (\text{так как } a'_s < a_{s-1}); \\ r(y'_{s+1}) &= 2a'_s - r(x_{s-1}) = 4a_{s-1} - 3r(x_{s-1}); \\ (a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (a'_{s+1} + b'_{s+1}, 0) = (2a_{s-1} - r(x_{s-1}) - r(x_s) + a_{s-1}, 0) \\ &= (a_s - r(x_s) + a_{s-1}, 0) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\ (a'_{s+3}, b'_{s+3}) &= (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s). \end{aligned}$$

Отсюда $\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}_{s-1}\}$. Если $\widehat{A}_{s-1} < \widehat{A}_s$, то $\widehat{A}(R') < \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$ и можем использовать индукцию по высоте. Если $\widehat{A}_{s-1} = \widehat{A}_s$, то, как в предыдущем случае, представим R' в виде произведения $R' = R_2 R_1$, так что для R_1, R_2 выполняются условия (3.5.2), и опять применима индукция по высоте.

б) $K_{X_s}^2 = 3$, $\deg x_s = 2$, или $K_X^2 = 6$, $\deg x_s = 4$. Здесь используются соотношения (4.6.4) и (4.6.1). Заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \tau_{x'_{s-1}}$, $x'_{s-1} = \sigma_{x_{s-1}}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$; $\Phi'_{s+1} = \sigma_{x'_s}^{-1}$, $x'_s = \tau_{x'_{s-1}}(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$; $\Phi'_{s+2} = \varepsilon_{x'_{s+1}}$, $x'_{s+1} = \sigma_{x'_s}^{-1}(y'_s)$, где y'_s — образ стягиваемого дивизора отображением $\tau_{x'_{s-1}}$, $r(x'_{s+1}) = r(y'_s)$; $\Phi'_{s+3} = \sigma_{y'_{s+3}}: X'_{s+2} \rightarrow X'_{s+3}$ — стягивание однозначно определенного исключительного дивизора в точку $y'_{s+3} \in X'_{s+3}$; $\Phi'_{s+4} = \tau_{x'_{s+3}}$, $x'_{s+3} = \sigma_{y'_{s+3}}(y'_{s+2})$, y'_{s+2} — образ стягиваемого дивизора отображением $\varepsilon_{x'_{s+1}}$, $r(x'_{s+3}) = r(y'_{s+2})$ и, наконец, $\Phi'_{s+5} = \sigma_{x'_{s+4}}^{-1}$, $x'_{s+4} = \tau_{x'_{s+3}}(y'_{s+3})$. Как и выше, мы получаем эквивалентное соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_{s+1}\Phi'_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Вычислим степени (напомним, что в случае $K_{X'}^2 = 6$ П: $X' \rightarrow C$ – расслоение на коники, f' обозначает удвоенный геометрический слой, как в соответствующем случае из 2.6 (i)):

$$\begin{aligned}
(a'_s, 0) &= (3a_{s-1} - 2r(x_s), 0) < (a_{s-1}, 0) \leq (a_s, b_s); \\
r(y'_s) &= 4a_{s-1} - 3r(x_s); \\
(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (2a'_s - r(x_{s-1}), r(x_{s-1}) - a_{s-1}) \\
&= (a_s + 4(a_{s-1} - r(x_s)), r(x_{s-1}) - a_{s-1}) < (a_s, b_s); \\
(a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (2a'_s - r(x_{s-1}), r(x_{s-1}) - a_{s-1} + 2(2a'_s - r(x_{s-1}) - 4a_{s-1} + 3r(x_3))) \\
&= (a_s + 4(a_{s-1} - r(x_s)), a_s + a_{s-1} - 2r(x_s)) < (a_s, b_s); \\
r(y'_{s+2}) &= 4a'_s - 2r(x_{s-1}) - 4a_{s-1} + 3r(x_s) = 2a_s + 4a_{s-1} - 5r(x_3); \\
(a'_{s+3}, 0) &= (a'_{s+2} + b'_{s+2}, 0) = (2a_s + 5a_{s-1} - 6r(x_s), 0) < (a_s, b_s); \\
(a'_{s+4}, 0) &= (3a'_{s+3} - 2r(y'_{s+2}), 0) = (2a_s + 7a_{s-1} - 8r(x_s), 0) < (a_s, b_s); \\
(a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s).
\end{aligned}$$

Отсюда $\hat{A}(R') = \max\{\hat{A}_{s+1}, \hat{A}'_{s+4}, \dots, \hat{A}'_s, \hat{A}_{s-1}\}$, так что, если $\hat{A}_{s-1} < \hat{A}_s$, то $\hat{A}(R') < \hat{A}(R)$, если же $\hat{A}_{s-1} = A_s$, то опять как в (3.5.2).

Случай $\Phi_s = \tau_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \sigma_{x_s}^{-1}$. Здесь $\deg x_{s-1} = 2$, $\deg x_s = 1$ в случае $K_X^2 = 4$ и $\deg x_{s-1} = 4$, $\deg x_s = 2$ в случае $K_X^2 = 8$. Опять воспользуемся соотношениями (4.6.4) и (4.6.1). Заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ в R на $\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \sigma_{x'_{s-1}}^{-1}$, $x'_{s-1} = \Phi_s^{-1}(x_s)$, $r(x'_{s-1}) = r(x_s)$; $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$, $x'_s = \Phi'_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$; $\Phi'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}: X'_{s+1} \rightarrow X'_{s+2}$ – стягивание исключительного дивизора в точку $y'_{s+2} \in X'_{s+2}$; $\Phi'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}$, $x'_{s+2} = \sigma_{y'_{s+2}}(y'_{s+1})$, y'_{s+1} – образ стягиваемого дивизора отображением $\varepsilon_{x'_s}$, $r(x'_{s+2}) = r(y'_{s+1})$; $\Phi'_{s+4} = \sigma_{x'_{s+3}}^{-1}$, $x'_{s+3} = \tau_{x'_{s+2}}(y'_{s+2})$, $r(x'_{s+3}) = r(y'_{s+2})$; $\Phi'_{s+5} = \varepsilon_{x'_{s+4}}$, $x'_{s+4} = \sigma_{x'_{s+3}}^{-1}(y'_{s+3})$, y'_{s+3} – образ стягиваемого дивизора отображением $\tau_{x'_{s+2}}$. Как обычно, вычислим последовательные степени в соотношении R' , принимая во внимание, что $r(x_s) > a_s$ и $r(x_{s-1}) \leq a_{s-1}$, где

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
(a'_s, b'_s) &= (2a_{s-1} - r(x_s), r(x_s) - a_{s-1}) < (a_{s-1}, 0) \leq (a_s, 0); \\
(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (2a_{s-1} - r(x_s) + r(x_s) - a_{s-1} + 2(2a_{s-1} - r(x_s) - r(x_{s-1}))) \\
&= (2a_{s-1} - r(x_s), a_s - r(x_s)) < (a_{s-1}, 0) \leq (a_s, 0); \\
r(y'_{s+1}) &= 4a_{s-1} - 2r(x_s) - r(x_{s-1}); \\
(a'_{s+2}, 0) &= (a'_{s+1} + b'_{s+1}, 0) = (a_s + 2a_{s-1} - 2r(x_s), 0) < (a_{s-1}, 0) \leq (a_s, 0); \\
(a'_{s+3}, 0) &= (3a'_{s+2} - 2r(y'_{s+1}), 0) = (2a_s + a_{s-1} - 2r(x_s), 0) < (a_{s-1}, 0) \leq (a_s, 0); \\
r(y'_{s+2}) &= a'_{s+1} + 2b'_{s+1} = 2a_s + 2a_{s-1} - 3r(x_3); \\
(a'_{s+4}, b'_{s+4}) &= (2a'_{s+3} - r(y'_{s+2}), r(y'_{s+2}) - a'_{s+3}) \\
&= (2a_s - r(x_s), a_{s-1} - r(x_s)) < (a_s, 0); \\
(a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\hat{A}(R') = \max\{\hat{A}_{s+1}, \hat{A}'_{s+4}, A_{s-1}\}$$

и далее по индукции, как и в предыдущих случаях.

Случай $\Phi_s = \sigma_{x_{s-1}}^{-1}$, $\Phi_{s+1} = \sigma_{y_{s+1}}$ невозможен, потому что, как отмечалось в начале доказательства, на раздутии X_s имеется только один исключительный дивизор, так что $\sigma_{y_{s+1}} \sigma_{x_{s-1}}^{-1} = \text{id}$, что противоречит приведенности соотношения R .

Случай $\Phi_s = \tau_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \tau_{x_s}$ также невозможен, потому что тогда $\deg(x_s) + \deg(y_s) > K_X^2$, где y_s — образ стягиваемого дивизора для $\tau_{x_{s-1}}$, что невозможно по (1.5.4). Здесь $r(x_s) > a_s$, поскольку $a_{s+1} < a_s$, и $r(y_s) \geq a_s$, поскольку $a_{s-1} \leq a_s$.

Остальные случаи сводятся к изученным при рассмотрении обратного соотношения R^{-1} .

Теорема доказана.

КОММЕНТАРИЙ 5. Как видно из предыдущих теорем, все рассмотренные в них классы поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$ действительно бирационально не тривиальны над k , т.е. не рациональны над k . Более того, поверхности X из теоремы 4.4 с $K_X^2 = 2$ и 4, а также из теоремы 4.5 с $K_X^2 = 3$ являются бирационально полужесткими в смысле определения в конце §1.

Остальные поверхности из этих двух теорем являются deg-устойчивыми (поверхности X из теоремы 4.6 этими свойствами, очевидно, не обладают).

Для полужестких поверхностей из теорем 4.4 и 4.5 следует довольно простое описание групп бирациональных автоморфизмов $\text{Bir } X$. Действительно, обозначим через $B(X)$ группу, являющуюся свободным произведением бирациональных инволюций τ_x по всем точкам $x \in X$ степени 1 в общем положении (т.е. в этом случае не лежащих на (-1) -кривых $X \otimes \bar{k} = \bar{X}$) в случае $K_X^2 = 2$; бирациональных инволюций τ_x , связанных с замкнутыми точками степени 2 в общем положении, в случае $K_X^2 = 4$. Тогда группа $\text{Bir } X$ представляется в виде полупрямого произведения

$$(4.6.5) \quad 1 \longrightarrow B(X) \longrightarrow \text{Bir } X \longrightarrow \text{Aut } X \longrightarrow 1.$$

Аналогично, для X из теоремы 4.5 с $K_X^2 = 3$ пусть $B(X)$ обозначает факторгруппу свободного произведения бирациональных инволюций τ_x , $\deg x = 1$, η_y , $\deg y = 2$, по всем точкам x, y в общем положении, по нормальной подгруппе, порожденной соотношениями (4.5.1), тогда $\text{Bir } X$ также представляется как полупрямое произведение вида (4.6.5) (ср. [18]).

Для других поверхностей X из этих двух теорем группа $\text{Bir } X$ описывается несколько сложнее: в качестве образующих надо брать соответствующие бирациональные инволюции, связанные с точками в общем положении на всех минимальных моделях $\{X_i\}$, $i \in I$, из бирационального класса поверхности X , перенося их на X с помощью выбранных заранее бирациональных изоморфизмов $X_i \dashrightarrow X$, как в комментарии 3, и факторизовать по соотношениям. Аналогично, но еще сложнее, описываются группы $\text{Bir } X$ для всех остальных классов поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\}$, поскольку в бирациональном классе X уже могут быть минимальные модели не только из $\{\mathbb{D}\}$, но также из $\{\mathbb{C}\}$, как, например, для поверхностей из теоремы 4.6, а также для всех рациональных над k поверхностей. Такая же картина наблюдается и для поверхностей

$X \in \{\mathbb{C}\}$: их группы $\text{Bir } X$ всегда содержат подгруппу автоморфизмов общего слоя, т.е. коники над полем функций $k(C)$ базы C (см. [3], [8], [14]).

4.7. Изучим теперь бирациональные отображения поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$ (для $K_X^2 \leq 0$ всякое такое отображение сохраняет расслоение на коники по теореме 1.6 (iii)). Как уже отмечалось, возможны случаи, когда $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$ также обладает единственной структурой расслоения на коники, тогда всякое бирациональное отображение $X \dashrightarrow X'$ сохраняет эту структуру и, стало быть, раскладывается в композицию линков, являющихся элементарными преобразованиями расслоений на коники.

Расслоения на коники $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 > 0$ существуют для $K_X^2 = 1, 2, \dots, 6, 8$. Отметим, что в случае нечетного K_X^2 база C всегда имеет k -точки [19]. В случае $K_X^2 = 8$ существуют два типа таких поверхностей: $\mathbb{P}^1$ -расслоения $\pi: X \rightarrow C$ над кривой рода нуль C и прямые произведения $C \times C'$, где C, C' — кривые рода нуль, не имеющие k -точек (см. 1.1 (ii)). Более того, всякая поверхность первого типа бирационально эквивалента над C произведению $\mathbb{P}^1 \times C$. На $C \times C'$ имеются две структуры расслоения на коники, переход от одной к другой — это линк типа IV из 2.6 (iv), случай $K_X^2 = 8$.

Случай $K_X^2 = 6$ нам уже встречался при доказательстве теоремы 4.6. Здесь всегда $-K_X$ очень обилен и существует однозначно определенный исключительный дивизор $E \sim -K_X - 2f$, где f — класс геометрического слоя; стягивание E приводит к поверхности X_1 с $K_{X_1}^2 = 8$ и $\rho(X_1) = 1$ (линк из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 8$). При этом имеются две возможности: $X_1 \simeq Q \subset \mathbb{P}^3$, Q — гладкая квадрика, если и только если $C(k) \neq \emptyset$; $X_1 \subset \mathbb{P}^8$ — поверхность степени 8 и $-K_X$ не делится на 2 в группе $\text{Pic } X = \mathbb{Z}$, если и только если $C(k) = \emptyset$.

Случай $K_X^2 = 5$ (см. [4], [15]). Здесь также $-K_X$ всегда очень обилен, $C(k) \neq \emptyset$ и существует однозначно определенный исключительный дивизор $E \sim -2K_X - 3f$, состоящий из четверки непересекающихся сопряженных (-1) -кривых, стягивание которого приводит к $\mathbb{P}^2$ (линк из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 9$, b)).

Случай $K_X^2 = 3$ также встречался в начале доказательства теоремы 4.6. Здесь всегда $-K_X$ очень обилен и отображает $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ на кубическую поверхность. На X существует однозначно определенный исключительный дивизор $-(-1)$ -кривая $E \sim -K_X - f$ (E — прямая на кубической поверхности, пучок плоскостей в $\mathbb{P}^3$, проходящих через E , высекает на X пучок коник). Стягивание E приводит к поверхности X_1 с $K_{X_1}^2 = 4$ и $\rho(X_1) = 1$ (линк из 2.6 (iii), случай $K_{X_1}^2 = 4$).

Для оставшихся классов поверхностей $X \in \{\mathbb{C}\}$ с $K_X^2 = 1, 2$ или 4 справедливы следующие утверждения.

4.8. ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

(i) Пусть $X \in \{\mathbb{C}\}$, $K_X^2 = 1, 2$ или 4 и $-K_X$ обилен, тогда на X существует другая (бирегулярная) структура расслоений на коники $\pi': X \rightarrow C'$, класс геометрического слоя f' которого равен:

$$\begin{aligned} & -4K_X - f', \text{ если } K_X^2 = 1; \\ & -2K_X - f', \text{ если } K_X^2 = 2; \\ & -K_X - f', \text{ если } K_X^2 = 4. \end{aligned}$$

Переход к другой структуре $|f| \leftrightarrow |f'|$ — это линки типа IV из 2.6 (iv), случай $K_X^2 = 1, 2$ и 4, соответственно. Более того, в случаях $K_X^2 = 1$ и 2 эти линки

являются бирегулярными инволюциями: Бертини $\beta: f \rightarrow -4K_X - f = f'$ в случае $K_X^2 = 1$ и Гейзера $\gamma: f \rightarrow -2K_X - f = f'$ в случае $K_X^2 = 2$.

(ii) Пусть $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_X^2 = 1, 2$ или 4 , $\pi: X \rightarrow C$ — структурный морфизм. На X тогда и только тогда существует другая (бirationальная) структура расслоения на коники, когда существует бирациональное отображение φ над C

$$(4.8.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & C & \end{array}$$

на поверхность X' с $K_{X'}^2 = K_X^2$, $X' \in \{\mathbb{C}\}$, и $-K_{X'}$ на X' обилен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Существование другого пучка коник на X в случае обильного $-K_X$ прямо следует из теоремы Римана–Роха (см., например, [4]). Можно, однако, воспользоваться несколько другими соображениями. В случае $K_X^2 = 1$ линейная система $|-2K_X|$ задает двулистное накрытие $\varphi_{-2K_X}: X \rightarrow Q^* \subset \mathbb{P}^3$ квадратичного конуса Q^* , при этом слои пучка коник $|f|$ отображаются бирационально на кривые степени 4 на Q^* , так что $\varphi_{-2K_X}^{-1}\varphi_{-2K_X}(f) \sim -4K_X$. Инволюция этого двойного накрытия (инволюция Бертини β), переставляющая точки в слоях, переводит f в $f' \sim -4K_X - f$. Аналогично, в случае $K_X^2 = 2$ линейная система $|-K_X|$ задает двулистное накрытие $\mathbb{P}^2$, при этом слои пучка $|f|$ отображаются бирационально на коники в $\mathbb{P}^2$, так что $\varphi_{-K_X}^{-1}\varphi_{-K_X}(f) \sim -2K_X$. Инволюция этого двойного накрытия (инволюция Гейзера γ) переводит f в $f' \sim -2K_X - f$. В случае $K_X^2 = 4$ антиканоническое вложение реализует X в виде гладкой поверхности степени 4 в $\mathbb{P}^4$, являющейся пересечением двух квадрик. Слои пучка коник $|f|$ отображаются при этом изоморфно на коники, лежащие на $X \subset \mathbb{P}^4$. Тогда пучок гиперплоскостей в $\mathbb{P}^4$, проходящих через двумерную плоскость $\langle f \rangle \simeq \mathbb{P}^2$ коники f , высекает на X другой пучок коник $|f'|$, так что $f' \sim -K_X - f$. В общем случае нет никакой естественной инволюции, переставляющей эти два пучка, более того, в [3] приводятся примеры, когда пучки не изоморфны.

(ii) В одну сторону утверждение уже доказано в (i): если существует бирациональное отображение (4.8.1), то собственный прообраз второго пучка на X' (существующего по утверждению (i)) является пучком рациональных кривых на X (вообще говоря, с базисными точками и особенностями), трансверсальным к структурному пучку $|f|$.

Обратно, предположим, что на X существует другой пучок рациональных без неподвижных компонент, трансверсальный к $|f|$, и $z = -aK_X + bf - \sum r(x_i)x_i$ — его класс в группе циклов $Z^*(X)$. Тогда по лемме 1.3 либо существует максимальная особенность, скажем, $x_1 \in X$ с $r(x_1) > a$, либо $b < 0$.

Если $b < 0$, то, как показано в примере 1.5 (iii), $-K_X$ обилен. Если же существуют максимальные особенности, то их можно раскрутить линками типа II из 2.6, т.е. элементарными преобразованиями над C вдоль пучка коник $|f|$. Тогда коэффициент b' при f' станет отрицательным и $-K_X$ обильным. Доказательство закончено.

Итак, поскольку мы откладываем изучение k -рациональных поверхностей до следующего параграфа, то здесь нам остается рассмотреть только следующие случаи $X \in \{\mathbb{C}\}$:

$K_X^2 = 1, 2, 4$ и для X существует диаграмма (4.8.1);

$K_X^2 = 8$, X бирационально над C произведению $C \times C'$, где $C(k) = \emptyset$.

Отметим, что в случае $K_X^2 = 3$ и 6 изучение бирациональных отображений $\chi: X \dashrightarrow X'$ ($X(k) = \emptyset$ в случае $K_X^2 = 6$) сводится к теореме 4.6 стягиванием соответствующих исключительных дивизоров. В случае $K_X^2 = 8$, если X бирационально эквивалентно $C \times C'$, где $C(k) = \emptyset$, то для C' имеются три возможности: $C' \simeq \mathbb{P}^1$, $C' \simeq C$ и $C' \not\simeq C$, $C'(k) = \emptyset$. В каждом из этих случаев бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$ раскладывается в композицию линков типа II (элементарных преобразований) и линков типа IV (переход к другому пучку коник). В случае $C' \simeq C$ этот переход осуществляется бирегулярной инволюцией перестановки множителей, как в случае $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в теореме 3.5.

Теперь рассмотрим отмеченные выше случаи.

4.9. ТЕОРЕМА [8], [14]. Пусть $X \in \{\mathbb{C}\}$ – одна из поверхностей с $K_X^2 = 1, 2, 4$, для которых имеет место диаграмма (4.8.1) (так что можно предполагать, что $-K_X$ обильна), и $K_X^2 = 8$, $X = C \times C$, $C(k) = \emptyset$. Пусть $\chi: X \dashrightarrow X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ – бирациональное отображение на поверхность $X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) $K_X^2 = 1$; отображение χ раскладывается в произведение линков типа II и IV, т.е. элементарных преобразований над C и инволюций Бертини β_i , действующих на $X_i \in \{\mathbb{C}\}$, где X_i из бирационального над C класса поверхности X с обильным $-K_{X_i}$, $K_X^2 = 1$; все соотношения выводятся из уже известных соотношений:

$$(4.9.1) \quad \Phi[1]\Phi = 1, \quad \Phi_4[2]\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1,$$

где Φ – любой из указанных линков (если $\Phi = \beta$, то просто $\beta^2 = 1$), Φ_i , $i = 1, \dots, 4$, – элементарные преобразования, центры x, y для $\Phi_1 = \varepsilon_x$ и $\Phi_2 = \varepsilon_y$ независимы;

(ii) $K_X^2 = 2$: а) $X(k) = \emptyset$ (в частности, это так, если $C(k) = \emptyset$), тогда, как и в (i), χ раскладывается в произведение линков типа II и IV, т.е. элементарных преобразований и инволюций Гейзера γ_i , действующих на $X_i \in \{\mathbb{C}\}$ из бирационального класса X с обильным $-K_{X_i}$, $K_X^2 = 2$; все соотношения такие же, как и в (i);

б) $X(k) \neq \emptyset$, тогда k -точки на X всюду плотны в топологии Зарисского (X универсально над k , см., например, [19]); χ раскладывается в композицию элементарных преобразований над C и инволюций Гейзера; кроме соотношений (4.9.1) здесь добавляются еще соотношения, связанные с точками степени 1 в общем положении $x \in X_i$, $X_i \in \{\mathbb{C}\}$ из бирационального класса X с обильным $-K_{X_i}$, $K_X^2 = 2$;

$$(4.9.2) \quad \Phi_8\Phi_7[5]\Phi_6\Phi_5[3]\Phi_4\Phi_3[1]\Phi_2\Phi_1 = 1,$$

где $\Phi_{2m} = \gamma$, $m = 1, \dots, 4$, – инволюции Гейзера (т.е. соответствующий линк типа IV из 2.6 (iv)), $\Phi_{2m-1} = \varepsilon_{x_m}$ – элементарные преобразования с центрами в точках степени 1 в общем положении; любое соотношение выводится из соотношений типа (4.9.1) и (4.9.2);

(iii) $K_X^2 = 4$; χ раскладывается в композицию линков типа II и IV, т.е. элементарных преобразований вдоль каждого из двух стандартных пучков коник на каждой из моделей $X_i \in \{\mathbb{C}\}$, $K_{X_i}^2 = 4$, $-K_{X_i}$ обилен, из бирационального класса поверхности X ; все соотношения выводятся из соотношений типа (4.9.1) и следующих (точки $x \in X$ в общем положении):

$$(4.9.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{x_2}[3]\alpha\varepsilon_{x_1}[1]\alpha\varepsilon_x &= 1, & \deg x &= 1; \\ \alpha\varepsilon_{x_3}[5]\alpha\varepsilon_{x_2}[3]\alpha\varepsilon_{x_1}[1]\alpha\varepsilon_x &= 1, & \deg x &= 2; \\ \alpha\varepsilon_{x_5}[9]\varepsilon_{x_4}[7]\alpha\varepsilon_{x_3}[5]\alpha\varepsilon_{x_2}[3]\alpha\varepsilon_{x_1}[1]\alpha\varepsilon_x &= 1, & \deg x &= 3, \end{aligned}$$

где α – линки типа IV – переход к другому пучку коник, ε_{x_i} – элементарные преобразования;

(iv) $K_X^2 = 8$; $X = C \times C'$, $C(k) = \emptyset$, χ раскладывается в композицию линков типа II (элементарные преобразования) и IV (переход ко второй структуре расслоения на коники); все соотношения выводятся из соотношений типа (4.9.1) и (4.9.3), где степени $\deg x$ удвоены, т.е. $\deg x = 2, 4$ и 6 , соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Если в линейной системе $\mathcal{H}$ на X – собственном прообразе очень обильной линейной системы $\mathcal{H}'$ на X' относительно χ – есть максимальная особенность $x \in X$ с $r(x) > a$, то с помощью элементарных преобразований мы можем открутить все такие максимальные особенности, как в доказательстве теоремы 2.5. Так что можно считать, что максимальных особенностей нет. Только $b < 0$, $-K_X$ обилен (см. 1.5 (iii)) и применима инволюция Бертини β и т. д. по алгоритму 2.5. Так как K_X^2 – инвариант относительно элементарных преобразований и β – бирациональный автоморфизм, то $X' \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_{X'}^2 = K_X^2 = 1$.

Проверим, что все соотношения порождаются соотношениями (4.9.1). Пусть $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_i$ – нетривиальное специальное соотношение высоты $\hat{A}(R) = \hat{A}_s = (a_s, b_s)$ и вершиной s .

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_s}$. Этот случай полностью аналогичен соответствующему случаю в теореме 4.6, используются те же соотношения; первое из них означает, что обратное к элементарному преобразованию является элементарным преобразованием, а второе – коммутирование элементарных преобразований с независимыми центрами.

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \beta_{s+1}$. Из условия $A_{s+1} < A_s$ по соответствующим формулам из 2.6 (iv) имеем $b_s < 0$, а из условия $A_{s-1} \leq A_s$ и формул 2.6 (iii) следует, что $r(y_s) \geq a_s$, где y_s – точка, в которую Φ_s стягивает свой исключительный дивизор. Неравенство (1.5.5) в нестрогом варианте “ $\leq$ ” дает

$$\deg y_s \leq K_{X_s}^2 + 2 \frac{b_s}{a_s} + \frac{1}{a_s} K_{X_{s+1}} \mathcal{H}_{s+1}.$$

Здесь $b_s < 0$, $K_{X_{s+1}} \mathcal{H}_{s+1} \leq 0$, поскольку $\mathcal{H}_{s+1}$ не имеет неподвижных компонент и, значит, численно эффективна, а $-K_{X_{s+1}}$ – эффективный дивизор по теореме Римана–Роха, так что

$$\deg y_s < K_{X_s}^2 = 1.$$

Это противоречие означает, что рассматриваемый случай невозможен.

Случай $\Phi_s = \beta_s$, $\Phi_{s+1} = \varepsilon_{x_m}$. Этот случай можно свести к предыдущему переходом к обратному соотношению R^{-1} , однако, нетрудно убедиться и непосредственно, что он также невозможен. Действительно, здесь $r(x_s) > a_s$ и $b_s \leq 0$, и противоречие, как и выше, дает неравенство (1.5.5). Таким образом, все утверждения (i) доказаны.

(ii) Случай а) и утверждение о разложении в случае б) дословно повторяют предыдущий случай (i) с инволюцией Гейзера γ вместо инволюции Бертини β . Соотношения (4.9.2) проверяются, как обычно, по соответствующим формулам из 2.6 с учетом указанных сцеплений:

$$\begin{aligned} (a, b) &\xrightarrow{\varepsilon} (a, a+b) \xrightarrow{\gamma} (3a+2b, -a-b) \xrightarrow{\varepsilon} (3a+2b, b) \\ &\xrightarrow{\gamma} (3a+4b, -b) \xrightarrow{\varepsilon} (3a+4b, -a-b) \xrightarrow{\gamma} (a+2b, a+b) \xrightarrow{\varepsilon} (a+2b, -b) \xrightarrow{\gamma} (a, b). \end{aligned}$$

Пусть $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$ — специальное соотношение с вершиной s и высотой $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$. Почти все случаи, которые предстоит рассмотреть, полностью аналогичны предыдущим, кроме двух, даже одного, потому что второй сводится к первому для обратного соотношения R^{-1} .

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \gamma_{s+1}$, $\deg x_{s-1} = 1$. Из условий $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, $\widehat{A}_{s-1} \leq \widehat{A}_s$ вытекает, что $b_{s-1} \leq b_s < 0$. Отсюда по 1.5 (iii) антиканонические классы $-K_{X_{s-1}}$ и $-K_{X_s}$ обильны. Проверим, что точка $x_{s-1} \in X_{s-1}$ находится в общем положении, т.е. не лежит на (-1) -кривых на $\overline{X}_{s-1}$. Если $\overline{E} \subset \overline{X}_{s-1} - (-1)$ -кривая и $x_{s-1} \in \overline{E}$, то в обозначениях п. 1.4 имеем:

$$\overline{E} - x_{s-1} \in Z_t^*(\overline{X}_{s-1}) \quad \text{и} \quad -a_{s-1}K_{\overline{X}_{s-1}} + b_{s-1}\overline{f}_{s-1} - r(x_{s-1})x_{s-1} \in Z^{**}(\overline{X}_{s-1}),$$

так что $(-a_{s-1}K_{\overline{X}_{s-1}} + b_{s-1}\overline{f}_{s-1} - r(x_{s-1})x_{s-1})(\overline{E} - x_{s-1}) \geq 0$. С другой стороны, вычисления показывают, что это пересечение отрицательно. Действительно, $-K_{\overline{X}_{s-1}}\overline{E} = 1$, $\overline{f}_{s-1}\overline{E} = 1$ или 2 ($\overline{E}$ не является компонентой слоя $\overline{f}$, поскольку определено $\varepsilon_{x_{s-1}}$) и мы получаем, что рассматриваемое пересечение равно

$$b_{s-1}(\overline{f}_{s-1} \cdot \overline{E}) + a_{s-1} - r(x_{s-1}) = \begin{cases} b_s, & \text{если } (\overline{f}_{s-1} \cdot \overline{E}) = 1, \\ b_{s-1} + b_s, & \text{если } (\overline{f}_{s-1} \cdot \overline{E}) = 2. \end{cases}$$

Это приводит к противоречию, так как $b_{s-1} \leq b_s < 0$.

Используя соотношения (4.9.2) и первое из соотношений (4.9.1), заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_s = \gamma_s$, $\Phi'_{s+1} = \varepsilon_{x'_s}$, $x'_s = \gamma_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $\Phi'_{s+2} = \gamma_{s+2}$, $\Phi'_{s+3} = \varepsilon_{x'_{s+2}}$, $x'_{s+2} = \gamma_{s+2}(y'_{s+1})$, y'_{s+1} — образ стягиваемого дивизора для отображения $\varepsilon_{x'_s}$, $\Phi'_{s+4} = \gamma_{s+4}$, $\Phi_{s+5} = \varepsilon_{x'_{s+4}}$. В результате получим соотношение

$$R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1.$$

Обычные вычисления дают:

$$\begin{aligned}
(a'_s, b'_s) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, a_{s-1} + b_{s-1} - r(x_{s-1})) \\
&= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
r(y'_{s+1}) &= 2a_{s-1} + 4b_{s-1} - r(x_{s-1}) = a_{s-1} + 3b_{s-1} + b_s; \\
(a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+3}, b'_{s+3}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+4}, b'_{s+4}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1}, b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}_{s-1}\},$$

и доказательство завершается как обычно (см. (3.5.2)).

(iii) Разложение на элементарные линки как в 2.5. Явный вид линков 2.6 в этом случае показывает, что все $X_i \in \{\mathbb{C}\}$, $K_{X_i}^2 = 4$. Кроме того, если $\mathcal{H}_i$ не имеет максимальных особенностей, то $-K_{X_i}$ обилен (как в 1.5 (iii)).

Проверка соотношений (4.9.3) стандартна. Для редукции специального соотношения R , как и выше, надо рассмотреть несколько случаев. Поскольку вычисления однотипны, ограничимся рассмотрением только одного случая, в котором используется последнее из соотношений (4.9.3).

Случай $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$, $\Phi_{s+1} = \alpha_{s+1}$, $\deg x_{s-1} = 3$. Из условий $\widehat{A}_{s+1} < \widehat{A}_s$, $\widehat{A}_{s-1} \leq \widehat{A}_s$ получаем, что $b_{s-1} \leq b_s < 0$ и $r(y_s) \geq a_s$, где y_s — точка, $\deg y_s = 3$, в которую Φ_s стягивает свой исключительный дивизор. По 1.5 (iii) $-K_{s-1}$ и $-K_s$ обильны. Проверим, что точка $x_{s-1} \in X_{s-1}$ находится в общем положении, т.е. $-K_Z$ обилен, где $\sigma: Z \rightarrow X_{s-1}$ — раздутие точки x_{s-1} . Пусть $E = \sigma^{-1}(x_{s-1})$ — исключительный дивизор, тогда линейная система

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_Z &\sim -a_{s-1}\sigma^*K_{X_{s-1}} + b_{s-1}\sigma^*f_{s-1} - r(x_{s-1})E \\
&= -a_{s-1}K_Z + b_{s-1}\sigma^*f_{s-1} + (a_{s-1} - r(x_{s-1}))E \\
&= -a_{s-1}K_Z + (b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1})))\sigma^*f_{s-1} - (a_{s-1} - r(x_{s-1}))E',
\end{aligned}$$

где E' — стягиваемый дивизор отображения $\varepsilon_{x_{s-1}}$, т.е. $E + E' \sim 3\sigma^*f_{s-1}$ подвижна и не имеет неподвижных компонент, значит, она численно эффektivна. Так как $-K_Z\sigma^*f = 2$, $-K_Z E = -K_Z E' = 3$, то по численному критерию обильности достаточно проверить, что $-K_Z$ положителен на любой неприводимой кривой $F \subset Z$, не лежащей в слоях пучка $|\sigma^*f_{s-1}|$. Принимая во внимание, что

$$b_{s-1} + \deg x_{s-1}(a_{s-1} - r(x_{s-1})) = b_s < 0,$$

имеем:

$$-a_{s-1}K_Z \cdot F = \mathcal{H}_Z \cdot F - b_s\sigma^*f_{s-1} \cdot F + (a_{s-1} - r(x_{s-1}))E' \cdot F > 0,$$

поскольку $\mathcal{H}_Z \cdot F \geq 0$, $-b_s \sigma^* f_{s-1} \cdot F > 0$, $E' \cdot F > 0$ и $a_{s-1} - r(x_{s-1}) \geq 0$. Следовательно, $-K_Z$ обилён, что и утверждалось.

Таким образом, мы можем воспользоваться соотношением (4.9.3) и первым из соотношений (4.9.1). Заменим $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на $\Phi'_{s+9} \cdots \Phi'_{s+1}\Phi'_s$, где $\Phi'_{s+2m} = \alpha_{s+2m}$, $m = 0, 1, \dots, 4$, — линки типа IV (переходы от одного пучка коник к другому: $f \rightarrow f' \sim -K_X - f$), $\Phi_{s+2m+1} = \varepsilon_{x'_{s+2m}}$ — элементарные преобразования со следующими правилами сцепления центров: $x'_s = \alpha_s(x_{s-1})$, $r(x'_s) = r(x_{s-1})$, $x'_{s+2m} = \alpha_{s+2m}(y'_{s+2m-1})$, y'_{s+2m-1} — образ стягиваемого дивизора отображением Φ'_{s+2m-1} , $m = 1, \dots, 4$. Для соотношения $R' = \Phi_m \cdots \Phi_{s+2}\Phi'_{s+9} \cdots \Phi'_s\Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$, эквивалентного R (по модулю соотношений (4.9.3) и (4.9.1)), стандартные вычисления дают:

$$\begin{aligned}
(a'_s, b'_s) &= (a_{s-1} + b_{s-1}, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+1}, b'_{s+1}) &= (a_{s-1} + b_{s-1}, -b_{s-1} + 3(a_{s-1} + b_{s-1} - r(x_{s-1}))) \\
&= (a_{s-1} + b_{s-1}, b_{s-1} + b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
r(y'_{s+1}) &= 2a_{s-1} + 2b_{s-1} - r(x_{s-1}); \\
(a'_{s+2}, b'_{s+2}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + b_s, -b_{s-1} - b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+3}, b'_{s+3}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + b_s, 2b_s - b_{s-1} - 3(a_{s-1} - r(x_{s-1}))) \\
&= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + b_s, b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
r(y'_{s+3}) &= 2a_{s-1} + 4b_{s-1} + 2b_s - 2a_{s-1} - 2b_{s-1} + r(x_{s-1}) \\
&= 2b_{s-1} + 2b_s + r(x_{s-1}); \\
(a'_{s+4}, b'_{s+4}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(4.9.4) \quad (a'_{s+5}, b'_{s+5}) &= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_s + 3(a'_{s+4} - r(y'_{s+3}))) \\
&= (a_{s-1} + 2b_{s-1} + 2b_s, -b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
r(y'_{s+5}) &= 2a_{s-1} + 4b_{s-1} + 4b_s - 2b_{s-1} - 2b_s - r(x_{s-1}) \\
&= 2(a_{s-1} + b_{s-1} + b_s) - r(x_{s-1}); \\
(a'_{s+6}, b'_{s+6}) &= (a_{s-1} + b_{s-1} + 2b_s, b_{s-1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+7}, b'_{s+7}) &= (a_{s-1} + b_{s-1} + 2b_s, -b_{s-1} - b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
r(y'_{s+7}) &= 2a_{s-1} + 2b_{s-1} + 4b_s - 2a_{s-1} - 2b_{s-1} - 2b_s + r(x_{s-1}) \\
&= 2b_s + r(x_{s-1}); \\
(a'_{s+8}, b'_{s+8}) &= (a_{s-1} + b_s, b_{s-1} + b_s) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s); \\
(a'_{s+9}, b'_{s+9}) &= (a_{s-1} + b_s, b_{s-1} + b_s + 3(a_{s-1} + b_s - 2b_s - r(x_{s-1}))) \\
&= (a_{s-1} - b_s, -b_s) = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s).
\end{aligned}$$

Последнее вычисление можно было бы и не делать, так как в соотношении R мы заменили $\Phi_{s+1}\Phi_s$ на равную в силу соотношения (4.9.3) часть.

Итак, $\widehat{A}(R') = \widehat{A}_{s-1} = (a_{s-1}, b_{s-1}) \leq (a_s, b_s) = \widehat{A}_s = \widehat{A}(R)$ и далее, как обычно, индукция по принципу (3.5.2) завершает доказательство.

(iv) Этот случай полностью аналогичен предыдущему. Более того, формулы действия используемых линков будут иметь тот же вид, что и соответствующие линки в случае $K_X^2 = 4$, если, как в теореме 4.6 с $K_X^2 = 8$, мы вместо класса f геометрического

слоя пучка коник будем работать с классом $2f$ удвоенного геометрического слоя, который, на самом деле, и является одной из образующих группы $\text{Pic } X = \mathbb{Z}(-K_X) + 2\mathbb{Z}f$, поскольку $X(k) = \emptyset$, и, значит, $C(k) = \emptyset$ по условию. Следовательно, все вычисления при замене соотношения R на R' типа (4.9.4) будут в точности теми же самыми, что и при $K_X^2 = 4$. Доказательство теоремы закончено.

Из результатов этого параграфа следует, что все поверхности $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, участвующие в формулировках основных теорем и предположительно не рациональные над k , на самом деле, оказываются k -нерациональными, а все остальные — k -рациональными. Таким образом, мы получаем следующий критерий рациональности над k для поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$. Поверхность $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ тогда и только тогда рациональна над k , когда выполняются следующие два условия:

- (i) X обладает k -точкой;
- (ii) $K_X^2 \geq 5$.

Как мы убедились выше, достаточность этих условий доказывается легко с помощью теоремы Римана–Роха и проекций из k -рациональных точек. Напротив, для доказательства необходимости условия (ii) (необходимость условия (i) очевидна) потребовалось изучить бирациональные отображения всех поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, для которых не выполняется условие (ii), и убедиться, что они не рациональны над k . Метод доказательства, как видим, не очень простой, но другого пока нет.

КОММЕНТАРИЙ 6. Бирациональная теория рациональных поверхностей над незамкнутыми полями занимает промежуточное место между теорией рациональных поверхностей над замкнутым полем (относительно минимальные модели, критерий рациональности Кастельнуово, поверхности Дель Пеццо) и бирациональной теорией 3-мерных $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенных пространств $\varphi: X \rightarrow S$ с рациональной базой (т.е. S — либо точка, либо $\mathbb{P}^1$, либо рациональная поверхность) также над алгебраически замкнутым полем.

Итальянские геометры пытались создать бирациональную теорию 3-мерных алгебраических многообразий, похожую на бирациональную теорию поверхностей, в частности, найти подходящий критерий рациональности типа критерия Кастельнуово. Однако, как мы знаем теперь, ситуация оказалась намного сложнее. Теория минимальных моделей Мори дала бирациональную характеристику 3-мерных многообразий отрицательной кодаировой размерности: каждое такое многообразие с точностью до бирациональной эквивалентности является $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенным пространством $\varphi: X \rightarrow S$ (S не обязательно рационально). С развитием бирациональной теории рациональных поверхностей над незамкнутыми полями, еще до возникновения теории Мори, было ясно, что бирациональная геометрия трехмерных многообразий отрицательной кодаировой размерности должна быть похожа на двумерную теорию над незамкнутым полем (хотя и значительно сложнее, в частности, не было надежды на существование простого кохомологического критерия рациональности типа Кастельнуово). Именно с этой точки зрения изучались многообразия Фано, расслоения на коники и пучки поверхностей Дель Пеццо. При этом использовались обычные классические методы для неособых 3-мерных многообразий: неравенства Нётера–Фано, разрешение неопределенностей бирациональных отображений и конструкций элементарных бирациональных отображений (линков) посредством раздутий и стягиваний с

неособыми центрами (см., например, [7]).

Теория Мори позволила более четко сформулировать проблему разложения бирациональных отображений между $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенными пространствами на элементарные линки. В рамках программы минимальных моделей дан метод такого разложения и единообразный способ конструкции элементарных линков. Вот существенные отличия от классической теории Нётера–Фано:

- (i) категория изучаемых объектов расширяется до категории $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенных пространств, т.е. нормальных проективных многообразий X с не более чем $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, обладающих структурой стягивания Мори $\varphi: X \rightarrow S$ расслоенного типа, $0 \leq \dim S < \dim X$, $\rho(X/S) = 1$ и $-K_X$ относительно обилён;
- (ii) при конструкции элементарных линков и процессе факторизации используются элементарные стягивания Мори, флипы, флипы и антифлипы вместо раздутий и стягиваний с неособыми центрами;
- (iii) использование при отрицательной степени вместо максимальной кратности особенностей линейной системы, задающей бирациональное отображение, в некотором смысле обратную к ней величину – канонический порог, являющийся неотрицательным числом или ∞ .

Преимущество нового подхода заключается в том, что развитая теория минимальных моделей позволила доказать теорему [21] о разложении бирациональных отображений между 3-мерными $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенными пространствами на элементарные линки, обобщающую теорему 2.5. Для дальнейшего изучения, в частности, решения проблемы рациональности, нужна теорема, аналогичная теореме 2.6, о классификации элементарных линков в размерности 3, что весьма затруднительно ввиду отсутствия хорошей теории пересечений на многообразиях с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями такой, как теория пересечения в кольцах Чжоу на неособых многообразиях и их раздутиях. Кроме того, в конструкции элементарных линков входят неявным образом преобразования типа флипов, являющиеся изоморфизмами в коразмерности 1 – новое явление в бирациональной геометрии многообразий размерности ≥ 3 .

Для решения проблемы классификации элементарных линков в размерности три нужно прежде всего получить результаты, обобщающие теорему 1.6 о жестких, полужестких и обладающих единственной структурой $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенных многообразиях, типа результатов [13], [7] о многообразиях Фано и [20] о расслоениях на коники. В [12] сделана попытка выделить подкласс 3-мерных многообразий с единственной структурой расслоения на поверхности Дель Пеццо в неособом случае.

Вопрос о соотношениях может быть поставлен только после решения проблемы классификации линков. Отметим, что изучение соотношений не влияет на решение проблемы рациональности, так как классификация элементарных линков и теорема о разложении уже позволят получить описание всех рациональных и нерациональных $\mathbb{Q}$ -Фано расслоенных пространств по аналогии с результатами настоящей статьи.

§ 5. Соотношения при факторизациях бирациональных отображений k -рациональных поверхностей

5.1. В этом параграфе мы передокажем результаты работ [11] и [15] об образую-

щих и соотношениях в двумерной группе Кремоны $\mathbb{G}_2(k)$ над совершенным полем k в контексте теории Мори. Точнее, следуя теоремам 2.5 и 2.6, мы укажем явные разложения бирациональных отображений k -рациональных поверхностей $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ на элементарные линки и опишем соотношения между этими линками.

По критерию k -рациональности из предыдущего параграфа, рациональными над k поверхностями $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ являются только те, которые имеют k -точку и $K_X^2 = 5, 6$ и 9 . Описание элементарных линков для таких поверхностей содержится в классификационной теореме 2.6. Для удобства дальнейшего изложения мы выпишем их здесь, введя для них более конкретные обозначения.

5.2. ЛЕММА. Пусть $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ — k -рациональная поверхность, $x \in X$ — точка степени $d = \deg x$ в общем положении (для расслоений на коники общность точки x предполагает, между прочим, существование элементарного преобразования $\varepsilon_x: X \dashrightarrow X'$ с центром в x). Тогда все элементарные линки типа I–IV для X исчерпываются следующими:

(i) Линки типа I. Пусть $\sigma_{n,d}: X_1 \rightarrow X$ — раздутие точки $x \in X$, где $n = K_X^2$ (тогда ясно, что $K_{X_1}^2 = n - d$). Для $\sigma_{n,d}$ имеются только следующие возможности: $n = 9; d = 1; n = 8; d = 2, X = Q \subset \mathbb{P}^3$ — квадрака, $\rho(X) = 1$.

(ii) Линки типа II: а) случай $X \in \{\mathbb{D}\}$.

Пусть $\sigma: Z \rightarrow X_1$ — раздутие точки $x \in X$, $\deg x = d$, $\sigma_1: Z \rightarrow X_1$ — стягивание исключительного дивизора $E_1 \subset Z$, $E_1 \neq E = \sigma^{-1}(x)$, в точку $x_1 \in X$, $\deg x_1 = d_1$. Линк $\Phi_1: X \dashrightarrow X_1$ — это преобразование вида $\gamma_{n,d,d_1} := \sigma_1 \circ \sigma^{-1}$, где $n = K_X^2$ (ясно, что $K_{X_1}^2 = n_1 = n - d + d_1$). Тогда для n, d, d_1 имеются только следующие возможности:

$n = 9; d = d_1 = 8, \gamma_{9;8,8}$ — бирациональная инволюция Бертини на $\mathbb{P}^2$;

$n = 9; d = d_1 = 7, \gamma_{9;7,7}$ — бирациональная инволюция Гейзера на $\mathbb{P}^2$;

$n = 9; d = d_1 = 6$;

$n = 9; d = 5, d_1 = 1$;

$n = 9; d = d_1 = 3$;

$n = 9; d = 2, d_1 = 1, \gamma_{9;2,1}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow Q$, где Q — квадрака в $\mathbb{P}^3$, $\rho(Q) = 1$;

$n = 8; d = d_1 = 7, \gamma_{8;7,7}$ — бирациональная инволюция Бертини на $\mathbb{Q}$;

$n = 8; d = d_1 = 6, \gamma_{8;6,6}$ — бирациональная инволюция Гейзера на $\mathbb{Q}$;

$n = 8; d = 5, d_1 = 2$;

$n = 8, d = d_1 = 4$;

$n = 8, d = 3, d_1 = 1$;

$n = 8; d = 1, d_1 = 2, \gamma_{8;1,2}: Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — отображение, обратное к $\gamma_{9;2,1}$;

$n = 6; d = d_1 = 5, \gamma_{6;5,5}$ — инволюция Бертини на X ;

$n = 6; d = d_1 = 4, \gamma_{6;4,4}$ — инволюция Гейзера на X ;

$n = 6; d = d_1 = 3$;

$n = 6; d = d_1 = 2$;

$n = 6; d = 1, d_1 = 3, \gamma_{6;1,3} = \gamma_{8;3,1}^{-1}$;

$n = 5; d = d_1 = 4, \gamma_{5;4,4}$ — инволюция Бертини на X ;

$n = 5; d = d_1 = 3, \gamma_{5;3,3}$ — инволюция Гейзера на X ;

$n = 5; d = 2, d_1 = 5, \gamma_{5;2,5} = \gamma_{8;5,2}^{-1}$;

$n = 5; d = 1, d_1 = 5, \gamma_{5;1,5} = \gamma_{9;5,1}^{-1}$.

б) Случай $X \in \{\mathbb{C}\}$. Каждый линк типа II в этом случае является элементарным преобразованием над базой C , которое мы будем обозначать через $\varepsilon_{n,d}$, где $n = K_X^2$, $d = \deg x$, $x \in X$ — замкнутая точка — центр элементарного преобразования. Для n здесь только три возможности: $n = 5, 6$ или 8 ; $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 1$.

(iii) Линки типа III. Каждый такой линк, как отображение, обратен одному из линков типа I, и наоборот. В частности, если $X \in \{\mathbb{C}\}$ и $K_X^2 = 5$ или 6 , то $-K_X$ обилен и на X существует исключительный дивизор $E \sim -2K_X - 3f$ в случае $K_X^2 = 5$ и $E \sim -K_X - 2f$ в случае $K_X^2 = 6$, стягивание которого приводит к $\mathbb{P}^2$ и $Q \rightarrow \mathbb{P}^3$, соответственно.

(iv) Линки типа IV. Здесь имеется только одна возможность: $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\Phi_1 = \tau: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ — бирегулярная инволюция перестановки множителей.

Утверждения этой леммы составляют часть утверждений теоремы 2.6, где даны указания для их доказательства.

Таким образом, частным случаем теоремы 2.5 является следующий результат:

5.3. СЛЕДСТВИЕ. Любое бирациональное отображение $\chi: X \dashrightarrow X'$ между k -рациональными поверхностями $X, X' \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$ раскладывается в композицию элементарных линков из леммы 5.2. В частности, это верно и для кременовых преобразований $\chi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ (ср. [11]).

Остается изучить соотношения между описанными выше линками. Часть из них нам уже известна: лемма 3.4, соотношения.

Из опыта изучения соотношений в предыдущем параграфе видим, что для упрощения специального соотношения $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$ с вершиной s нужно для каждой пары линков Φ_s, Φ_{s+1} иметь подходящее соотношение, позволяющее выразить Φ_{s+1}, Φ_s через другие линки так, чтобы выполнялись условия (3.5.2). Поиск таких определяющих соотношений значительно упрощают следующие замечания, которые уже неоднократно использовались ранее.

5.4. ЛЕММА. В предыдущих обозначениях пусть $x_s \in \Phi_s$ есть базисная точка линка Φ_{s+1} , если Φ_{s+1} — линк типа I или II, $y_s \in X_s$ — точка, в которую линк Φ_s стягивает свой исключительный дивизор, если он имеет тип II или III, и $n = K_X^2$. Тогда

$$(5.4.1) \quad \deg x_s + \deg y_s < n,$$

если $X_s \in \{\mathbb{D}\}$, или если $X_s \in \{\mathbb{C}\}$, и по крайней мере один из линков Φ_s, Φ_{s+1} не является элементарным преобразованием (в этом случае K_{X_s} обилен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению специального соотношения

$$\hat{A}_{s+1} = (a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s) = \hat{A}_s,$$

что по формулам (2.6) для линков типа I и II равносильно неравенству $r(x_s) > a_s$. Аналогично, $\hat{A}_{s-1} \leq A_s \Leftrightarrow r_{y_s} \geq a_s$ для линков Φ_s типа II и III. Теперь, если $X_s \in \{\mathbb{D}\}$,

то Φ_{s+1} не может быть линком типа III или IV, а Φ_s — линком I или IV, стало быть, $\deg r_s > 0$, $\deg y_s > 0$ и (5.4.1) немедленно следует из (1.5.3).

Если $X_s \in \{\mathbb{C}\}$ и Φ_s не является элементарным преобразованием, то Φ_s — линк типа I или IV. Из классификации таких линков в 2.6 следует, что в обоих случаях $-K_{X_s}$ обилен, и условие $(a_s, b_s) \geq (a_{s-1}, b_{s-1})$ влечет за собой $b_s \leq 0$. Для линков типа I и IV точки y_s нет, и мы получаем $\deg y_s = 0$. Линк Φ_{s+1} может иметь тип II, III или IV. В случае II $\deg x_s > 0$, $r(x_s) > a_s$ и (5.4.1) следует из (1.5.5). В случаях III и IV точки x_s нет, т.е. $\deg x_s = 0$, и утверждение тривиально.

Если $\Phi_s = \varepsilon_{x_{s-1}}$ — элементарное преобразование, а Φ_{s+1} нет, то условие $(a_{s+1}, b_{s+1}) < (a_s, b_s)$ влечет за собой $b_s < 0$, значит, K_{X_s} обилен, $\deg x_s = 0$, $\deg y_s > 0$, $r(y_s) \geq a_s$, и $\deg y_s < K_{X_s}^2$ по нестрогому неравенству типа (1.5.5), где $b = b_s < 0$.

Отметим в дополнение к утверждениям леммы 5.4, что точка $x_{s-1} \in X_{s-1}$ в последнем случае находится в общем положении. Это показывает точно так же, как и в доказательстве теоремы 4.6. Если $X_s \in \{\mathbb{C}\}$ и оба линка Φ_s , Φ_{s+1} являются элементарными преобразованиями, то они коммутируют, т.е. для них выполняется соотношение типа (4.6.2).

Итак, с учетом утверждений 5.4 для описания соотношений между линками из леммы 5.2 предстоит рассмотреть всего несколько случаев: $X \in \{\mathbb{D}\} \cup \{\mathbb{C}\}$, $X(k) \neq \emptyset$, $n = K_X^2 = 5, 6, 8, 9$ с неравенствами (5.4.1) для степеней базисных точек.

5.5. ТЕОРЕМА. В обозначениях леммы 5.2 следующие композиции линков являются соотношениями:

Общий случай:

(i) $\Phi[1]\Phi$, где $\Phi = \gamma_{n;d}$ или $\Phi = \varepsilon_{n;d}$, для соответствующих n, d из леммы 5.2, $\gamma_{5;1,5}[1]\gamma_{9;5,1}$, $\gamma_{8;1,2}[1]\gamma_{9;2,1}$, $\gamma_{5;2,5}[1]\gamma_{8;5,2}$, $\gamma_{6;1,3}[1]\gamma_{8;3,1}$, Φ^2 в случае $\Phi = \tau$ — линк типа IV; а также соотношение типа (4.6.2) для элементарных преобразований с независимыми центрами.

Случай $n = 5$, $X \in \{\mathbb{D}\}$:

- (ii) $\gamma_{9;5,1}[6]\gamma_{5;3,3}[5]\gamma_{5;1,5}[4]\gamma_{5;3,3}[3]\gamma_{9;5,1}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\gamma_{5;1,5}\gamma_{5;3,3}$;
- (iii) $\gamma_{8;5,2}[8]\sigma_{8;2\varepsilon 6;5}[6]\sigma_{8;2}^{-1}[5]\gamma_{5;2,5}[4]\gamma_{8;5,2}[3]\sigma_{8;2\varepsilon 6;5}[1]\sigma_{8;2}^{-1}\gamma_{5;2,5}$;
- (iv) $\gamma_{9;5,1}\gamma_{8;1,2}[3]\gamma_{5;2,5}[2]\gamma_{9;5,1}[1]\gamma_{8;1,2}\gamma_{5;2,5}$;
- (v) $\gamma_{9;5,1}[5]\sigma_{9;1\varepsilon 8;5}[3]\tau\varepsilon_{8;5}[1]\sigma_{9;1}^{-1}\gamma_{5;2,5}$.

Случай $n = 5$, $X \in \{\mathbb{C}\}$:

- (vi) $\sigma_{9;4}^{-1}[10]\sigma_{9;4\varepsilon 5;4}[8]\sigma_{9;4}^{-1}[7]\sigma_{9;4\varepsilon 5;4}[5]\sigma_{9;4}^{-1}[4]\sigma_{9;4\varepsilon 5;4}[2]\sigma_{9;4}^{-1}[1]\sigma_{9;4\varepsilon 5;4}$;
- (vii) $\sigma_{9;4}^{-1}[6]\gamma_{9;3,3}[5]\sigma_{9;4\varepsilon 5;3}[3]\sigma_{9;4}^{-1}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\sigma_{9;4\varepsilon 5;3}$;
- (viii) $\sigma_{9;4}^{-1}[4]\gamma_{8;1,2}[3]\gamma_{8;4,4}[2]\gamma_{9;2,1}[1]\sigma_{9;4\varepsilon 5;2}$;
- (ix) $\sigma_{9;4}^{-1}[4]\sigma_{8;1\varepsilon 8;4}[2]\sigma_{9;1}^{-1}[1]\sigma_{9;4\varepsilon 5;1}$.

Случай $n = 6$, $X \in \{\mathbb{D}\}$:

- (x) $\gamma_{8;3,1}[6]\gamma_{8;4,4}[5]\gamma_{6;4,4}[3]\gamma_{8;3,1}[2]\gamma_{8;4,4}[1]\gamma_{6;1,3}\gamma_{6;4,4}$;
- (xi) $\gamma_{6;2,2}[6]\gamma_{6;3,3}[5]\gamma_{6;2,2}[4]\gamma_{6;3,3}[3]\gamma_{6;2,2}[2]\gamma_{6;3,3}[1]\gamma_{6;2,2}\gamma_{6;3,3}$;
- (xii) $\gamma_{8;3,1}[4]\gamma_{6;1,3}[3]\gamma_{6;3,3}[2]\gamma_{8;3,1}[1]\gamma_{6;1,3}\gamma_{6;3,3}$;
- (xiii) $\gamma_{6;2,2}[4]\gamma_{6;2,2}[3]\gamma_{6;2,2}[2]\gamma_{6;2,2}[1]\gamma'_{6;2,2}\gamma_{6;2,2}$;
- (xiv) $\gamma_{8;3,1}[4]\sigma_{8;2\varepsilon 6;3}[2]\sigma_{8;2}^{-1}[1]\gamma_{6;1}\gamma_{6;2,2}$;
- (xv) $\gamma_{8;3,1}[3]\gamma_{9;2,1}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\gamma_{8;1,2}\gamma_{6;1,3}$.

Случай $n = 6$, $X \in \{\mathbb{C}\}$:

- (xvi) $\sigma_{8;2}^{-1}[6]\gamma_{8;4,4}[5]\sigma_{8;2\varepsilon 6;4}[3]\sigma_{8;2}^{-1}[2]\gamma_{8;4,4}[1]\sigma_{8;2\varepsilon 6;4}$;
- (xvii) $\varepsilon_{6;2}[2]\sigma_{8;2}^{-1}[1]\sigma_{8;2\varepsilon 6;2}$;
- (xviii) $\sigma_{3;2}^{-1}[3]\gamma_{9;2,1}[2]\gamma_{8;1,2}[1]\sigma_{8;2\varepsilon 6;1}$;

соотношения для $\varepsilon_{6;5}$ и $\varepsilon_{6;3}$ равносильны (iii) и (xiv), соответственно.

Случай $n = 8$, $X \in \{\mathbb{D}\}$:

- (xix) $\gamma_{9;2,1}[6]\gamma_{9;6,6}[5]\gamma_{8;1,2}[4]\gamma_{8;6,6}[3]\gamma_{9;2,1}[2]\gamma_{9;6,6}[1]\gamma_{8;1,2}\gamma_{8;6,6}$;
- (xx) $\sigma_{8;2\varepsilon 6;2}[3]\sigma_{8;2}^{-1}[2]\sigma_{8;2\varepsilon 6;2}\sigma_{8;2}^{-1} \Leftrightarrow \sigma_{8;2}(\text{xvii})\sigma_{8;2}^{-1}$;
- (xxi) $\gamma_{9;2,1}[3]\sigma_{9;1\varepsilon 8;2}[1]\sigma_{9;1}^{-1}\gamma_{8;1,2}$;

соотношение для $(\gamma_{8;5,2}, \gamma_{5;2,5})$ равносильно соотношению (iii), соотношение для $(\gamma_{8;5,2}, \gamma_{5;1,5})$ равносильно обратному к соотношению (iv) с использованием соответствующих соотношений (i),

$$\begin{aligned} (\gamma_{8;4,4}, \gamma_{8;3,3}) &\Leftrightarrow (\text{x}), & (\gamma_{8;4,4}, \gamma_{8;2}^{-1}) &\Leftrightarrow (\text{xvi}), \\ (\gamma_{8;4,4}, \gamma_{8;1,2}) &\Leftrightarrow (\text{viii}), & (\gamma_{8;3,1}, \gamma_{6;3,3}) &\Leftrightarrow (\text{xii}), \\ (\gamma_{8;3,1}, \gamma_{6;2,2}) &\Leftrightarrow (\text{xiv}), & (\gamma_{8;3,1}, \gamma_{6;1,3}) &\Leftrightarrow (\text{xv})^{-1}, \\ (\sigma_{8;2}^{-1}, \varepsilon_{6;1}) &\Leftrightarrow (\text{xviii}), \end{aligned}$$

Случай $n = 8$, $X \simeq \mathbb{F}_1$ — линейчатая поверхность (раздутие $\mathbb{P}^2$):

- (xxii) $\sigma_{9;1}^{-1}[10]\gamma_{9;7,7}[9]\sigma_{9;1\varepsilon 8;7}[7]\tau\varepsilon_{8;7}[5]\sigma_{9;1}^{-1}[4]\gamma_{9;7,7}[3]\sigma_{9;1\varepsilon 8;7}[1]\tau\varepsilon_{8;7}$;
- (xxiii) $\sigma_{9;1}^{-1}[4]\gamma_{9;6,6}[5]\sigma_{9;1\varepsilon 8;6}[3]\sigma_{9;1}^{-1}[2]\gamma_{9;6,6}[1]\sigma_{9;1\varepsilon 8;6}$;
- (xxiv) $\sigma_{9;1}^{-1}[4]\gamma_{9;3,3}[3]\sigma_{9;1\varepsilon 8;3}[1]\tau\varepsilon_{8;3}$;
- (xxv) $\sigma_{9;1}^{-1}[3]\sigma_{9;1\varepsilon 8;1}[1]\tau\varepsilon_{8;1} \Leftrightarrow (3, 4, \text{ii})$;

соотношение для $\varepsilon_{8;5}$ равносильно (v), для $\varepsilon_{8;3}$ — (ix), для $\varepsilon_{8;2}$ — (xxi).

Случай $n = 8$, $X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$:

$$\begin{aligned} (\text{xxvi}) \quad & \tau_{\varepsilon_{8;6}}[9]\tau_{\varepsilon_{8;6}}[7]\tau_{\varepsilon_{8;6}}[5]\tau_{\varepsilon_{8;6}}[3]\tau_{\varepsilon_{8;6}}[1]\tau_{\varepsilon_{8;6}}; \\ (\text{xxvii}) \quad & \tau_{\varepsilon_{8;4}}[5]\tau_{\varepsilon_{8;4}}[3]\tau_{\varepsilon_{8;4}}[1]\tau_{\varepsilon_{8;4}}; \\ (\text{xxviii}) \quad & \tau_{\varepsilon_{8;2}}[3]\tau_{\varepsilon_{8;2}}[1]\tau_{\varepsilon_{8;2}}; \end{aligned}$$

соотношения для $\varepsilon_{8;7}$, $\varepsilon_{8;5}$, $\varepsilon_{8;3}$, $\varepsilon_{8;1}$ равносильны (xxii), (v), (xxiv), (xxv), соответственно.

Случай $n = 9$, $X \simeq \mathbb{P}^2$:

$$(\text{xxix}) \quad \gamma_{9;3,3}[4]\gamma_{9;3,3}[3]\gamma_{9;3,3}[2]\gamma_{9;3,3}[1]\gamma_{9;3,3}\gamma_{9;3,3};$$

соотношение для $(\gamma_{9;7,7}, \sigma_{9;1}^{-1})$ равносильно (xxii),

$$\begin{aligned} (\gamma_{9;6,6}, \gamma_{9;2,1}) &\Leftrightarrow (\text{xix}), & (\gamma_{9;6,6}, \sigma_{9;1}^{-1}) &\Leftrightarrow (\text{xxiii}), & (\gamma_{9;5}, \gamma_{5;3}) &\Leftrightarrow (\text{ii}), \\ (\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,4}) &\Leftrightarrow (\text{vi}), & (\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,3}) &\Leftrightarrow (\text{vii}), & (\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,2}) &\Leftrightarrow (\text{viii}), \\ (\sigma_{9;4}^{-1}, \varepsilon_{5,1}) &\Leftrightarrow (\text{ix}), & (\gamma_{9;3,3}, \gamma_{9;2,1}) &\Leftrightarrow (\text{xv}), & (\gamma_{9;3,3}, \sigma_{9;1}^{-1}) &\Leftrightarrow (\text{xxiv}), \\ (\gamma_{9;2,1}, \sigma_{8;2}^{-1}) &\Leftrightarrow (\text{xviii}), & (\gamma_{9;2,1}, \gamma_{8;1,2}) &\Leftrightarrow (\text{xviii})^{-1}, & (\sigma_{9;1}^{-1}, \varepsilon_{8,1}) &\Leftrightarrow (\text{xxv}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все соотношения проверяются обычным образом: достаточно показать с помощью формул (2.6), что указанные композиции линков переводят очень обильную полную линейную систему на X в себя. Соотношения (i) непосредственно видны из явной конструкции соответствующих линков в 2.6. Поскольку проверка всех других соотношений стандартна и сводится к итерированию формул преобразования степеней $\hat{A}_i = (a_i, b_i)$ и кратностей базисных точек с учетом правил сцепления в 2.6, мы приведем только несколько типичных примеров таких вычислений.

Случай (ii). Пусть здесь и далее $(a, b; r_{d_1}, r_{d_2}, \dots)$ обозначает характеристику линейной системы $\mathcal{H}$ на X , где $(a, b) = \hat{A}(\mathcal{H})$ – степень, $r_{d_i} = r(x_i)$ – кратность базисных точек x_i степени $d_i = \deg x_i$ в $\mathcal{H}$. По формулам из 2.6 для композиции линков в (ii) с указанными правилами сцепления получаем

$$\begin{aligned} (a, 0; 0, 0, \dots) &\xrightarrow{\gamma_{5;3,3}} (4a, 0; r_3 = 5a, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\gamma_{5;1,5}} \left(\frac{20}{3}a, 0; 5a, r_5 = 8a, 0, 0, \dots\right) \\ &\xrightarrow{\gamma_{9;3,3}} \left(\frac{25}{3}a, 0; 10a, 8a, 0, 0, \dots\right) \xrightarrow{\gamma_{9;5,1}} (9a, 0; 10a, 0, r_1 = 10a, 0, 0, \dots) \\ &\xrightarrow{\gamma_{5;3,3}} (6a, 0; 5a, 0, 10, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\gamma_{9;5,1}} (a, 0; 0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Случай (vi).

$$\begin{aligned}
(a, b; 0, 0, \dots) &\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (a, 4a + b; r_4 = 2a, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(\frac{11}{3}a + \frac{2}{3}b, 0; 2a, r'_4 = 5a + b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (7a + 2b; -5a - 2b; 5a + b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (7a + 2b, 3a + 2b; 0, 9a + 3b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(9a + \frac{10}{3}b, 0; 10a + 4b, 9a + 3b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (9a + 4b, -b; 10a + 4b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (9a + 4b, -4a - b; 8a + 4b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(\frac{19}{3}a + \frac{10}{3}b, 0; 8a + 4b, 5a + 3b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (3a + 2b, 5a + 2b; 0, 5a + 3b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{5;4}} (3a + 2b, -3a - 2b; 0, a + b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}} \left(a + \frac{2}{3}b, 0; 0, a + b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;4}^{-1}} (a, b; 0, 0, \dots).
\end{aligned}$$

Случай (xx).

$$\begin{aligned}
(a, 0; 0, 0, \dots) &\xrightarrow{\sigma_{8;2}^{-1}} (2a, -2a; 0, 0, \dots) \xrightarrow{\varepsilon_{6;2}} (2a, 2a; r_2 = 4a, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\sigma_{8;2}} (3a, 0; 4a, r'_2 = 4a, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\sigma_{8;2}^{-1}} (2a, 2a; 0, 4a, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{6;2}} (2a, -2a; 0, 0, \dots) \xrightarrow{\sigma_{8;2}} (a, 0; 0, 0, \dots).
\end{aligned}$$

Случай (xxii).

$$\begin{aligned}
(a, b; 0, 0, \dots) &\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} (a, 7a + b; 2a, 0, 0, \dots) \xrightarrow{\tau} \left(\frac{9}{2}a + \frac{1}{2}b, -7a - b; 2a, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} \left(\frac{9}{2}a + \frac{1}{2}b, \frac{21}{2}a + \frac{5}{2}b; 7a + b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;1}} \left(8a + \frac{4}{3}b, 0; 7a + b, r_1 = 15a + 3b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\gamma_{9;7,7}} \left(15a + \frac{11}{3}b, 0; 16a + 4b, 15a + 3b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;1}^{-1}} (15a + 4b, -b; 16a + 4b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} (15a + 4b, -7a - b; 14a + 4b, 0, 0, \dots) \\
&\xrightarrow{\tau} \left(\frac{23}{2}a + \frac{7}{2}b, 7a + b; 14a + 4b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_{8;7}} \left(\frac{23}{2}a + \frac{7}{2}b - \frac{21}{2}a - \frac{5}{2}b; 9a + 3b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;1}} \left(8a + \frac{8}{3}b, 0; 9a + 3b, a + b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\gamma_{9;7,7}} \left(a + \frac{1}{3}b, 0; a + b, 0, 0, \dots\right) \\
&\xrightarrow{\sigma_{9;1}^{-1}} (a, b; 0, 0, \dots).
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 5.5 закончено.

5.6. ТЕОРЕМА. *Всякое соотношение между линками из леммы 5.2 выводится из соотношений (i)–(xxix) в 5.5.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – нетривиальное соотношение между линками из 5.2. По лемме 3.2 можно считать, что $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$ специально с вершиной s . Пусть $\widehat{A}(R) = \widehat{A}_s = (a_s, b_s)$ – приведенная высота R . Как обычно, перебирая всевозможные значения для линков Φ_s, Φ_{s+1} из 5.2 (так, чтобы композиция $\Phi_{s+1} \Phi_s$ имела смысл как бирациональное отображение) и используя подходящее соотношение из 5.5, заменим R на эквивалентное соотношение R' и проверим, что для него выполняются условия (3.5.2). Далее индукция завершит доказательство.

Предстоит рассмотреть довольно много случаев (значительно больше, чем в теоремах 4.6 и 4.9, ср. [15]). Поскольку все вычисления стандартны, мы ограничимся разбором нескольких типичных случаев. Отметим, прежде всего, что соотношения (i) исключают для Φ_s, Φ_{s+1} значения $\Phi_s = \gamma_{n;d,d}, \Phi_{s+1} = \gamma_{n;d,d}[1]$ и другие, указанные в (i), кроме (4.6.2), поскольку специальное соотношение по определению является приведенным. Если же Φ_s, Φ_{s+1} – элементарные преобразования, то, как в 3.5 или в 4.6, устанавливается, что их центры независимы и можно воспользоваться соотношением коммутирования, в результате R редуцируется в R' , для которого выполняются условия (3.5.2).

Если по крайней мере один из линков Φ_s, Φ_{s+1} не является элементарным преобразованием, то по лемме 4.5 имеет место неравенство (5.4.1). Нетрудно проверить, что для любой пары линков Φ_s, Φ_{s+1} , для которых выполняется это неравенство, в 5.5 найдется соотношение или обратное к нему, которым они связаны. Например, соотношение (ii) связывает следующие пары линков:

$$(\gamma_{5;3,3}, \gamma_{5;1,5}), (\gamma_{5;1,5}, \gamma_{9;3,3}), \dots, (\gamma_{9;5,1}, \gamma_{5;3,3}).$$

Обратное соотношение по модулю соотношений (i) связывает, соответственно,

$$(\gamma_{9;5,1}, \gamma_{5;3,3}), \dots, (\gamma_{5;3,3}, \gamma_{5;1,5}).$$

Ясно, что вычисление степеней при редукции R к R' для любой пары линков Φ_s, Φ_{s+1} , связанных одним и тем же соотношением, одинаковы, поэтому достаточно ограничиться рассмотрением одной пары для каждого из соотношений. Кроме того, эти вычисления стандартны и однотипны для любого соотношения, так что мы ограничимся одним примером таких вычислений. Подобные вычисления в несколько ином контексте приведены в [15].

Случай $\Phi_s = \gamma_{5;3,3}, \Phi_{s+1} = \gamma_{5;1,5}$. Используя соотношение (ii) и соотношения (i), заменим $\Phi_{s+1} \Phi_s$ на $\Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_{s+1} \Phi'_s$, где $\Phi'_s = \gamma_{9;5,1}^{-1} = \gamma_{5;1,5}, x'_{s-1} = \gamma_{5;3,3}^{-1}(x_s)$, $\deg x'_{s-1} = \deg x_s = 1, r(x'_{s-1}) = r(x_s); \Phi'_{s+1} = \gamma_{9;3,3}, x'_s = \Phi'_s(x_{s-1}), \deg x'_s = \deg x_{s-1} = 3, r(x'_s) = r(x_{s-1}); \Phi'_{s+2} = \gamma_{9;5,1}; x'_{s+1} = \Phi'_{s+1}(y'_s)$, где y'_s – образ стягиваемого дивизора отображением Φ'_s , $\deg x'_{s+1} = \deg y'_s = 5, r(x'_{s+1}) = r(y'_s)$; и так далее по правилу сцепления в соотношении (ii). Как обычно, мы получаем соотношение $R' = \Phi_n \cdots \Phi_{s+2} \Phi'_{s+5} \cdots \Phi'_s \Phi_{s-1} \cdots \Phi_1$, для которого надо вычислить степени

для линков $\Phi'_s, \dots, \Phi'_{s+5}$ и убедиться, что для R' выполняются условия (3.5.2). Поскольку в этом случае все $X'_{s+i} \in \{\mathbb{D}\}$, то степени Φ'_{s+i} — это коэффициенты a'_{s+i} при $-K_{X'_{s+i}}$ в линейной системе $\mathcal{H}_{X'_{s+i}}$.

$$\begin{aligned}
a'_s &= \frac{5}{3}a_{s-1} - \frac{2}{3}r(x_s) < a_{s-1} \quad (\text{так как } r(x_s) > a_s \geq a_{s-1}); \\
r(y'_s) &= 2a_{s-1} - r(x_s); \\
a'_{s+1} &= 2a'_s - r(x_{s-1}) = \frac{10}{3}a_{s-1} - \frac{4}{3}r(x_s) - r(x_{s-1}) \\
&= 2a_{s-1} - r(x_s) + \frac{a_s - r(x_s)}{3} < a_{s-1} \quad (\text{так как } a_s = 4a_{s-1} - 3r(x_{s-1})); \\
r(y'_{s+1}) &= 3a'_s - 2r(x_{s-1}) = 5a_{s-1} - 2r(x_s) - 2r(x_{s-1}); \\
a'_{s+2} &= 3a'_{s+1} - 2r(y'_s) = 2a_{s-1} + a_s - 2r(x_s) < a_{s-1}; \\
r(y'_{s+2}) &= 6a'_{s+1} - 5r(y'_s) = 10a_{s-1} - 3r(x_s) - 6r(x_{s-1}); \\
a'_{s+3} &= 4a'_{s+2} - 3r(y'_{s+1}) = a_{s-1} + 2a_s - 2r(x_s) < a_{s-1}; \\
a'_{s+4} &= \frac{5}{3}a'_{s+3} - \frac{2}{3}r(y'_{s+2}) = 2a_s - r(x_s) + \frac{a_{s-1} - r(x_s)}{3} < a_s; \\
a'_{s+5} &= a_{s+1} < a_s.
\end{aligned}$$

Отсюда, как обычно, получаем

$$\widehat{A}(R') = \max\{\widehat{A}_{s+1}, \widehat{A}'_{s+4}, \widehat{A}_{s-1}\},$$

следовательно, выполняются условия (3.5.2), что позволяет сделать шаг индукции.

Доказательство теоремы 5.6 закончено.

КОММЕНТАРИЙ 7. Хотелось бы иметь общее доказательство теоремы 5.6 и аналогичных теорем из § 4, не прибегая к прямым вычислениям. Это, по-видимому, можно сделать. В таком случае объем вычислений существенно сократился бы и сводился бы только к нахождению соотношений для допустимых пар линков Φ_s, Φ_{s+1} в вершине любого предполагаемого специального соотношения $R = \Phi_n \cdots \Phi_{s+1} \Phi_s \cdots \Phi_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гизатуллин М. Х. Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1982. Т. 46. № 5. С. 909–970.
- [2] Исковских В. А. О бирациональных формах рациональных поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 6. С. 1417–1433.
- [3] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). № 4. С. 608–638.
- [4] Исковских В. А. Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и сполжительным квадратом канонического класса // Матем. сб. 1970. Т. 83 (125). № 1. С. 90–119.
- [5] Исковских В. А. Бирациональные свойства поверхности степени 4 в $\mathbb{P}^4$ // Матем. сб. 1972. Т. 88 (130). № 1. С. 31–37.
- [6] Исковских В. А. Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 19–43.
- [7] Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1979. С. 159–235.
- [8] Исковских В. А. Образующие и соотношения в группах бирациональных автоморфизмов двух классов рациональных поверхностей // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 165. С. 67–78.

- [9] Исковских В. А. Доказательство теоремы о соотношениях в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // УМН. 1985. Т. 40. № 5 (245). С. 255–256.
- [10] Исковских В. А. Простое доказательство теоремы Гизатуллина о соотношениях в двумерной группе Кремоны // Тр. МИАН. 1990. Т. 183. С. 111–116.
- [11] Исковских В. А. Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 157–170.
- [12] Исковских В. А. О проблеме рациональности для трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на поверхности Дель Пеццо // Тр. МИАН. 1995. Т. 208. С. 128–138.
- [13] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
- [14] Исковских В. А., Трегуб С. Л. О бирациональных автоморфизмах рациональных поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 2. С. 254–281.
- [15] Исковских В. А., Кабдыкиров Ф. К., Трегуб С. Л. Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 3. С. 3–69.
- [16] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями // Publ. Math. IHES 1966. Т. 30. С. 55–113.
- [17] Манин Ю. И. Рациональные поверхности над совершенными полями. II // Матем. сб. 1967. Т. 72 (114). С. 161–192.
- [18] Манин Ю. И. Кубические формы. М.: Наука, 1972.
- [19] Манин Ю. И., Цфасман М. А. Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика // УМН. 1986. Т. 41. № 2. С. 43–94.
- [20] Саркисов В. Г. Бирациональные автоморфизмы расслоений на коники // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 4. С. 818–944.
- [21] Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Alg. Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
- [22] Fano G. Osservazioni sopra alcune varietà algebriche non razionali aventi tutti i generi nulli // Atti Acc. Torino. 1915. V. 50. P. 1067–1072.
- [23] Fano G. Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezione canoniche // Pont. Acad. Sci. Comment. 1947. V. 11. P. 635–720.
- [24] Hudson H. Cremona transformation in plane and space. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927.
- [25] Kantor R. Rational Zerlegung der birationalen Transformationen in ihre Primfactoren // Monatsh. Math. and Phys. 1988. V. 10. № 1. P. 54–74.
- [26] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. Math. 1982. V. 115. P. 133–176.
- [27] Sarkisov V. G. Birational maps of standart Q -Fano fiberings // Prepr. Kurchatov Inst. Atom. Energy, 1989.
- [28] Shepherd-Barron N. I. The Rationality of quintic Del Pezzo surfaces – a short proof // Bull. London Math. Soc. 1992. V. 24. № 3. P. 249–250.
- [29] Swinnerton-Dyer H. P. F. Rational points on del Pezzo surfaces of degree 5 // Algebraic geometry. Oslo, 1970. Gronningen: Wolters and Noordhoff, 1972. P. 287–290.
- [30] Reid M. Birational geometry of 3-folds according to Sarkisov // Prepr. Univ. Warwick, 1991.
- [31] Roth L. Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality. Berlin: Springer-Verlag, 1955.
- [32] Weinstein F. W. On birational automorphisms of Severi-Brauer surfaces // Prepr. Rep. Math. Univ. Stockholm. № 1, 1989. P. 1–14.
- [33] Zariski O. Algebraic surfaces and Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1971.